

# FIZYKA

dla inżynierów

Zbigniew Kąkol

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej  
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Kraków 2023

## Spis treści

Spis treści.....	2
Od autora .....	11
Informacje ogólne.....	11
Porady dla studiujących.....	12
Układ treści i korzystanie z materiałów .....	12
Wskazówki ułatwiające samokontrolę postępów .....	13
MODUŁ I.....	15
1    Wiadomości wstępne.....	16
1.1    Wielkości fizyczne, jednostki .....	16
1.2    Wektory .....	17
1.2.1    Rozkładanie wektorów na składowe .....	17
1.2.2    Suma wektorów .....	18
1.2.3    Iloczyn skalarny.....	19
1.2.4    Iloczyn wektorowy .....	19
2    Ruch jednowymiarowy.....	20
2.1    Wstęp .....	20
2.2    Prędkość.....	20
2.2.1    Prędkość stała .....	20
2.2.2    Prędkość chwilowa.....	21
2.2.3    Prędkość średnia .....	22
2.3    Przyspieszenie.....	23
2.3.1    Przyspieszenie jednostajne .....	23
2.3.2    Przyspieszenie chwilowe.....	24
2.3.3    Ruch jednostajnie zmienny.....	24
3    Ruch na płaszczyźnie.....	26
3.1    Przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie .....	26
3.2    Rzut ukośny .....	27
3.3    Ruch jednostajny po okręgu.....	30
3.4    Ruch krzywoliniowy .....	32
4    Podstawy dynamiki .....	34
4.1    Wstęp .....	34
4.1.1    Oddziaływania podstawowe .....	34
4.1.2    Masa .....	35
4.1.3    Pęd .....	35
4.1.4    Siła .....	35
4.2    Zasady dynamiki Newtona .....	36
5    Wybrane zagadnienia z dynamiki.....	41
5.1    Siły kontaktowe i tarcie .....	41
5.1.1    Tarcie .....	41
5.2    Siły bezwładności .....	43
6    Grawitacja.....	47
6.1    Prawo powszechnego ciężenia.....	47
6.1.1    Doświadczenie Cavendisha .....	48
6.2    Prawa Keplera ruchu planet .....	50

6.3	Ciężar .....	51
6.3.1	Masa bezwładna i grawitacyjna .....	51
6.4	Pole grawitacyjne, pola sił .....	52
	Podsumowanie .....	54
	Materiały dodatkowe do Modułu I .....	55
	Średnia ważona .....	55
	Ruch przyspieszony po okręgu .....	55
	Ruch w polu grawitacyjnym z uwzględnieniem oporu powietrza .....	57
	Siła Coriolisa .....	58
	Prawa Keplera a zasady dynamiki Newtona .....	60
	Rozwiązania ćwiczeń z modułu I .....	63
	Test I .....	68
	MODUŁ II .....	70
7	Praca i energia .....	71
7.1	Praca wykonana przez siłę stałą .....	71
7.2	Praca wykonana przez siłę zmienną .....	73
7.3	Energia kinetyczna .....	76
7.4	Moc .....	77
8	Zasada zachowania energii .....	79
8.1	Siły zachowawcze i niezachowawcze .....	79
8.2	Energia potencjalna .....	82
8.2.1	Energia potencjalna i potencjał pola grawitacyjnego .....	85
8.3	Zasada zachowania energii .....	87
9	Zasada zachowania pędu .....	91
9.1	Środek masy .....	91
9.2	Ruch środka masy .....	92
9.3	Pęd układu punktów materialnych .....	94
9.4	Zasada zachowania pędu .....	95
10	Zderzenia .....	98
10.1	Zderzenia w przestrzeni jednowymiarowej .....	98
10.2	Zderzenia na płaszczyźnie .....	101
	Podsumowanie .....	105
	Materiały dodatkowe do Modułu II .....	106
	Energia kinetyczna w układzie środka masy .....	106
	Układy o zmiennej masie .....	107
	Rozwiązania ćwiczeń z modułu II .....	109
	Test II .....	114
	MODUŁ III .....	116
11	Ruch obrotowy .....	117
11.1	Kinematyka ruchu obrotowego .....	117
11.2	Dynamika ruchu obrotowego .....	119
11.2.1	Moment pędu .....	120
11.2.2	Zachowanie momentu pędu .....	121
11.3	Dynamika bryły sztywnej .....	122
11.4	Ruch obrotowo-postępowy .....	124
12	Ruch drgający .....	127

12.1	Siła harmoniczna, drgania swobodne.....	127
12.2	Wahadła.....	129
12.2.1	Wahadło proste.....	129
12.2.2	Wahadło fizyczne.....	131
12.3	Energia ruchu harmonicznego prostego.....	132
12.4	Oscylator harmoniczny tłumiony.....	134
12.4.1	Straty mocy, współczynnik dobroci.....	136
12.5	Drgania wymuszone oscylatora harmonicznego.....	137
12.5.1	Rezonans.....	139
12.6	Składanie drgań harmoniczných.....	140
12.6.1	Składanie drgań równoległych.....	141
12.6.2	Składanie drgań prostopadłych.....	141
	Podsumowanie.....	144
	Materiały dodatkowe do Modułu III.....	145
	Ruch przyspieszony po okręgu.....	145
	Obliczanie momentu bezwładności - przykład.....	146
	Ruch precesyjny (bąk).....	147
	Równanie ruchu harmonicznego tłumionego.....	149
	Amplituda i faza w ruchu harmonicznym wymuszonym.....	150
	Moc absorbowana przez oscylator.....	151
	Składanie drgań metodą wektorową.....	152
	Rozwiązania ćwiczeń z modułu III.....	154
	Test III.....	157
	MODUŁ IV.....	159
13	Fale w ośrodkach sprężystych.....	160
13.1	Fale mechaniczne.....	160
13.1.1	Rodzaje fal.....	160
13.2	Rozchodzenie się fal w przestrzeni.....	163
13.3	Prędkość rozchodzenia się fal, równanie falowe.....	165
13.4	Przenoszenie energii przez fale.....	166
13.5	Interferencja fal, fale stojące.....	168
13.5.1	Fale stojące.....	168
13.6	Analiza fal złożonych.....	170
13.7	Dudnienia, modulacja amplitudy.....	172
13.8	Zjawisko Dopplera.....	174
14	Statyka i dynamika płynów.....	177
14.1	Ciśnienie i gęstość.....	177
14.2	Ciśnienie wewnątrz nieruchomego płynu.....	178
14.2.1	Pomiar ciśnienia (barometr).....	179
14.3	Prawo Pascala i prawo Archimedesasa.....	180
14.4	Ogólny opis przepływu płynów.....	182
14.5	Równanie Bernoulliego.....	185
14.6	Dynamiczna siła nośna.....	188
	Podsumowanie.....	190
	Materiały dodatkowe do Modułu IV.....	191
	Prędkość grupowa.....	191

Prędkość fal w naprężonym sznurze (strunie).....	192
Rozwiązania ćwiczeń z modułu IV .....	194
Test IV .....	197
MODUŁ V.....	198
15 Kinetyczna teoria gazów i termodynamika I.....	199
15.1 Ciśnienie gazu doskonałego .....	199
15.2 Temperatura, równanie stanu gazu doskonałego .....	202
15.2.1 Zerowa zasada termodynamiki.....	202
15.2.2 Kinetyczna interpretacja temperatury.....	202
15.2.3 Równanie stanu gazu doskonałego.....	202
15.2.4 Pomiar temperatury, skale temperatur.....	203
15.3 Ekwipartycja energii .....	204
15.4 Pierwsza zasada termodynamiki .....	205
15.5 Ciepło właściwe .....	208
15.5.1 Ciepło właściwe przy stałej objętości.....	208
15.5.2 Ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu .....	210
15.6 Rozprężanie izotermiczne i adiabatyczne .....	211
15.6.1 Rozprężanie izotermiczne.....	211
15.6.2 Rozprężanie adiabatyczne .....	211
16 Kinetyczna teoria gazów i termodynamika II.....	213
16.1 Średnia droga swobodna .....	213
16.2 Rozkład Maxwella prędkości cząsteczek.....	214
16.3 Równanie stanu Van der Waalsa.....	216
16.4 Procesy odwracalne i nieodwracalne, cykl Carnota.....	217
16.4.1 Procesy odwracalne i nieodwracalne.....	217
16.4.2 Cykl Carnota.....	218
16.5 Entropia i druga zasada termodynamiki.....	220
16.5.1 Termodynamiczna skala temperatur.....	221
16.5.2 Entropia .....	221
16.5.3 Entropia a nieuporządkowanie .....	223
16.6 Stany równowagi, zjawiska transportu.....	224
16.6.1 Stany równowagi .....	224
16.6.2 Zjawiska transportu .....	225
Podsumowanie.....	227
Materiały dodatkowe do Modułu V .....	229
Rotacyjne i wibracyjne stopnie swobody cząsteczki wodoru .....	229
Równanie Poissona dla przemiany adiabatycznej.....	229
Sprawność silnika Carnota .....	230
Sprawność silników cieplnych .....	231
Przepływ ciepła.....	232
Rozwiązania ćwiczeń z modułu V.....	234
Test V .....	236
MODUŁ VI .....	237
17 Pole elektryczne.....	238
17.1 Ładunek elektryczny .....	238
17.1.1 Kwantyztacja ładunku .....	238

17.1.2	Zachowanie ładunku.....	238
17.2	Prawo Coulomba.....	238
17.2.1	Zasada superpozycji .....	240
17.3	Pole elektryczne .....	240
18	Prawo Gaussa .....	244
18.1	Strumień pola elektrycznego.....	244
18.2	Prawo Gaussa .....	246
18.3	Przykłady zastosowania prawa Gaussa I.....	247
18.3.1	Izolowany przewodnik .....	247
18.3.2	Kuliste rozkłady ładunków - jednorodnie naładowana sfera.....	248
18.3.3	Kuliste rozkłady ładunków - jednorodnie naładowana kula .....	249
18.4	Przykłady zastosowania prawa Gaussa II .....	250
18.4.1	Liniowy rozkład ładunków .....	250
18.4.2	Płaskie rozkłady ładunków .....	251
18.4.3	Powierzchnia przewodnika.....	253
19	Potencjał elektryczny.....	254
19.1	Energia potencjalna w polu elektrycznym .....	254
19.2	Potencjał elektryczny .....	254
19.3	Obliczanie potencjału elektrycznego .....	258
20	Kondensatory i dielektryki .....	261
20.1	Pojemność elektryczna.....	261
20.2	Energia pola elektrycznego .....	262
20.3	Kondensator z dielektrykiem .....	264
	Podsumowanie.....	268
	Materiały dodatkowe do Modułu VI .....	269
	Pole elektryczne na osi pierścienia.....	269
	Strumień pola elektrycznego .....	270
	Gradient pola .....	271
	Dielektryk w polu elektrycznym - rozważania ilościowe .....	272
	Rozwiązania ćwiczeń z modułu VI .....	275
	Test VI.....	279
	MODUŁ VII.....	281
21	Prąd elektryczny .....	282
21.1	Natężenie prądu elektrycznego .....	282
21.2	Prawo Ohma.....	284
21.3	Praca i moc prądu, straty cieplne .....	288
21.3.1	Straty cieplne .....	289
21.4	Obwody prądu stałego.....	290
21.4.1	Siła elektromotoryczna, prawo Ohma dla obwodu zamkniętego .....	290
21.4.2	Prawa Kirchoffa.....	291
22	Pole magnetyczne .....	295
22.1	Siła magnetyczna.....	295
22.2	Linie pola magnetycznego, kierunek pola.....	297
22.3	Ruch naładowanych cząstek w polu magnetycznym .....	299
22.4	Działanie pola magnetycznego na przewodnik z prądem .....	302
22.4.1	Obwód z prądem.....	303

22.4.2	Magnetyczny moment dipolowy .....	304
22.5	Efekt Halla.....	305
23	Pole magnetyczne przewodników z prądem .....	308
23.1	Prawo Ampère'a .....	308
23.1.1	Pole wokół przewodnika z prądem.....	308
23.1.2	Prawo Ampère'a.....	308
23.1.3	Przykład - prostoliniowy przewodnik.....	309
23.1.4	Przykład - cewka (solenoid) .....	311
23.2	Oddziaływanie równoległych przewodników z prądem .....	312
23.3	Prawo Biota-Savarta.....	313
	Podsumowanie.....	317
	Materiały dodatkowe do Modułu VII.....	318
	Wyprowadzenie prawa Ohma .....	318
	Cyklotron.....	319
	Rozwiązania ćwiczeń z modułu VII.....	321
	Test VII.....	325
	MODUŁ VIII.....	327
24	Indukcja elektromagnetyczna .....	328
24.1	Prawo indukcji Faradaya .....	328
24.2	Reguła Lenza.....	330
24.3	Indukcyjność .....	332
24.3.1	Transformator .....	332
24.3.2	Indukcyjność własna .....	333
24.4	Energia pola magnetycznego .....	335
25	Drgania elektromagnetyczne .....	337
25.1	Drgania w obwodzie LC .....	337
25.2	Obwód szeregowy RLC .....	339
25.3	Rezonans .....	342
25.4	Moc w obwodzie prądu zmiennego .....	344
26	Równania Maxwella .....	347
26.1	Prawo Gaussa dla pola magnetycznego .....	347
26.2	Indukowane wirowe pole elektryczne.....	348
26.3	Indukowane pole magnetyczne .....	349
26.4	Równania Maxwella.....	351
27	Fale elektromagnetyczne .....	352
27.1	Widmo fal elektromagnetycznych .....	352
27.2	Równanie falowe.....	353
27.3	Rozchodzenie się fal elektromagnetycznych .....	354
27.4	Wektor Poyntinga.....	356
	Podsumowanie.....	358
	Materiały dodatkowe do Modułu VIII .....	360
	Obwody RC i RL, stałe czasowe .....	360
	Zawada w obwodzie RLC .....	363
	Prąd przesunięcia .....	364
	Równania Maxwella.....	365
	Równania Maxwella w postaci różniczkowej (operatorowej) .....	366

Rozwiązania ćwiczeń z modułu VIII.....	368
Test VIII .....	372
MODUŁ IX .....	373
28 Optyka geometryczna i falowa .....	374
28.1 Wstęp.....	374
28.2 Odbicie i załamanie .....	375
28.2.1 Współczynnik załamania, droga optyczna, dyspersja światła.....	375
28.2.2 Prawo odbicia i prawo załamania.....	375
28.2.3 Soczewki.....	378
28.3 Warunki stosowalności optyki geometrycznej.....	380
28.3.1 Zasada Huygensa.....	381
29 Interferencja.....	383
29.1 Doświadczenie Younga.....	383
29.2 Spójność (koherencja) fal świetlnych .....	386
29.3 Natężenie światła w doświadczeniu Younga .....	387
29.4 Interferencja w cienkich warstwach.....	389
30 Dyfrakcja .....	391
30.1 Wstęp.....	391
30.2 Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie .....	392
30.3 Natężenie światła w obrazie dyfrakcyjnym .....	393
30.4 Interferencja i dyfrakcja na dwóch szczelinach .....	396
30.5 Interferencja fal z wielu źródeł, siatka dyfrakcyjna .....	398
30.6 Dyfrakcja promieni Roentgena (promieni X) .....	401
31 Polaryzacja.....	403
31.1 Wstęp.....	403
31.2 Płytki polaryzujące.....	404
31.3 Polaryzacja przez odbicie.....	406
31.4 Dwójłomność .....	407
Podsumowanie.....	409
Materiały dodatkowe do Modułu IX .....	410
Widzenie barwne .....	410
Zasada Fermata.....	410
Prawo Bragga .....	413
Rozwiązania ćwiczeń z modułu IX .....	415
Test IX .....	419
MODUŁ X.....	420
32 Światło a fizyka kwantowa.....	421
32.1 Promieniowanie termiczne .....	421
32.2 Ciało doskonale czarne.....	422
32.3 Teoria promieniowania we wnętrzu, prawo Plancka .....	424
32.3.1 Rozważania klasyczne .....	424
32.3.2 Teoria Plancka promieniowania ciała doskonale czarnego.....	425
32.3.3 Zastosowanie prawa promieniowania w termometrii.....	426
32.4 Zjawisko fotoelektryczne zewnętrzne .....	427
32.4.1 Kwantowa teoria Einsteina zjawiska fotoelektrycznego.....	430
32.5 Efekt Comptona.....	432



33	Model atomu Bohra .....	435
33.1	Wstęp.....	435
33.2	Widma atomowe .....	436
33.3	Model Bohra atomu wodoru .....	437
33.4	Stany energetyczne i widmo atomowe wodoru.....	441
34	Fale i cząstki .....	443
34.1	Fale materii.....	443
34.2	Struktura atomu i fale materii.....	445
35	Elementy mechaniki kwantowej.....	447
35.1	Funkcja falowa .....	447
35.2	Zasada nieoznaczoności .....	448
35.3	Teoria Schrödingera atomu wodoru.....	449
35.3.1	Równanie Schrödingera.....	449
35.3.2	Kwantowomechaniczny opis atomu wodoru.....	450
35.3.3	Funkcje falowe .....	451
35.3.4	Energia elektronu.....	455
	Podsumowanie.....	456
	Materiały dodatkowe do Modułu X .....	457
	Zasada nieoznaczoności w pomiarach.....	457
	Zasada nieoznaczoności i fale materii .....	458
	Równanie Schrödingera.....	460
	Przykłady rozwiązań równania Schrödingera .....	461
	Rozwiązania ćwiczeń z modułu X.....	467
	Test X .....	470
	MODUŁ XI .....	471
36	Atomy wieloelektronowe .....	472
36.1	Orbitalny moment pędu i spin elektronu.....	472
36.1.1	Orbitalny moment pędu .....	472
36.1.2	Spin elektronu.....	473
36.2	Zasada Pauliego.....	474
36.3	Układ okresowy pierwiastków .....	475
36.4	Promienie X.....	478
36.5	Lasery .....	481
36.5.1	Emisja spontaniczna .....	481
36.5.2	Emisja wymuszona.....	482
36.5.3	Rozkład Boltzmana .....	483
36.5.4	Laser .....	483
37	Materia skondensowana .....	486
37.1	Rodzaje kryształów (rodzaje wiązań) .....	486
37.1.1	Kryształy cząsteczkowe.....	486
37.1.2	Kryształy o wiązaniach wodorowych.....	487
37.1.3	Kryształy jonowe .....	487
37.1.4	Kryształy atomowe (kowalentne).....	487
37.1.5	Ciała metaliczne .....	488
37.2	Struktura pasmowa ciał stałych.....	488
37.3	Fizyka półprzewodników .....	490

37.3.1	Domieszkowanie półprzewodników.....	491
37.4	Zastosowania półprzewodników .....	493
37.4.1	Termistor .....	493
37.4.2	Złącze p - n .....	493
37.4.3	Baterie słoneczne.....	494
37.4.4	Tranzystor.....	494
37.5	Własności magnetyczne ciał stałych.....	495
37.5.1	Diamagnetyzm.....	496
37.5.2	Paramagnetyzm .....	497
37.5.3	Ferromagnetyzm.....	497
38	Fizyka jądrowa .....	500
38.1	Wstęp.....	500
38.2	Oddziaływanie nukleon-nukleon.....	500
38.3	Rozpady jądrowe.....	503
38.3.1	Rozpad alfa.....	504
38.3.2	Rozpad beta .....	504
38.3.3	Promieniowanie gamma .....	505
38.3.4	Prawo rozpadu nuklidów .....	506
38.4	Reakcje jądrowe .....	508
38.4.1	Rozszczepienie jąder atomowych.....	508
38.4.2	Reakcja syntezy jądrowej.....	509
38.4.3	Źródła energii gwiazd.....	510
	Podsumowanie.....	513
	Materiały dodatkowe do Modułu XI .....	514
	Rozkład Boltzmana .....	514
	Rozwiązania ćwiczeń z modułu XI .....	516
	Test XI.....	518
	UZUPEŁNIENIE .....	519
U.1	Elementy szczególnej teorii względności.....	520
U.1.1	Transformacja Galileusza.....	520
U.1.2	Dylatacja czasu.....	522
U.1.3	Transformacja Lorentza .....	524
U.1.3.1	Jednoczesność .....	524
U.1.3.2	Skrócenie długości .....	525
U.1.3.3	Dodawanie prędkości.....	525
U.1.3.4	Zależność masy od prędkości .....	526
U.1.3.5	Równoważność masy i energii .....	528
	Rozwiązania ćwiczeń z Uzupełnienia .....	530
	Uniwersalne stałe fizyczne .....	531
	Użyteczne wzory matematyczne .....	532
	Układ okresowy pierwiastków .....	533

## Od autora

Podręcznik "Fizyka" został opracowany z przeznaczeniem zarówno do samodzielnego studiowania fizyki w kursach prowadzonych systemem stacjonarnym jak i w systemie kształcenia na odległość.

Szanowny Czytelniku zanim rozpoczniesz naukę fizyki z wykorzystaniem tych materiałów przeczytaj poniższe informacje i koniecznie zapoznaj się z wprowadzeniem zawierającym porady dla studiujących. Znajdziesz tam wskazówki jak *efektywnie* uczyć się i jak sprawdzać swoje postępy.

## Informacje ogólne

Fizyka jest nauką przyrodniczą badającą najbardziej podstawowe i ogólne własności otaczającego nas świata materialnego i zachodzące w tym świecie zjawiska. Celem fizyki jest poznanie praw przyrody, od których zależą wszystkie zjawiska fizyczne.

Podstawową metodą badawczą fizyki są obserwacje i doświadczenia. Na ogół proces poznawczy rozpoczyna się od obserwacji jakościowych; rejestrujemy, odkrywamy nowe zjawisko. Następnie przeprowadzamy doświadczenia mające na celu ustalić związki przyczynowe jak i uzyskać informacje ilościowe. Na tej podstawie staramy się sformułować prawa fizyki, które zapisujemy w postaci równań matematycznych. To przejście od obserwacji do modelu matematycznego znane jest jako metoda indukcji. W tej metodzie rozpoczynasz naukę od poznania przykładu lub od wykonania samodzielnego ćwiczenia, które ma na celu zwrócić uwagę na samo zjawisko jak i na czynniki istotne dla tego zjawiska. Ten sposób jest niewątpliwie najbardziej kształcący z punktu widzenia samodzielnej nauki. Jednak umiejętności poprawnego wnioskowania i dokonywania uogólnień nie zawsze wystarczają do szybkiego, samodzielnego dotarcia do sformułowań praw fizyki (teorii fizycznych). Dzieje się tak po części dlatego, że prawa fizyki wyrażają związki ilościowe między różnymi wielkościami fizycznymi. Nie wystarczy stwierdzić, że jedna wielkość fizyczna zależy od drugiej (sformułowanie jakościowe) ale trzeba podać ścisłą relację między tymi wielkościami w postaci równania matematycznego, a to wiąże się zawsze z pomiarami określającymi liczbowo stosunek danej wielkości do przyjętej jednostki. Ponadto wszystkie wielkości fizyczne muszą być jednoznacznie określone i znajomość tych definicji jest niezbędna do sformułowania praw fizyki. Dlatego często naukę rozpoczyna się od poznania pewnej ilości definicji wielkości fizycznych, po których wprowadzane są wybrane prawa fizyczne. W większości przypadków prawa te poprzedzone są możliwie prostym wyprowadzeniem, którego celem jest podkreślenie logicznej struktury wnioskowania. Prawa te starałem się zilustrować (uzasadnić) za pomocą różnych faktów doświadczalnych, które są podane w formie przykładów lub ćwiczeń do samodzielnego wykonania. W tej części nauka polega na wyciąganiu wniosków z poznanych uprzednio praw. Ta metoda, w której nowe zjawiska i wyniki doświadczeń przewidujemy jako logiczną konsekwencję poznanych praw (teorii) znana jest jako metoda dedukcji.

Praktyczne zastosowania pokazujące związek między fizyką i techniką są tym na co powinien zwrócić uwagę przyszły inżynier. Dlatego starałem się zarówno w ćwiczeniach jak i przykładach przedstawić zagadnienia związane z rzeczywistymi sytuacjami. Mają one unaocznić fakt bezpośredniego związku fizyki z codziennym życiem, z jego różnymi aspektami.

## Porady dla studiujących


### Układ treści i korzystanie z materiałów

Materiał kursu został podzielony na rozdziały, które pogrupowane są w moduły. Powinieneś studiować je po kolei i przechodzić do następnego rozdziału dopiero gdy upewniłeś się, że rozumiesz materiał z poprzedniego. Ma to istotne znaczenie bo z wniosków i informacji z danego rozdziału będziesz wielokrotnie korzystał w następnych punktach. Na końcu każdego modułu znajdziesz ponadto, krótkie podsumowanie najważniejszych wiadomości.

Przy czytaniu zwróć uwagę na specjalne oznaczenia (ikony) umieszczone w tekście. Mają one na celu zwrócić Twoją uwagę na najistotniejsze elementy takie jak



#### Definicje, Prawa, zasady, twierdzenia

Fizyka, jak każda inna dyscyplina, posługuje się pewnymi charakterystycznymi sformułowaniami i pojęciami tak zwanymi *pojęciami podstawowymi*. Zostały one też opatrzone etykietami w postaci . Są one pomocne zwłaszcza przy powtórce i utrwalaniu wiadomości. Dodatkowo elementy najistotniejsze dla zrozumienia i opanowaniu materiału zostały wyszczególnione *pochyłą czcionką*. Zwróć na nie szczególną uwagę.

Prawa fizyki formułowane są w postaci równań matematycznych wyrażających ściśle ilościowe relacje między wielkościami fizycznymi, a to wiąże się z przyjęciem odpowiednich jednostek



#### Jednostki

Oprócz tekstu podstawowego zawierającego między innymi definicje, twierdzenia, komentarze, w rozdziałach umieszczone zostały również



#### Ćwiczenia

do samodzielnego wykonania. Ćwiczenia te mają różny charakter i różny stopień trudności. Są wśród nich takie, które uczą rozwiązywania zadań i problemów. Inne polegają na podaniu przez Ciebie przykładów ilustrujących dane prawa i zależności. Spotkasz się też z prostymi obliczeniami, które pozwolą zorientować się jaka jest skala różnych wielkości fizycznych. Poprawnie zrobione ćwiczenie stanowi cenne uzupełnienie materiałów. Część uzyskanych wyników jest potem wykorzystywana w kolejnych ćwiczeniach lub wprost w kolejnych zagadnieniach. Spróbuj je wszystkie wykonać. Na końcu każdego z modułów możesz sprawdzić poprawność rozwiązania lub uzyskać dodatkowe informacje, które pomogą rozwiązać problem. Dlatego nawet gdy nie potrafisz rozwiązać zadania zapisz te obliczenia, którym podołałeś i zanotuj gdzie napotkałeś na trudności. Postaraj się sprecyzować czy kłopot sprawiło Ci sformułowanie problemu, dobór odpowiednich wzorów czy obliczenia matematyczne, a następnie sprawdź rozwiązanie.

Prezentowane materiały są ilustrowane prostymi programami



## Programami

(symulacjami komputerowymi) dostępnymi do pobrania ze strony WWW autora (<http://home.agh.edu.pl/~kakol/>) oraz ze strony Otwartych Zasobów Edukacyjnych - Open AGH, (<http://open.agh.edu.pl/>).

Ponadto, w tekście umieszczono



## Odnosiniki do dodatkowego materiału

do dodatkowego materiału, umieszczonego na końcu modułów, a stanowiącego rozszerzenie i uzupełnienie kursu podstawowego. Postaraj się również w miarę możliwości zapoznać z tymi informacjami.

Na końcu każdego modułu znajduje się "**Test kontrolny**". Zawiera on zadania podobne do tych z jakimi spotkasz się na egzaminie lub przy zaliczeniu przedmiotu. Koniecznie zrób te zadania samodzielnie. Będziesz mógł ich rozwiązanie skonsultować z prowadzącym przedmiot. Dzięki korekcie i uwagom prowadzącego będziesz mógł się zorientować się czy opanowałeś materiał w wystarczającym stopniu. Przede wszystkim powinieneś jednak sam próbować ocenić swoje postępy. W tej ocenie mogą Ci pomóc zamieszczone poniżej kryteria.

### Wskazówki ułatwiające samokontrolę postępów

Po przestudiowaniu każdego z rozdziałów, modułów powinieneś sprawdzić czy udało Ci się osiągnąć podane poniżej wyniki uczenia się. Umiejętność wykonania czynności zapisanych na tej liście świadczy o Twoich postępach w nauce i zdobytej wiedzy.

- Po pierwsze sprawdź czy zapamiętałeś wiadomości z danego rozdziału. W tym celu wypowiedz na głos lub napisz na kartce definicje podstawowych pojęć, na przykład masy, pędu, siły. Czy potrafisz również napisać odpowiednie wzory?
- Teraz sprawdź czy rozumiesz zapamiętany materiał i czy potrafisz się nim posługiwać. Spróbuj najpierw rozwiązać samodzielnie (powtórzyć) przykłady rozwiązane w tekście. Określ wielkości szukane w zadaniu i wskaż na informacje niezbędne do jego rozwiązania (dane). Czy potrafisz podać metodę rozwiązania zadania wraz z odpowiednimi wzorami? Czy wiesz jakie warunki i założenia leżą u podstaw tych zależności?
- Spróbuj wypowiedzieć definicje odpowiednich wielkości fizycznych i praw fizyki określających zjawiska w rozwiązywanym przykładzie. Czy potrafisz to zrobić własnymi słowami?
- Czy poznane zależności i pojęcia wiążą się z rzeczywistymi sytuacjami życiowymi; postaraj się podać przykłady.
- Spróbuj przekształcić podane wzory tak aby uzyskać postać umożliwiającą wyliczenie innych wielkości występujących w zadaniu. Ponownie spróbuj wskazać wielkości dane i szukane.

- Spróbuj sam ułożyć zadanie lub sformułować pytania problemowe, pozwalające przećwiczyć rozwiązywanie problemów podobnych do tych w przykładach. Jeżeli określisz szczegółowe warunki i założenia niezbędne do rozwiązania zdania i potrafisz podać jakie dane są do tego niezbędne to dowiodłeś, że potrafisz analizować zjawiska przyrodnicze, wyciągać wnioski i dokonywać uogólnienia (syntezy).
- Czy potrafisz powiedzieć jak można uzyskać te niezbędne dane?
- Może zaprojektujesz doświadczenia (podaś sposób pomiaru), które z jednej strony pozwolą na otrzymanie potrzebnych danych, a z drugiej pozwolą niezależnie zmierzyć wielkość szukaną co umożliwi zweryfikowanie modelu teoretycznego?
- Zastanów się czy analizując przykład, ćwiczenie, potrafisz ocenić stopień zgodności z rzeczywistością przyjętych założeń i uproszczeń. Czy taka idealizacja warunków jest konieczna? Które z przyjętych założeń i uproszczeń uważasz za najbardziej istotne i dlaczego? Może potrafisz zaproponować bardziej dokładne metody obliczania, wyznaczenia, wielkości fizycznych występujących w przykładach.

Jeżeli potrafisz wykonać powyższe czynności to stajesz się ekspertem i możesz być pewny swojej wiedzy.

# MODUŁ I

# 1 Wiadomości wstępne

## 1.1 Wielkości fizyczne, jednostki

Prawa fizyki wyrażają związki między różnymi wielkościami fizycznymi. Prawa te sformułowane są w postaci równań matematycznych wyrażających ściśle *ilościowe* relacje między tymi wielkościami, a to wiąże się zawsze z pomiarami określającymi liczbowo stosunek danej wielkości do przyjętej *jednostki*.

Wiele z wielkości fizycznych jest współzależnych. Na przykład prędkość jest długością podzieloną przez czas, gęstość masą podzieloną przez objętość itd. Dlatego z pośród wszystkich wielkości fizycznych wybieramy pewną ilość tak zwanych *wielkości podstawowych*, za pomocą których wyrażamy wszystkie pozostałe wielkości nazywane *wielkościami pochodnymi*. Z tym podziałem związany jest również wybór jednostek. *Jednostki podstawowe* wielkości podstawowych są wybierane (ustalane), a *jednostki pochodne* definiuje się za pomocą jednostek podstawowych.


Aktualnie obowiązującym w Polsce układem jednostek jest układ SI (Systeme International d'Unites). Układ SI ma siedem jednostek podstawowych i dwie uzupełniające niezbędne w sformułowaniach praw fizyki. Wielkości podstawowe i ich jednostki są zestawione w tabeli 1.1 poniżej.


Tab. 1.1. Wielkości podstawowe (1-7), uzupełniające (8,9) i ich jednostki w układzie SI.

	<b>Wielkość</b>	<b>Jednostka</b>	<b>Symbol jednostki</b>
1.	Długość	metr	m
2.	Masa	kilogram	kg
3.	Czas	sekunda	s
4.	Ilość materii (substancji)	mol	mol
5.	Natężenie prądu elektrycznego	amper	A
6.	Temperatura termodynamiczna	kelwin	K
7.	Światłość	kandela	cd
8.	Kąt płaski	radian	rad
9.	Kąt bryłowy	steradian	sr

Definicje jednostek podstawowych są związane albo ze wzorcami jednostek albo z pomiarem. Przykładem jednostki związanej ze wzorcem jest masa. Obecnie światowym wzorcem kilograma (kg) jest walec platynowo-irydowy przechowywany w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag w Sevres (Francja). Natomiast przykładem jednostki związanej z pomiarem jest długość. Metr (m) definiujemy jako długość drogi przebytej w próżni przez światło w czasie  $1/299792458$  s.



Oprócz jednostek w fizyce posługujemy się pojęciem *wymiaru jednostki*  danej wielkości fizycznej. Wymiarem jednostki podstawowej jest po prostu ona sama. Natomiast dla jednostek pochodnych wymiar jest kombinacją jednostek podstawowych (w odpowiednich potęgach). Na przykład jednostka siły ma wymiar  $\text{kgm/s}^2$  wynikający ze wzoru  $F = ma$ . Niektóre jednostki pochodne mają swoje nazwy tak jak jednostka siły - niuton.

Wreszcie, oprócz jednostek podstawowych i pochodnych posługujemy się także *jednostkami wtórnymi* , które są ich wielokrotnościami. Wyraża się je bardzo prosto poprzez dodanie odpowiedniego przedrostka określającego odpowiednią potęgę dziesięciu, która jest mnożnikiem dla jednostki (patrz tabela 1.2).

Tab. 1.2. Wybrane przedrostki jednostek wtórnych.

<b>Przedrostek</b>	<b>Skrót</b>	<b>Mnożnik</b>
tera	T	$10^{12}$
giga	G	$10^9$
mega	M	$10^6$
kilo	k	$10^3$
centy	c	$10^{-2}$
mili	m	$10^{-3}$
mikro	$\mu$	$10^{-6}$
nano	n	$10^{-9}$
piko	p	$10^{-12}$
femto	f	$10^{-15}$

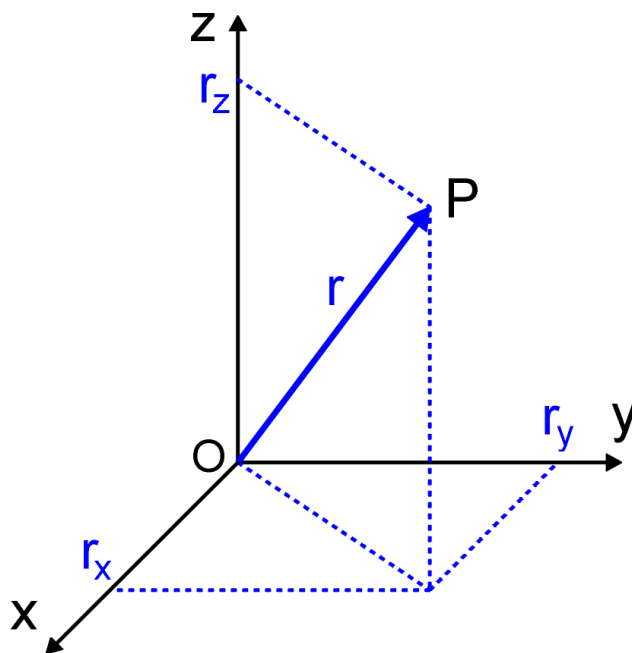
## 1.2 Wektory

W fizyce mamy do czynienia zarówno z wielkościami skalarnymi jak i wielkościami wektorowymi. Wielkości skalarne takie jak np. masa, objętość, czas, ładunek, temperatura, praca, mają jedynie wartość. Natomiast wielkości wektorowe np. prędkość, przyspieszenie, siła, pęd, natężenie pola, posiadają wartość, kierunek, zwrot i punkt przyłożenia. Poniżej przypominamy podstawowe działania na wektorach.

### 1.2.1 Rozkładanie wektorów na składowe

W działaniach na wektorach operuje się składowymi tych wektorów wyznaczonymi w wybranym układzie odniesienia.

Składowe wektora wyznaczamy umieszczając początek wektora w początku układu współrzędnych i rzutując koniec wektora na poszczególne osie wybranego układu współrzędnych.



Rys. 1.1. Wektor  $r$  i jego składowe  $r_x$ ,  $r_y$ ,  $r_z$  w pewnym układzie współrzędnych

### 1.2.2 Suma wektorów

W wybranym *układzie współrzędnych* wektor jest definiowany przez podanie jego współrzędnych np.

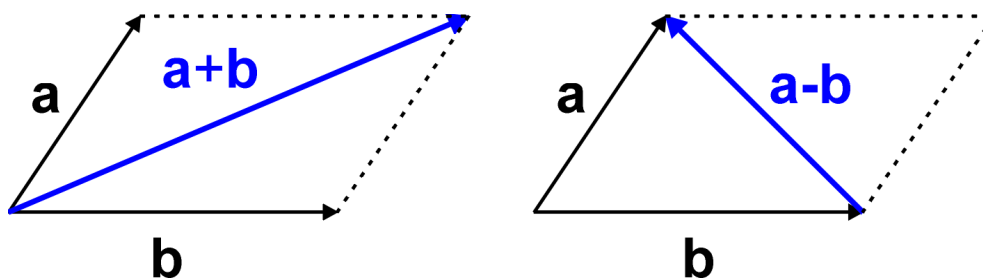
$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Zwróćmy w tym miejscu uwagę na przyjętą konwencję. Wszystkie wektory wyróżnione są w tekście **czcionką wytłuszczoną**.

Sumą dwóch wektorów jest nowy wektor o współrzędnych

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

Geometrycznie jest to przekątna równoległoboku zbudowanego na tych wektorach. Różnicę dwóch wektorów przedstawia druga przekątna (rysunek poniżej).



Rys. 1.2. Suma i różnica wektorów

### 1.2.3 Iloczyn skalarny

Iloczyn skalarny dwóch wektorów  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  jest liczbą (skalarem) równą iloczynowi wartości bezwzględnych (długości) tych wektorów pomnożony przez cosinus kąta między nimi

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \alpha = ab \cos \alpha$$

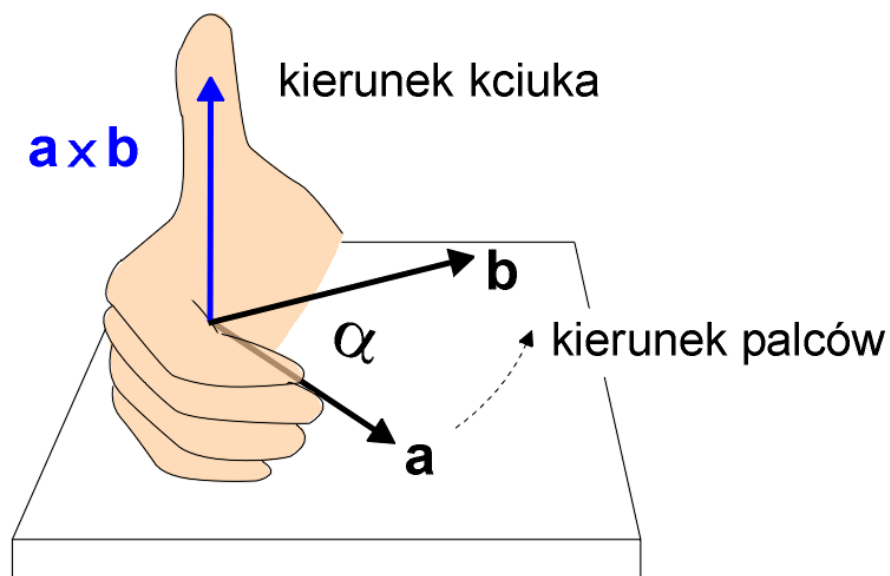
Iloczyn skalarny jest często stosowany do opisu wielkości fizycznych. Przykładem wielkości fizycznej, którą można przedstawić jako iloczyn skalarny dwóch wielkości wektorowych jest praca. Praca jest iloczynem skalarnym siły i przesunięcia.

### 1.2.4 Iloczyn wektorowy

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  jest nowym wektorem  $\mathbf{c}$ , którego długość (wartość bezwzględna) jest równa iloczynowi długości tych wektorów i sinusa kąta pomiędzy nimi

$$c = ab \sin \alpha$$

Wektor  $\mathbf{c}$  jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$ . Zwrot jego jest określony regułą śruby prawoskrętnej lub regułą prawej ręki. Jeżeli palce prawej ręki zginają się w kierunku obrotu wektora  $\mathbf{a}$  do wektora  $\mathbf{b}$  (po mniejszym łuku) to kciuk wskazuje kierunek wektora  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  tak jak na rysunku poniżej



Rys. 1.3. Iloczyn wektorowy

## 2 Ruch jednowymiarowy


### 2.1 Wstęp

Dział Fizyki zajmujący się opisem *ruchu* ciał nazywamy *kinematyką*.



#### Definicja

*Pod pojęciem ruchu rozumiemy zmiany wzajemnego położenia jednych ciał względem drugich wraz z upływem czasu.*

Położenie określamy względem *układu odniesienia* tzn. wybranego ciała lub układu ciał. Zwróćmy uwagę na to, że ruch tego samego ciała widziany z różnych układów odniesienia może być różny. W szczególności można wybrać taki układ odniesienia, w którym ciało nie porusza się. Oznacza to, że ruch jest *pojęciem względnym*. Ponadto, w naszych rozważaniach będziemy posługiwać się pojęciem *punktu materialnego* .



#### Definicja

*Punkty materialne to obiekty obdarzone masą, których rozmiary (objętość) możemy zaniedbać.*

Rzeczywiste ciała mają zawsze skończoną objętość, ale dopóki rozpatrujemy ich ruch postępowy (ciała nie obracają się, ani nie wykonują drgań) to z dobrym przybliżeniem możemy je traktować jako punkty materialne. To przybliżenie może być z powodzeniem stosowane do opisu ruchu obiektów o różnej wielkości, zarówno "małych" cząsteczek, jak i "dużych" planet.

### 2.2 Prędkość



#### Definicja

*Prędkość definiujemy jako zmianę położenia ciała w jednostce czasu.*

#### 2.2.1 Prędkość stała

Jeżeli wskazania prędkościomierza samochodu nie zmieniają się to oznacza, że samochód porusza się ze stałą prędkością  $v$ , i jeżeli w pewnej chwili  $t_0$  znajdował się w położeniu  $x_0$  to po czasie  $t$  znajdzie się w położeniu  $x$

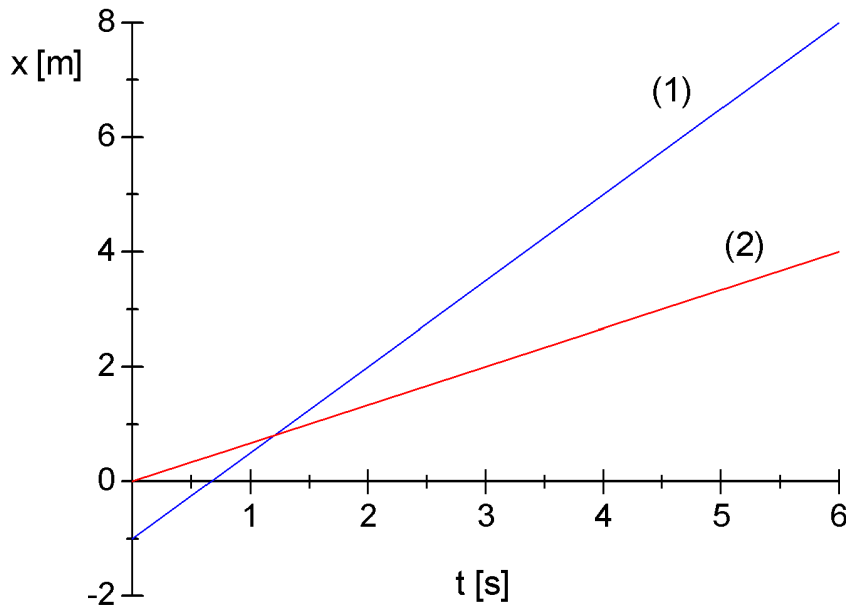
$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

skąd

$$v = \frac{x - x_0}{t - t_0} \quad (2.1)$$

Zależność między położeniem  $x$  i czasem  $t$  pokazana jest na rysunku poniżej dla dwóch ciał (np. pojazdów). Jak wynika ze wzoru (2.1) nachylenie wykresu  $x(t)$  przedstawia prędkość

danego ciała. Różne *nachylenia wykresów*  $x(t)$  odpowiadają więc różnym prędkościom. Prędkość  $\mathbf{v}$  (wektor) może być dodatnia albo ujemna; jej znak wskazuje kierunek ruchu. Wektor  $\mathbf{v}$  dodatni - ruch w kierunku rosnących  $x$ , ujemny to ruch w kierunku malejących  $x$ .



Rys. 2.1. Zależność położenia od czasu dla ciała poruszającego się ze stałą prędkością



### Ćwiczenie 2.1

Odczytaj z wykresu i zanotuj w tabeli poniżej położenia początkowe  $x_0$  obu ciał oraz ich prędkości. Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

ciało	$x_0$ [m]	$v$ [m/s]
1		
2		

### 2.2.2 Prędkość chwilowa

Gdy samochód przyspiesza lub hamuje to wskazania prędkościomierza zmieniają się i nie możemy mówić o "jednej" stałej prędkości. Prędkość zmienia się i w każdej chwili jest inna. Nie można wtedy stosować wzoru (2.1) chyba, że ograniczymy się do bardzo małych wartości  $x - x_0$  ( $\Delta x$ ) czyli również bardzo małego przedziału czasu  $\Delta t = t - t_0$  (chwili). *Prędkość chwilową*  $\mathbf{v}$  w punkcie  $x$  otrzymamy gdy  $\Delta t$  dąży do zera

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.2)$$

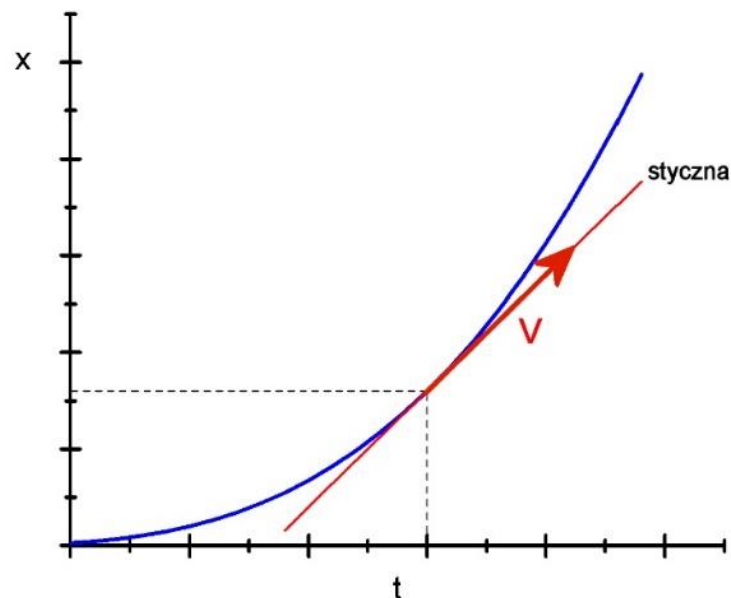
Tak definiuje się *pierwszą pochodną* więc

**Definicja**

*Prędkość chwilowa jest pochodną drogi względem czasu.*


$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \quad (2.3)$$

*Nachylenie krzywej  $x(t)$  ponownie przedstawia prędkość  $v$ , a znajdujemy je (zgodnie z definicją pochodnej) jako nachylenie stycznej do wykresu  $x(t)$ , w danym punkcie tj. dla danej chwili  $t$  (rysunek poniżej).*



Rys. 2.2. Nachylenie krzywej  $x(t)$  jest prędkością chwilową

### 2.2.3 Prędkość średnia

Często określenie zależności  $x(t)$  nie jest możliwe, np. przy oszacowaniu czasu dojazdu do wybranej miejscowości nie jesteśmy w stanie przewidzieć wszystkich parametrów podróży wpływających na prędkość takich jak natężenie ruchu, konieczność ograniczenia prędkości w terenie zabudowanym itp. Posługujemy się wtedy pojęciem *prędkości średniej* . Prędkość średnia ciała w przedziale czasu  $t$  jest zdefiniowana jako

**Definicja**

$$\bar{v} = \frac{x - x_0}{t} \quad (2.4)$$

gdzie  $x - x_0$  jest odległością przebytą w czasie  $t$ .



### Ćwiczenie 2.2

Oblicz prędkość średnią samochodu, który przejeżdża odcinek  $x_1 = 20$  km z prędkością  $v_1 = 40$  km/h, a potem, przez następne  $x_2 = 20$  km, jedzie z prędkością  $v_2 = 80$  km/h. Wykonaj obliczenia i zapisz wynik poniżej.

Wskazówka: Oblicz całkowitą drogę przejechaną przez samochód i całkowity czas jazdy samochodu i skorzystaj z równania (2.4).

Prędkość średnia:

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Otrzymany wynik: 53.33 km/h jest różny od średniej arytmetycznej z prędkości  $v_1$  i  $v_2$ , która wynosi 60 km/h. Powodem jest to, że poszczególne wartości wchodzą w skład średniej matematycznej z różnymi *czynnikiemami wagowymi*. W naszym przykładzie obliczamy średnią względem czasu, więc skoro przedziały czasu, w których samochód jedzie z prędkościami  $v_1$  i  $v_2$  są różne to i udziały tych prędkości w średniej są też różne.



O średniej ważonej możesz przeczytać w *Dodatku 1*, na końcu modułu I.

Wartość średnia daje praktyczne wyniki. Zilustrujemy to jeszcze jednym ćwiczeniem.



### Ćwiczenie 2.3

Obliczmy drogę hamowania samochodu, który jedzie z prędkością 20 m/s (72 km/h). Czas hamowania wynosi 5 sekund, a prędkość samochodu maleje jednostajnie (stała siła hamowania). Spróbuj wykonać samodzielnie obliczenia korzystając z równania (2.4). Wykonaj obliczenia i zapisz wynik poniżej.

Wskazówka: Oblicz prędkość średnią, i następnie ze wzoru (2.4) drogę hamowania.

Droga hamowania:

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

## 2.3 Przyspieszenie





### Definicja

*Przyspieszeniem nazywamy tempo zmian prędkości.*


### 2.3.1 Przyspieszenie jednostajne

Jeżeli ciało przyspiesza lub hamuje i jego prędkość zmienia się jednostajnie z czasem to przyspieszenie  $a$  tego ciała jest stałe

$$a = \frac{v - v_0}{t} \quad (2.5)$$

Gdy prędkość rośnie ( $a > 0$ ) to ruch nazywamy *jednostajnie przyspieszonym* , a gdy prędkość maleje ( $a < 0$ ) to ruch określamy jako *jednostajnie opóźniony* .

### 2.3.2 Przyspieszenie chwilowe

Jeżeli przyspieszenie nie jest stałe, zmienia się z czasem, musimy wtedy ograniczyć się do pomiaru zmian prędkości  $\Delta v$  w bardzo krótkim czasie  $\Delta t$  (podobnie jak dla prędkości chwilowej). Wówczas *przyspieszenie chwilowe*  definiujemy jako pierwszą pochodną  $v$  względem  $t$ .



#### Definicja

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (2.6)$$

### 2.3.3 Ruch jednostajnie zmienny

Z ruchem jednostajnie zmiennym spotykamy się na co dzień, np. gdy obserwujemy swobodny spadek ciał w pobliżu powierzchni Ziemi. Jeżeli możemy zaniedbać opór powietrza (w porównaniu z ciężarem ciała) to każde ciało upuszczone swobodnie porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem równym  $9.81 \text{ m/s}^2$ .

Wyrażenie na prędkość ciała poruszającego się ze stałym przyspieszeniem możemy otrzymać wprost ze wzoru (2.5)

$$v = v_0 + at \quad (2.7)$$

Natomiast do policzenia położenia korzystamy ze wzoru (2.5) na prędkość średnią przekształconego do postaci

$$x = x_0 + \bar{v}t \quad (2.8)$$

Ponieważ w ruchu jednostajnie przyspieszonym prędkość rośnie jednostajnie od  $v_0$  do  $v$  więc prędkość średnia wynosi

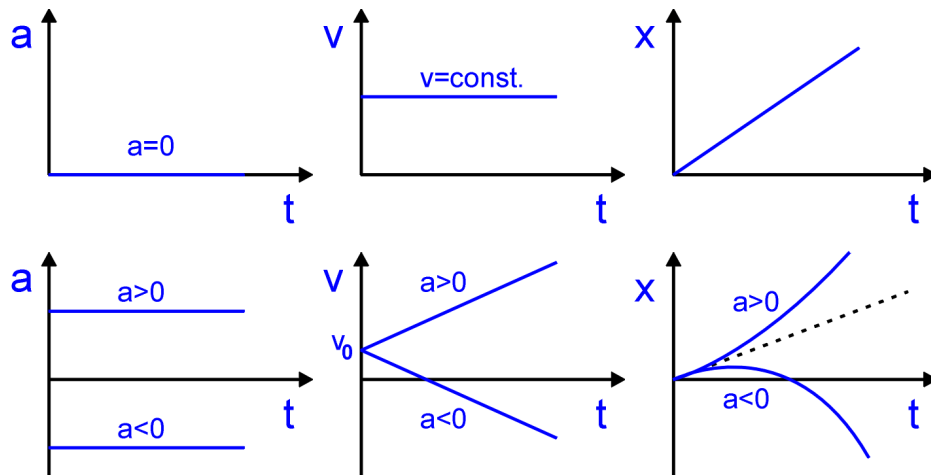
$$\bar{v} = \frac{(v_0 + v)}{2} \quad (2.9)$$

Łącząc powyższe trzy równania otrzymujemy

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (2.10)$$


Jako podsumowanie, pokazane jest graficzne przedstawienie ruchu prostoliniowego jednostajnego i jednostajnie zmiennego w postaci wykresów  $x(t)$ ,  $v(t)$  oraz  $a(t)$ .

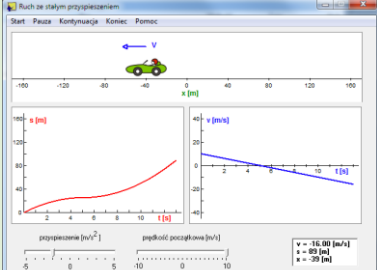




Rys. 2.3. Graficzna prezentacja ruchu prostoliniowego jednostajnego (wiersz górny) i jednostajnie zmiennego (wiersz dolny)

Możesz przebyta stałym zmienny” stronie





prześledzić prędkość, położenie i drogę przez ciało poruszające się ruchem ze przyspieszeniem korzystając z programu komputerowego „Ruch jednostajnie dostępny na stronie WWW autora i na Open AGH.

Rozważając ruch po linii prostej możemy operować liczbami, a nie wektorami bo mamy do czynienia z wektorami równoległymi. Jednak trzeba sobie przy opisie zjawisk (rozwiązywaniu zadań) uświadamiać, że w równaniach ruchu mamy do czynienia z wektorami. Prześledzimy to wykonując następujące ćwiczenie:



### Ćwiczenie 2.4

Dwa identyczne ciała rzucono pionowo do góry z prędkością początkową  $v_0$  w odstępie czasu  $\Delta t$  jedno po drugim. Na jakiej wysokości spotkają się te ciała?

Wskazówka: Do opisu położenia ciała (np. wysokość na jakiej się znajduje w danej chwili) posłuż się równaniem (2.10). Zauważ, że w rzucie pionowym ciało przebywa na tej samej wysokości dwa razy w dwóch różnych chwilach (pierwszy raz przy wznoszeniu, drugi przy opadaniu) więc trójmian kwadratowy (2.10) ma dwa rozwiązania  $t_1$  i  $t_2$ . Z treści zadania wynika, że  $t_1 - t_2 = \Delta t$ . Z tego warunku otrzymasz rozwiązanie. Zapisz je poniżej.

$h =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Pamiętanie o tym, że liczymy na wektorach jest bardzo istotne przy rozpatrywaniu ruchu w dwóch lub trzech wymiarach na przykład w ruchu na płaszczyźnie.

### 3 Ruch na płaszczyźnie

Ruch w dwóch wymiarach będziemy opisywać w układzie współrzędnych  $x$  i  $y$ . Na przykład  $y$  - wysokość,  $x$  - odległość w kierunku poziomym. Pokażemy, że taki ruch można traktować jak dwa niezależne ruchy jednowymiarowe.

#### 3.1 Przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie

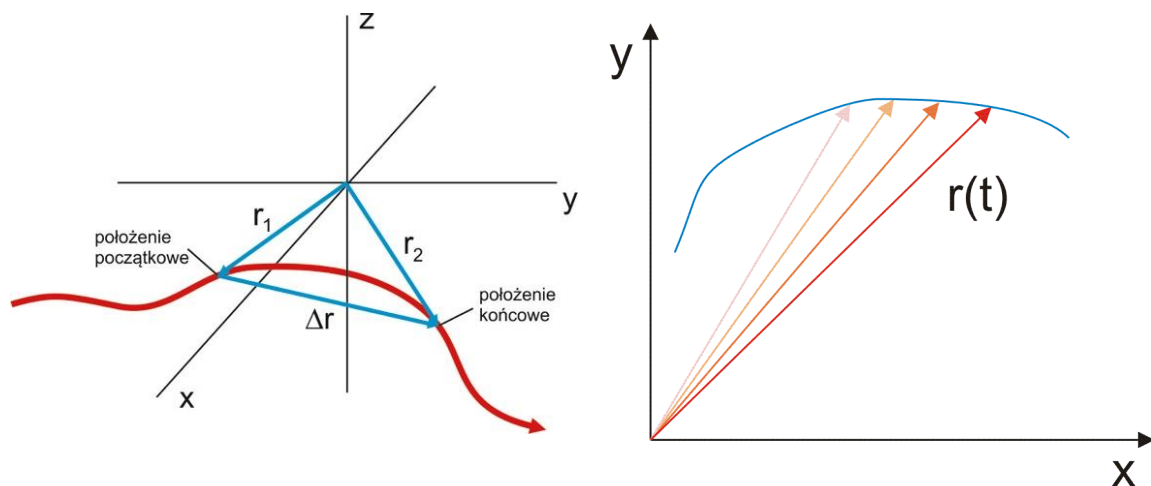
Położenie punktu w chwili  $t$  przedstawia wektor  $\mathbf{r}(t)$ ; prędkość wektor  $\mathbf{v}(t)$ , przyspieszenie wektor  $\mathbf{a}(t)$ . Wektory  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$ ,  $\mathbf{a}(t)$  są wzajemnie zależne od siebie i dają się przedstawić za pomocą *wersorów*  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  czyli wektorów jednostkowej długości zorientowanych odpowiednio wzdłuż osi  $x$  i  $y$

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dx}{dt} + \mathbf{j} \frac{dy}{dt} = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y \quad (3.1)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dv_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{dv_y}{dt} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y$$

Położenie punktu określić można podając wektor  $\mathbf{r}$  lub, dla wybranego układu odniesienia, poprzez podanie współrzędnych tego wektora np.  $x$ ,  $y$ . Oczywiście wektor  $\mathbf{r}$  i jego współrzędne zmieniają się z czasem (np. tak jak na rysunku poniżej) więc trzeba podać zależności czasowe  $\mathbf{r}(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$ .



Rys. 3.1 Zmiany wektora położenia z czasem

Warto w tym miejscu również zapamiętać, że *wektor prędkości jest zawsze styczny do toru poruszającego się punktu*. Punkty płaszczyzny, przez które przechodzi poruszający się punkt materialny tworzą krzywą, którą nazywamy *torem ruchu*.

Jako przykład rozpatrzmy ruchu jednostajnie zmienny na płaszczyźnie. Ponieważ ruch odbywa się ze stałym przyspieszeniem tzn. nie zmieniają się ani kierunek ani wartość przyspieszenia to nie zmieniają się też składowe przyspieszenia. Spróbujmy najpierw napisać równania wektorowe dla tego ruchu. Mają one następującą postać

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \text{const.} \\
 \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \\
 \mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{\mathbf{a}t^2}{2}
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Przypuśćmy, że chcemy znaleźć położenie ciała (wektor  $\mathbf{r}$ ) po czasie  $t$ . W tym celu, jak widać z równań (3.2) trzeba wyznaczyć (znaleźć wartość, kierunek, zwrot) i dodać do siebie geometrycznie trzy wektory:  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{v}_0t$  oraz  $1/2\mathbf{a}t^2$ . Zadanie możemy jednak znacznie uprościć korzystając z tego, że równania wektorowe (3.2) są równoważne równaniom w postaci skalarnej (zestawionym w tabeli 3.1 poniżej) i zamiast dodawania geometrycznego wektorów możemy po prostu dodawać liczby. Znalezienie wektora  $\mathbf{r}$  sprowadza się teraz do znalezienia jego składowych.

Tabela 3.1 Ruch jednostajnie zmienny na płaszczyźnie

Równania skalarne opisujące ruch wzdłuż osi $x$	Równania skalarne opisujące ruch wzdłuż osi $y$
$a_x = \text{const.}$	$a_y = \text{const.}$
$v_x = v_{x0} + a_x t$	$v_y = v_{y0} + a_y t$
$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{a_x t^2}{2}$	$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{a_y t^2}{2}$

Przykładem na którym prześledzimy ruch krzywoliniowy ze stałym przyspieszeniem jest rzut ukośny.

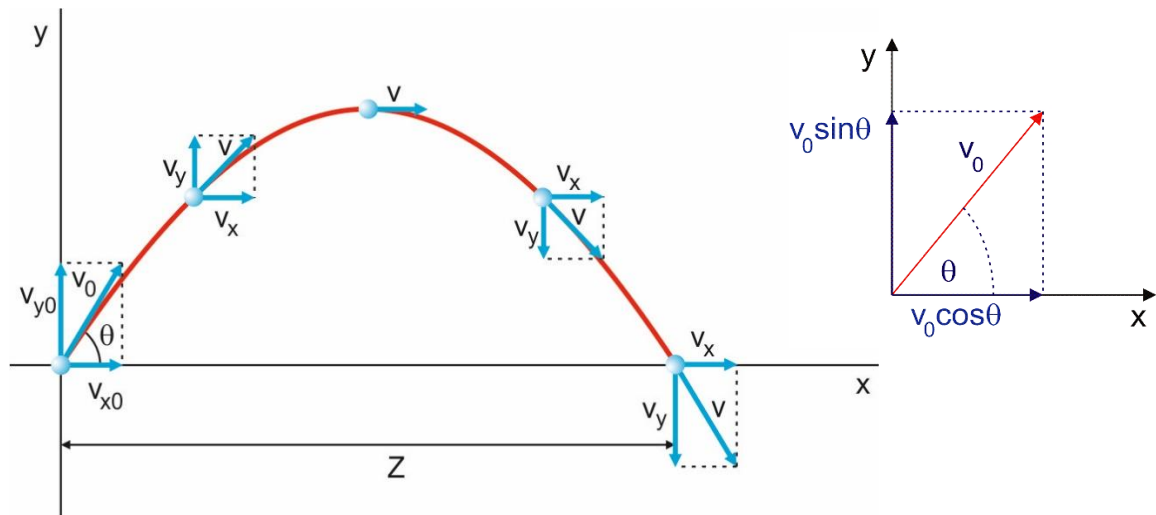
### 3.2 Rzut ukośny

Piłka kopnięta przez piłkarza lub rzucona przez koszykarza, oszczep lub dysk rzucony przez atletę czy wreszcie pocisk wystrzelony z działa poruszają się po torze krzywoliniowym. Naszym celem jest znalezienie prędkości i położenia rzuconego ciała w dowolnej chwili, opisanie toru ruchu i wyznaczenie zasięgu rzutu  $z$ .

Jeżeli pominiemy opory powietrza to ruch odbywa się ze stałym przyspieszeniem grawitacyjnym  $\mathbf{g}$   $[0, -g]$ ; możemy więc zastosować równania z tabeli (3.1). Ponieważ przyspieszenie jest skierowane "w dół" wygodnie jest wybrać układ współrzędnych tak, że  $x$  będzie współrzędną poziomą, a  $y$  pionową. Ponadto, przyjmijmy, że początek układu współrzędnych pokrywa się z punktem, z którego wylatuje ciało tzn.  $r_0 = 0$  oraz, że prędkość w chwili początkowej  $t = 0$  jest równa  $v_0$  i tworzy kąt  $\theta$  z dodatnim kierunkiem osi  $x$  (rysunek poniżej).

Składowe prędkości początkowej (zgodnie z rysunkiem) wynoszą odpowiednio

$$\begin{aligned}
 v_{x0} &= v_0 \cos \theta \\
 v_{y0} &= v_0 \sin \theta
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$



Rys. 3.2. Rzut ukośny i składowe prędkości początkowej

Stąd dla składowej  $x$  (poziomej) prędkości otrzymujemy (porównaj z tabelą (3.1))

$$v_x = v_{x0} + g_x t \quad (3.4)$$

Ponieważ  $g_x = 0$  (przyspieszenie jest skierowane "w dół") więc

$$v_x = v_0 \cos \theta \quad (3.5)$$

Składowa pozioma prędkości jest stała, ruch w kierunku  $x$  jest jednostajny. Natomiast dla składowej pionowej  $y$  otrzymujemy

$$v_y = v_{y0} + g_y t \quad (3.6)$$

Ponieważ  $g_y = -g$  (przyspieszenie jest skierowane "w dół") więc

$$v_y = v_0 \sin \theta - g t \quad (3.7)$$

Wartość wektora prędkości w dowolnej chwili wynosi

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (3.8)$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t \sin \theta + g^2 t^2}$$

Teraz obliczamy położenie ciała w dowolnej chwili  $t$ . Ponownie korzystamy z równań z tabeli (3.1) i otrzymujemy odpowiednio

$$x = (v_0 \cos \theta) t$$

$$y = (v_0 \sin \theta) t - \frac{g t^2}{2} \quad (3.9)$$

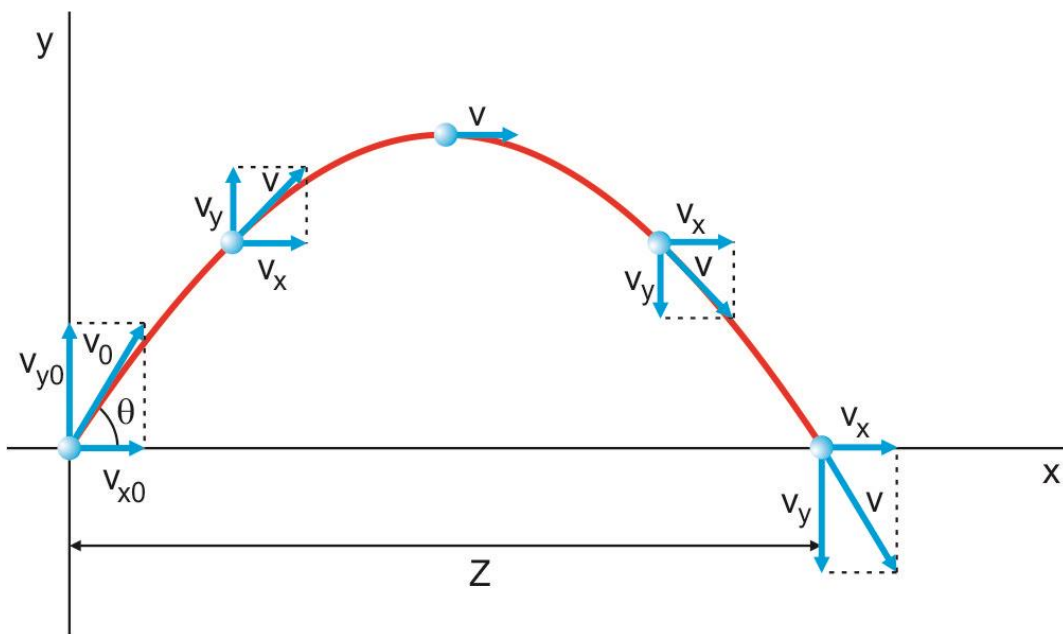
Wartość wektora położenia w dowolnej chwili obliczamy z zależności

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.10)$$

Sprawdźmy teraz po jakim torze porusza się nasz obiekt tzn. znajdziemy równanie krzywej  $y(x)$ . Równania (3.9) przedstawiają zależność  $x(t)$  oraz  $y(t)$ . Równanie  $y(x)$  możemy więc obliczyć eliminując czas  $t$  z tych równań. Z zależności  $x(t)$  obliczamy  $t$ , a następnie wstawiamy do równania  $y(t)$ , które przyjmuje postać

$$y = (tg\theta)x - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta)^2}x^2 \quad (3.11)$$

Otrzymaliśmy równanie paraboli (skierowanej ramionami w dół) i taki kształt ma tor ruchu  $y(x)$  pokazany na rysunku poniżej.



Rys. 3.3. Parabola rzutu ukośnego



### Ćwiczenie 3.1

Korzystając z równania (3.11) spróbuj znaleźć zasięg rzutu  $z$  oraz określić kąt wyrzutu  $\theta$ , przy którym zasięg jest maksymalny.

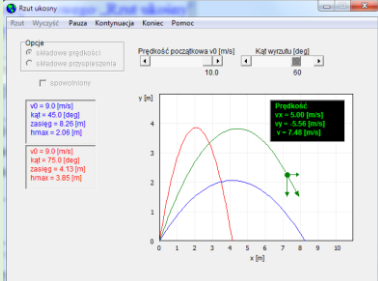
Wskazówka: Rozwiąż równanie (3.11) podstawiając  $y = 0$ . Otrzymasz dwa miejsca, w których parabola lotu przecina oś  $x$ . Pierwsze, odpowiada punktowi z którego wylatuje ciało, drugie poszukiwanemu zasięgowi rzutu. Wynik zapisz poniżej.


Zasięg rzutu:

Zasięg maksymalny otrzymujemy dla kąta  $\theta =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Możesz prześledzić jak tor w rzucie ukośnym zależy od prędkości początkowej i kąta wyrzutu korzystając z programu komputerowego „Rzut ukośny” dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.

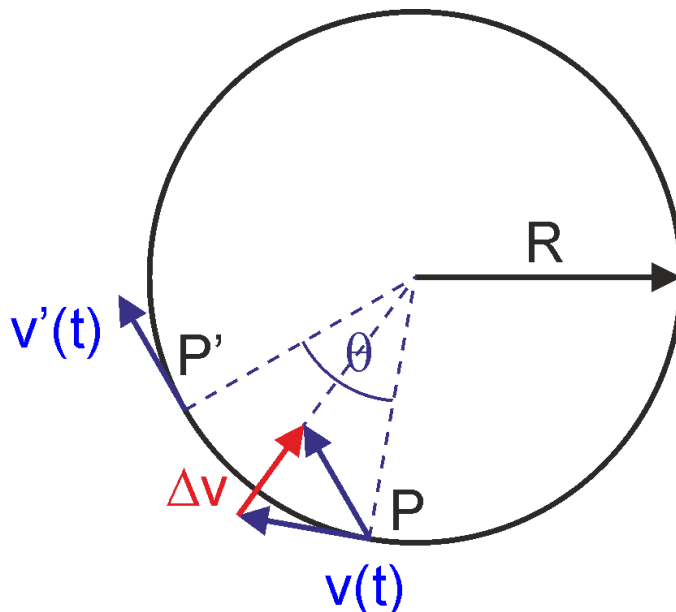


Gdy mówimy o ruchu prostoliniowym to ewentualne przyspieszenie ciała związane jest ze zmianą *wartości prędkości* ale nie ze zmianą jej *kierunku* czy *zwrotu*. Dlatego mówimy wtedy o *przyspieszeniu stycznym* .

W omawianym rzucie ukośnym zmienia się zarówno *wartości prędkości* jak i jej *kierunek* i *zwrot*. Zanim jednak omówimy ten przypadek zaczniemy od rozpatrzenia prostszej sytuacji gdy wartość prędkości się nie zmienia, a zmienia się jej kierunek i zwrot. Zajmiemy się *ruchem jednostajnym po okręgu*.

### 3.3 Ruch jednostajny po okręgu

Rozważać będziemy ciało poruszające się ze stałą prędkością po okręgu o promieniu  $R$  pokazane na rysunku poniżej. Punkt materialny poruszający się jednostajnie po okręgu znajduje się w punkcie  $P$  w chwili  $t$ , a w punkcie  $P'$  w chwili  $t + \Delta t$ . Wektory prędkości  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}'$  mają jednakowe długości ale różnią się kierunkiem; pamiętajmy, że wektor prędkości jest zawsze styczny do toru. Chcąc znaleźć przyspieszenie musimy wyznaczyć różnicę prędkości  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{v}'$ .



Rys. 3.4. Ruch jednostajny po okręgu

W tym celu przerysowujemy wektor  $\mathbf{v}'$  w punkcie  $P$  i wyznaczamy różnicę  $\Delta\mathbf{v}$ . Zauważmy, że kąt pomiędzy wektorami  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{v}'$  jest równy kątowi  $\theta$  więc korzystając z podobieństwa trójkątów możemy zapisać równość

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{l}{r} \quad (3.12)$$

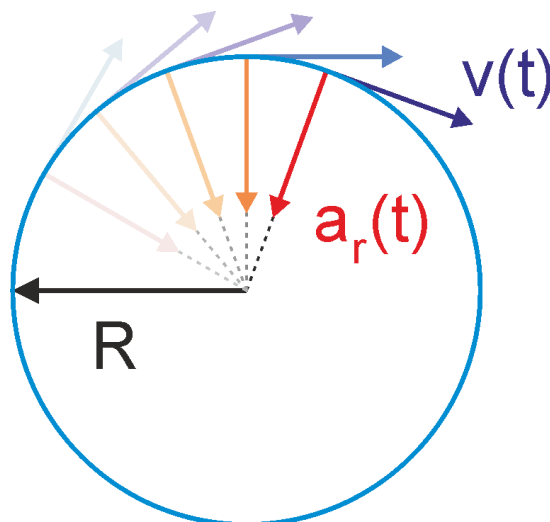
gdzie  $l$  jest długością odcinka  $PP'$ , a dla małych wartości  $l$  długością łuku  $PP'$ . Ponieważ  $l = v\Delta t$  więc

$$\Delta v = \frac{v^2 \Delta t}{r} \quad (3.13)$$

Znając już  $\Delta v$  możemy obliczyć przyspieszenie

$$a_n = a_r = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} \quad (3.14)$$

Jak widać na rysunku 3.4, wektor  $\Delta\mathbf{v}$  jest *prostopadły do toru* to znaczy pokrywa się z kierunkiem promienia i jest zwrócony do środka okręgu. Oznacza to, że i wektor przyspieszenia ma taki sam kierunek i zwrot (rysunek-animacja 3.5). W ruchu po okręgu przyspieszenie to nazywamy *przyspieszeniem dośrodkowym*  $\mathbf{a}_n$  (jest zwrócone do środka okręgu), a dla ruchu po dowolnej krzywej *przyspieszeniem normalnym*  $a_n$  (jest prostopadłe do toru) lub *radialnym*  $a_r$  (jest skierowane wzdłuż promienia). Przyspieszenie normalne jest związane ze zmianą kierunku prędkości, a przyspieszenie styczne ze zmianą jej wartości.



Rys. 3.5. Prędkość i przyspieszenie w ruchu jednostajny po okręgu

Przyspieszenie dośrodkowe często wyraża się poprzez *okres*  $T$  czyli czas, w którym punkt materialny wykonuje pełen obieg okręgu. Ponieważ

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad (3.15)$$

więc

$$a_r = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad (3.16)$$



### Ćwiczenie 3.2

Korzystając z powyższego wyrażenia spróbuj obliczyć jakiego przyspieszenia, wynikającego z obrotu Ziemi, doznaje ciało będące na równiku? Załóż, że Ziemia jest kulą o promieniu  $R_Z = 6370$  km. Jak duże jest to przyspieszenie w porównaniu do przyspieszenia grawitacyjnego  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>?

$a_R =$

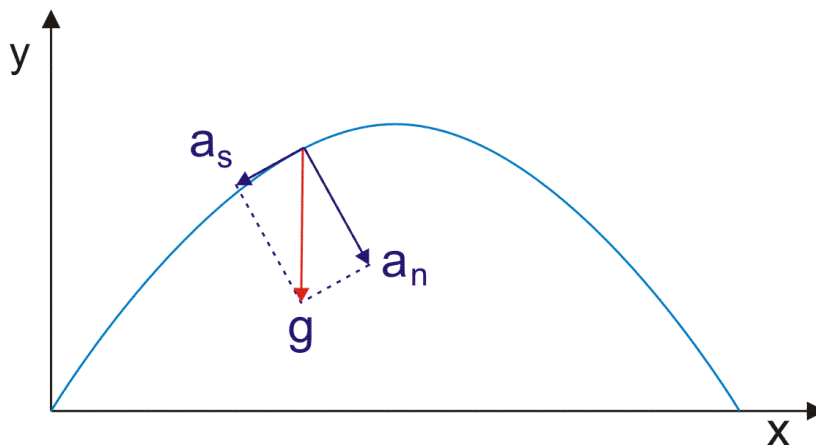
Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Na zakończenie rozważań dotyczących ruchu na płaszczyźnie jeszcze raz zajmiemy się rzutem ukośnym jako przykładem ruchu krzywoliniowego.

### 3.4 Ruch krzywoliniowy

Na zakończenie prześledźmy przykład, w którym zmieniają się i *wartość* i *kierunek* prędkości. Całkowite przyspieszenie w ruchu krzywoliniowym jest sumą przyspieszenia *stycznego*  $a_s$  i prostopadłego do niego *przyspieszenia normalnego*  $a_n$ .

Ponownie rozpatrzmy rzut ukośny. W tym ruchu *przyspieszenie grawitacyjne*  $g$  jest odpowiedzialne zarówno za zmianę *wartości* prędkości i jej *kierunku* tak jak przedstawiono na rysunku poniżej.



Rys. 3.6. Przyspieszenie całkowite  $g$ , styczne  $a_s$  i dośrodkowe  $a_n$  w rzucie ukośnym



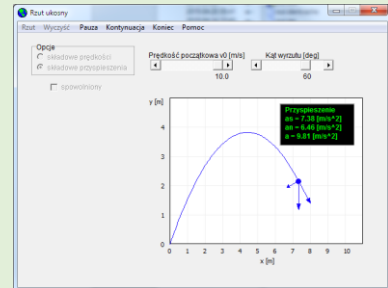


### Ćwiczenie 3.3

Spróbuj pokazać, że tak jest w każdym punkcie toru i dodatkowo narysuj wektory przyspieszenia całkowitego, stycznego i dośrodkowego w innym dowolnym punkcie toru na rysunku 3.6.



Możesz prześledzić jak w rzucie ukośnym zmienia się przyspieszenie i jego składowe:  $a_n$  (składowa normalna do toru, odpowiedzialna za zmianę kierunku prędkości) oraz  $a_s$  (składowa styczna związana ze zmianą wartości prędkości). korzystając z programu komputerowego „Rzut ukośny” dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.



Teraz obliczymy obie składowe przyspieszenia. Przyspieszenie styczne obliczamy na podstawie zależności  $a_s = dv/dt$  (obliczamy zmianę wartości prędkości) i wyrażenia na prędkość w rzucie ukośnym  $v = \sqrt{v_0^2 - 2v_0gt \sin \theta + g^2t^2}$  (równanie (3.8))

$$a_s = \frac{gt - v_0 \sin \theta}{\sqrt{v_0^2 - 2v_0gt \sin \theta + g^2t^2}} g \quad (3.17)$$

Natomiast przyspieszenie normalne możemy obliczyć korzystając z zależności  $a_r = \sqrt{g^2 - a_s^2}$  (rysunek 3.6)

Można oczywiście skorzystać z równania (3.14)  $a = v^2/R$  ale trzeba umieć obliczyć promień krzywizny  $R$  w każdym punkcie toru.



Więcej o przyspieszeniu stycznym i normalnym (w ruch przyspieszony po okręgu) możesz przeczytać w **Dodatku 2**, na końcu modułu I.

## 4 Podstawy dynamiki

### 4.1 Wstęp

Dotychczas zajmowaliśmy się wyłącznie opisem ruchu (za pomocą wektorów  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$ , oraz  $\mathbf{a}$ ). Były to rozważania geometryczne. Teraz omówimy przyczyny ruchu, zajmiemy się *dynamiką*. Nasze rozważania ograniczymy do przypadku ciał poruszających się z małymi (w porównaniu z prędkością światła  $c$ ) prędkościami tzn. zajmujemy się *mechaniką klasyczną*.

Żeby móc przewidzieć jaki będzie ruch ciała wywołany siłą na nie działającą trzeba wiedzieć jakiego rodzaju jest to siła i skąd się bierze. Dlatego rozpoczniemy nasze rozważania od poznania podstawowych oddziaływań oraz od zdefiniowania masy, pędu i wprowadzenia pojęcia siły  $\mathbf{F}$ . Następnie poszukamy praw rządzących oddziaływaniami, a w dalszych częściach zajmiemy się poszczególnymi oddziaływaniami występującymi w przyrodzie.

#### 4.1.1 Oddziaływania podstawowe

Według naszej dotychczasowej wiedzy istnieją tylko *cztery podstawowe oddziaływania* (siły), z których wynikają wszystkie siły i oddziaływania zaobserwowane we Wszechświecie:

- *Oddziaływanie grawitacyjne* - siła grawitacyjna działa na wszystkie masy (jest siłą powszechną) i pochodzi od mas; ma długi zasięg i najmniejsze względne natężenie;
- *Oddziaływanie elektromagnetyczne* - siła elektromagnetyczna działa na ładunki i prądy i jej źródłem są ładunki i prądy; ma długi zasięg. Siły międzyatomowe mają charakter elektromagnetyczny ponieważ atomy zawierają naładowane elektrony i protony. Większość sił z jakimi spotykamy się na co dzień np. tarcie, siła sprężystości jest wynikiem oddziaływania atomów, są to więc siły elektromagnetyczne. Oddziaływanie elektromagnetyczne ma wielokrotnie większe natężenie od grawitacyjnego;
- *Oddziaływanie jądrowe (silne)* - siła utrzymująca w całości jądra atomowe pomimo odpychania między protonami (ładunki dodatnie), ma bardzo krótki zasięg i największe względne natężenie;
- *Oddziaływanie słabe* - temu oddziaływaniu podlegają wszystkie cząstki elementarne, w szczególności oddziaływanie to odpowiada za rozpady cząstek elementarnych.

W tabeli poniżej zestawione są cztery oddziaływania podstawowe.

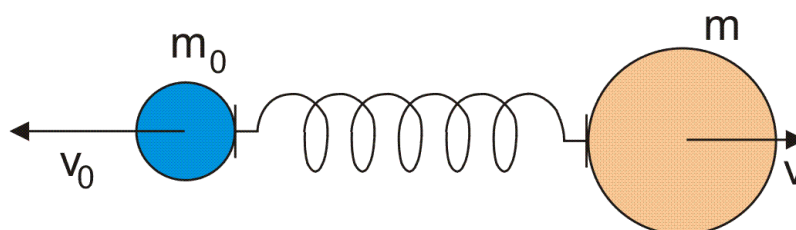
Tab. 4.1. Oddziaływania podstawowe

Oddziaływanie	Źródło oddziaływania	Względne natężenie	Zasięg
Grawitacyjne	Masa	około $10^{-38}$	Długi
Elektromagnetyczne	Ładunek elektryczny	około $10^{-2}$	Długi
Jądrowe	min. protony, neutrony	1	Krótki (około $10^{-15}$ m)
Słabe	cząstki elementarne	około $10^{-15}$	Krótki (około $10^{-18}$ m)

### 4.1.2 Masa

Nasze rozważania rozpoczynamy od *przypisania ciałom masy  $m$* . Chcemy w ten sposób opisać fakt, że różne ciała wykonane z tego samego materiału, w tym samym otoczeniu uzyskują pod działaniem tej samej siły różne przyspieszenia (np. pchamy z jednakową siłą dwa różne pojazdy "lekki" i "ciężki" i uzyskują one różne przyspieszenie  $a$ ).

Zaproponowana poniżej metoda postępowania jest jednym z równoważnych sposobów definiowania masy. Opiera się ona na porównaniu nieznannej masy  $m$  z wzorcem masy np.  $m_0 = 1$  kg. Pomiędzy masami umieszczamy ściśniętą sprężynę i następnie zwalniamy ją. Masy  $m$  i  $m_0$ , które początkowo spoczywały polecą odrzucone w przeciwnych kierunkach odpowiednio z prędkościami  $v$  i  $v_0$  (rysunek 4.1).



Rys. 4.1. Wyznaczanie nieznannej masy  $m$  przez porównanie ze wzorcem  $m_0$

Nieznana masę  $m$  definiujemy jako



#### Definicja

$$m = m_0 \frac{v_0}{v}$$

(4.1)

### 4.1.3 Pęd



#### Definicja

*Pęd ciała definiujemy jako iloczyn jego masy i prędkości (wektorowej)*

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

(4.2)

### 4.1.4 Siła



#### Definicja

*Jeżeli na ciało o masie  $m$  działa siła  $F$ , to definiujemy ją jako zmianę w czasie pędu tego ciała.*

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

(4.3)

Podstawiając wyrażenie (4.2) i wykonując różniczkowanie otrzymujemy

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{dm}{dt} \mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (4.4)$$

a dla ciała o stałej masie  $m = \text{const.}$

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \quad (4.5)$$

Wprowadziliśmy w ten sposób pojęcie siły  $F$ . Teraz podamy metodę obliczania sił działających na ciała; poznamy prawa rządzące oddziaływaniami.

Na zakończenie tej części zapoznajmy się z jednostkami siły i masy.



### Jednostki

Jednostką masy w układzie SI jest *kilogram* (kg), natomiast jednostką siły jest *niuton* (N);  $1\text{N} = 1\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$

## 4.2 Zasady dynamiki Newtona

Podstawowa teoria, która pozwala przewidywać ruch ciał, składa się z trzech równań, które nazywają się zasadami dynamiki Newtona.

Sformułowanie pierwszej zasady dynamiki Newtona:



### Prawo, zasada, twierdzenie

*Ciało, na które nie działa żadna siła (lub gdy siła wypadkowa jest równa zero) pozostaje w spoczynku lub porusza się ze stałą prędkością po linii prostej.*

Siła wypadkowa  $F_{\text{wyp}}$  jest sumą wektorową wszystkich sił działających na ciało. Jeżeli  $F_{\text{wyp}} = 0$  to również przyspieszenie ciała  $\mathbf{a} = 0$ , a to oznacza, że nie zmienia się ani wartość ani kierunek prędkości tzn. ciało jest w stanie spoczynku lub porusza się ze stałą co do wartości prędkością po linii prostej.

Zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki nie ma rozróżnienia między ciałami spoczywającymi i poruszającymi się ze stałą prędkością. Nie ma też różnicy pomiędzy sytuacją gdy nie działa żadna siła i przypadkiem gdy wypadkowa wszystkich sił jest równa zero.

Sformułowanie drugiej zasady dynamiki Newtona:



### Prawo, zasada, twierdzenie

*Tempo zmian pędu ciała jest równe sile wypadkowej działającej na to ciało. Dla ciała o stałej masie sprowadza się to do iloczynu masy i przyspieszenia ciała.*

$$\mathbf{F}_{\text{wyp}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \text{lub} \quad \mathbf{F}_{\text{wyp}} = m\mathbf{a}, \quad m = \text{const.} \quad (4.6)$$


Sformułowanie trzeciej zasady dynamiki Newtona:



### Prawo, zasada, twierdzenie

*Gdy dwa ciała oddziałują wzajemnie, to siła wywierana przez ciało drugie na ciało pierwsze jest równa i przeciwnie skierowana do siły, jaką ciało pierwsze działa na drugie.*

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} \quad (4.7)$$

Pierwsza zasada dynamiki wydaje się być szczególnym przypadkiem drugiej bo gdy  $\mathbf{a} = 0$  to i  $\mathbf{F}_{\text{wyp}} = 0$ . Przypisujemy jej jednak wielką wagę dlatego, że zawiera ważne pojęcie fizyczne: definicję *inercjalnego układu odniesienia* .




### Definicja


*Pierwsza zasada dynamiki stwierdza, że jeżeli na ciało nie działa żadna siła (lub gdy siła wypadkowa jest równa zero) to istnieje taki układ odniesienia, w którym to ciało spoczywa lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Taki układ nazywamy układem inercjalnym.*

Układy inercjalne są tak istotne bo *we wszystkich takich układach ruchami ciał rządzą dokładnie te same prawa*. Większość omawianych zagadnień będziemy rozwiązywać właśnie w inercjalnych układach odniesienia. Zazwyczaj przyjmuje się, że są to układy, które spoczywają względem gwiazd stałych ale układ odniesienia związany z Ziemią w większości zagadnień jest dobrym przybliżeniem układu inercjalnego.

Ponieważ przyspieszenie ciała zależy od przyspieszenia układu odniesienia (od przyspieszenia obserwatora), w którym jest mierzone więc druga zasada dynamiki jest słuszna tylko, gdy obserwator znajduje się w układzie inercjalnym. Inaczej mówiąc, prawa strona równania  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  zmieniałaby się w zależności od przyspieszenia obserwatora. Więcej o układach inercjalnych i nieinercjalnych dowiesz się w dalszej części podręcznika (punkt 5.2).

Zwróćmy jeszcze raz uwagę na fakt, że w równaniu (4.6) występuje *siła wypadkowa*. Oznacza to, że trzeba brać sumę wektorową wszystkich sił działających na ciało. Doświadczenia potwierdzają zasadę addytywności sił. Zasada ta dotyczy również masy: masa układu jest sumą mas poszczególnych ciał tego układu.

Siły oddziaływania pomiędzy punktami materialnymi należącymi do danego układu nazywamy *siłami wewnętrznymi* . Na przykład w ciałach stałych są to siły oddziaływania sprężystego pomiędzy atomami, cząsteczkami. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona, jeżeli punkt  $i$  układu działa na punkt  $j$  to równocześnie punkt  $j$  działa na punkt  $i$  siłą równą co do wartości ale przeciwnie skierowaną  $\mathbf{F}_{i \rightarrow j} = -\mathbf{F}_{j \rightarrow i}$  (równanie 4.7).

Na punkty materialne układu mogą ponadto działać *siły zewnętrzne*  to jest siły pochodzące spoza układu. Druga zasada dynamiki Newtona dla układu  $n$  punktów materialnych przyjmuje więc postać

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (4.8)$$

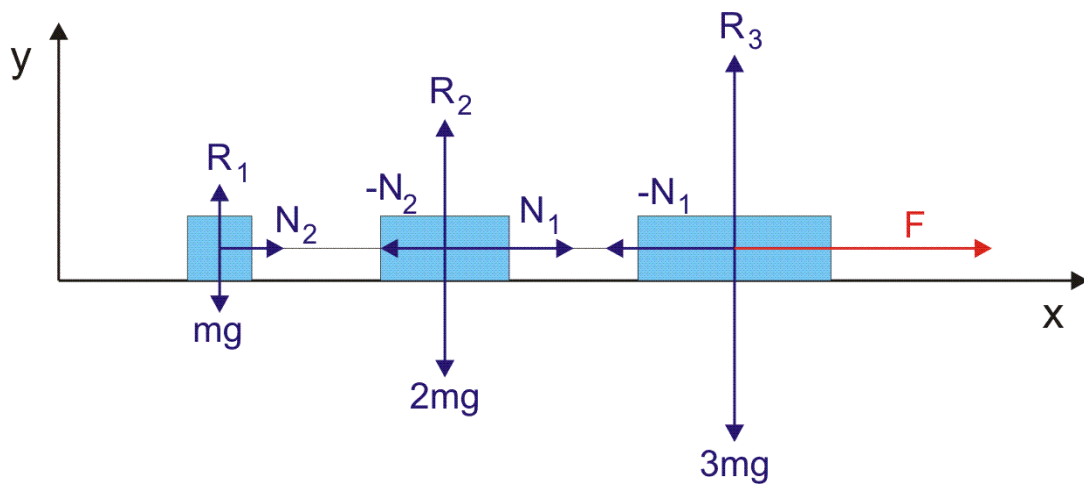
gdzie  $m_i$  oznacza masę  $i$ -tego punktu,  $a_i$  - jego przyspieszenie,  $F_i$  - wypadkową siłę działającą na ten punkt. W równaniu tym występuje *suma wszystkich sił* to znaczy zarówno wewnętrznych jak i zewnętrznych. Jednak na podstawie pierwszego równania widzimy, że siły wewnętrzne znoszą się parami, więc ostatecznie *wypadkowa wszystkich sił jest równa wypadkowej sił zewnętrznych*.

Prześledźmy teraz zastosowanie zasad dynamiki na następującym przykładzie.



### Przykład

Rozważmy układ trzech ciał o masach  $3m$ ,  $2m$  i  $m$  połączonych nieważkimi nitkami tak jak na rysunku poniżej. Układ jest ciągnięty zewnętrzną siłą  $F$  po gładkim podłożu. Szukamy przyspieszenia układu i naprężeń nici łączących ciała.



Rys. 4.2. Układ trzech mas połączonych nitkami, ciągnięty siłą  $F$

Reakcja podłoża  $R$  równoważy nacisk poszczególnych ciał tak, że siły działające w kierunku  $y$  (w pionie) równoważą się. Natomiast w kierunku  $x$  układ jest ciągnięty zewnętrzną siłą  $F$ , a oddziaływania są przenoszone przez nitki. Ciało o masie  $3m$  działa na ciało o masie  $2m$  siłą  $N_1$ , a siła  $-N_1$  jest siłą reakcji na to działanie. Podobnie jest z siłami  $N_2$  i  $-N_2$ . Przyspieszenie układu i siły naciągu nitek  $N_1$  i  $N_2$  obliczamy stosując drugą zasadę dynamiki Newtona do każdego ciała indywidualnie

$$\begin{aligned} 3ma &= F - N_1 \\ 2ma &= N_1 - N_2 \\ ma &= N_2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sumując równania stronami i przekształcając otrzymujemy

$$a = \frac{F}{m + 2m + 3m} = \frac{F}{6m} \quad (4.10)$$

Zwróćmy uwagę na addytywność mas. Taki sam wynik otrzymalibyśmy traktując ciała jak jedną masę. Doświadczenia potwierdzają zasadę addytywności masy: masa układu jest sumą mas poszczególnych ciał układu.

Podstawiając wynik (4.10) do równań (4.9) obliczamy naciągi nitek

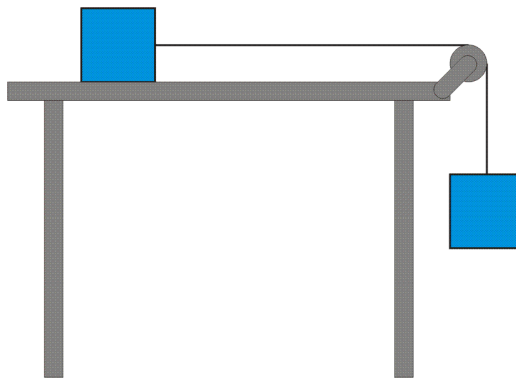
$$N_1 = \frac{F}{2}, \quad N_2 = \frac{F}{6} \quad (4.11)$$

Spróbuj teraz samodzielnie rozwiązać podobny problem.



### Ćwiczenie 4.1

Dwa klocki o jednakowych masach  $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$  są połączone nieważką nitką przesuwną przez nieważki bloczek tak jak na rysunku poniżej. Oblicz przyspieszenie układu oraz naprężenie linki. Przyjmij, że klocek  $m_2$  porusza się po stole bez tarcia. Wynik zapisz poniżej.



Wskazówka: Zastosuj drugą zasadę dynamiki Newtona do każdego ciała osobno i rozwiąż otrzymany układ równań

$$a = \quad N =$$

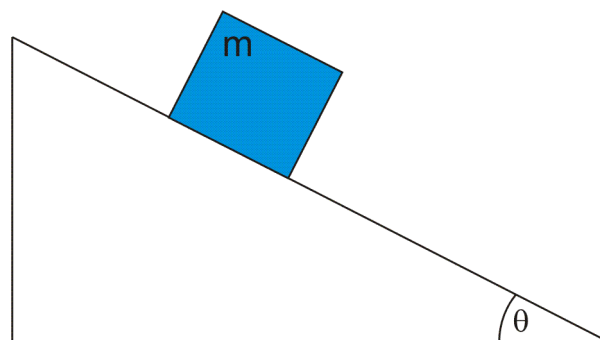
Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Zwróćmy jeszcze raz uwagę na fakt, że w równaniu (4.6) występuje *siła wypadkowa*. Oznacza to, że trzeba brać *sumę wektorową* wszystkich sił działających na ciało. Możesz się o tym przekonać rozwiązując podane poniżej zadanie.



### Ćwiczenie 4.2

Oblicz przyspieszenie z jakim porusza się klocek o masie  $m$  zsuwający się bez tarcia po równi pochyłej o kącie nachylenia  $\theta$  (tak jak na rysunku). Rozwiązanie zapisz poniżej. Wskazówka: Oblicz siłę wypadkową i jej składowe: równoległą i prostopadłą do równi. Zastosuj drugą zasadę dynamiki Newtona dla każdej składowej



$a =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu



Bardziej zaawansowany przykład zastosowania zasad dynamiki (ruch w polu grawitacyjnym z uwzględnieniem oporu powietrza) możesz poznać w *Dodatku 3*, na końcu modułu I.



## 5 Wybrane zagadnienia z dynamiki

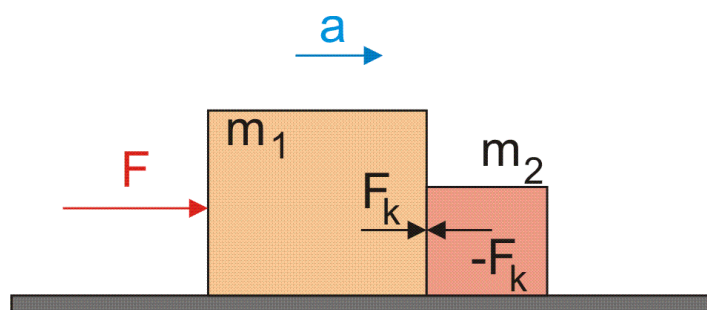
### 5.1 Siły kontaktowe i tarcie

Gdy dwa ciała są dociskane do siebie to występują między nimi siły kontaktowe. Źródłem tych sił jest odpychanie pomiędzy atomami. Przy dostatecznie małej odległości występuje przekrywanie chmur elektronowych i ich odpychanie rosnące wraz z malejącą odległością. Jest to siła elektromagnetyczna. Żeby prześledzić ten problem rozważmy następujący przykład.



#### Przykład

Dwa klocki o masach  $m_1$  i  $m_2$  umieszczono na gładkiej powierzchni. Do klocka  $m_1$  przyłożono siłę  $F$  (tak jak na rysunku poniżej).



Rys. 5.1. Dwie masy pchane siłą  $F$

Wprawdzie siła  $F$  jest przyłożona do klocka o masie  $m_1$  ale nadaje przyspieszenie  $a$  obu klockom więc

$$F = (m_1 + m_2)a \quad (5.1)$$


Siła kontaktowa  $F_k$  z jaką klocek o masie  $m_1$  działa na klocek o masie  $m_2$  nadaje przyspieszenie klockowi  $m_2$ . Ponieważ klocek  $m_2$  porusza się z przyspieszeniem  $a$ , więc siła kontaktowa wynosi


$$F_k = m_2 a \quad (5.2)$$

Oczywiście, zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona klocek o masie  $m_2$  działa na klocek o masie  $m_1$  siłą reakcji  $-F_k$ .

#### 5.1.1 Tarcie

Siły kontaktowe, o których mówiliśmy są normalne (prostopadłe) do powierzchni. Istnieje jednak składowa siły kontaktowej leżąca w płaszczyźnie powierzchni. Jeżeli ciało pchniemy wzdłuż stołu to po pewnym czasie ciało to zatrzyma się. Z drugiej zasady

dynamiki wiemy, że jeżeli ciało porusza się z przyspieszeniem (opóźnieniem) to musi na nie działać siła. Tę siłę, która przeciwstawia się ruchowi nazywamy *siłą tarcia* .

Siła tarcia zawsze działa stycznie do powierzchni zetknięcia ciał i może istnieć nawet wówczas, gdy powierzchnie są nieruchome względem siebie. Żeby się o tym przekonać wystarczy wykonać proste ćwiczenie. Połóżmy na stole jakiś obiekt np. książkę i spróbujmy wprowadzić ją w ruch stopniowo zwiększając przykładaną siłę. Początkowo gdy siła jest "mała" obiekt nie porusza się. Oznacza to, że naszej sile  $F$  przeciwstawia się siła tarcia  $T$  równa co do wartości lecz przeciwnie do niej skierowana. Zwiększamy dalej siłę  $F$ , aż książka zacznie się poruszać. Zauważmy, że im gładsza powierzchnia tym szybciej to nastąpi. Siłę tarcia działającą między nieruchomymi powierzchniami nazywamy *tarciem statycznym* . Maksymalna siła tarcia statycznego  $T_s$  jest równa tej krytycznej sile, którą musieliśmy przyłożyć, żeby ruszyć ciało z miejsca. Dla suchych powierzchni  $T_s$  spełnia dwa prawa empiryczne.



### Prawo, zasada, twierdzenie

$T_s$  jest w przybliżeniu niezależna od wielkości pola powierzchni styku ciał;  
 $T_s$  jest proporcjonalna do siły z jaką jedna powierzchnia naciska na drugą.

Stosunek maksymalnej siły  $T_s$  do siły nacisku  $F_N$  nazywamy współczynnikiem tarcia statycznego  $\mu_s$

$$\mu_s = \frac{T_s}{F_N} \quad (5.3)$$

Zwróćmy uwagę, że we wzorze (5.3) występują tylko wartości bezwzględne sił (a nie wektorowe) bo te siły są do siebie prostopadłe.




### Ćwiczenie 5.1

Ciało o masie  $m$  spoczywa na równi pochyłej, której kąt nachylenia  $\theta$  stopniowo zwiększamy. Oblicz przy jakim granicznym kącie nachylenia ciało zacznie się zsuwać jeżeli współczynnik tarcia statycznego klocka o równię wynosi  $\mu_s$ ? Wynik zapisz poniżej. Wskazówka: Skorzystaj z warunków, że siła reakcji  $R$  równoważy składową ciężaru prostopadłą do powierzchni równi (nacisk), a siła tarcia  $T$  równoważy składową ciężaru równoległą do równi.

$\theta_{gr} =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Wiemy już, że gdy działająca siła  $F$  jest większa od  $T_s$  to ciało zostanie wprowadzone w ruch, ale nadal będzie istniała siła tarcia, *tarcia kinetycznego*  $T_k$   przeciwstawiająca się ruchowi. Siła  $T_k$  spełnia dodatkowo, oprócz dwóch wymienionych powyżej, trzecie empiryczne prawo

**Prawo, zasada, twierdzenie**

$T_k$  nie zależy od prędkości względnej poruszania się powierzchni.

Istnieje, analogiczny do  $\mu_s$ , odpowiedni współczynnik tarcia kinetycznego  $\mu_k$

$$\mu_k = \frac{T_k}{F_N} \quad (5.4)$$

Dla większości materiałów  $\mu_k$  jest nieco mniejszy od  $\mu_s$ .

Tarcie jest bardzo złożonym zjawiskiem i wyjaśnienie go wymaga znajomości oddziaływań atomów na powierzchni. Dlatego ograniczymy się do zauważenia, że tarcie odgrywa bardzo istotną rolę w życiu codziennym. Na przykład w samochodzie na pokonanie siły tarcia zużywa się około 20% mocy silnika. Tarcie powoduje zużywanie się trących powierzchni i dlatego staramy się je zmniejszać. Z drugiej strony wiemy, że bez tarcia nie moglibyśmy chodzić, jeździć samochodami, czy też pisać ołówkiem.

**Ćwiczenie 5.2**

Na zakończenie spróbuj samodzielnie rozwiązać następujący przykład. Rozważ układ trzech ciał o masach  $3m$ ,  $2m$  i  $m$  połączonych nieważkimi nitkami (taki sam jak w przykładzie pokazującym zastosowanie zasad dynamiki Newtona w punkcie 4.2). Układ jest ciągnięty zewnętrzną siłą  $F$ . Między ciałami a powierzchnią działa siła tarcia. Dany jest współczynnik tarcia kinetycznego  $\mu_k$ . Znajdź przyspieszenie układu i naprężenia nici. Pamiętaj o zrobieniu odpowiedniego rysunku i zaznaczeniu wszystkich działających sił.

Wskazówka: Przyspieszenie układu i siły naciągu nitek oblicz stosując drugą zasadę dynamiki Newtona do każdego ciała indywidualnie.

$$a = \quad N_1 = \quad N_2 =$$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

W przykładach pokazujących zastosowanie zasad dynamiki Newtona opisywaliśmy ruch ciał z punktu widzenia inercjalnych układów odniesienia to znaczy takich, w których ciało nie poddane działaniu sił pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Teraz zajmiemy się układami nieinercjalnymi i występującymi w nich siłami bezwładności.

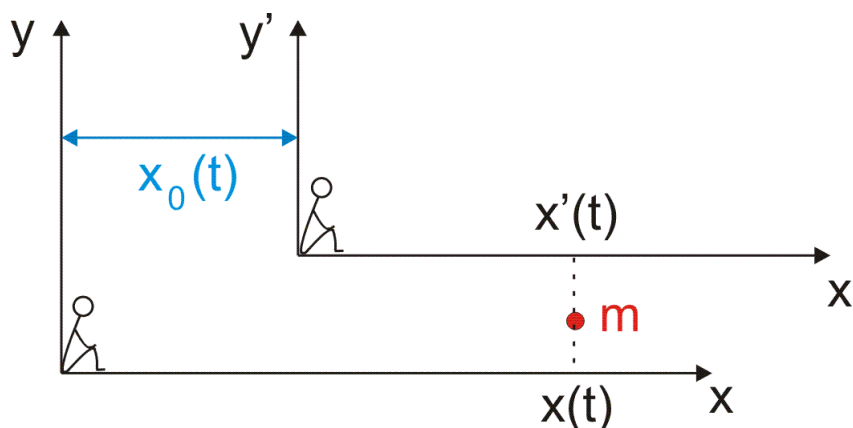
**5.2 Siły bezwładności**

Omawiając zasady dynamiki Newtona wprowadziliśmy ważne pojęcie fizyczne: zdefiniowaliśmy *inercjalny układ odniesienia*. Stwierdziliśmy wtedy, że układy inercjalne są tak istotne bo we wszystkich takich układach ruchami ciał rządzą *dokładnie te same prawa*, i dlatego większość zagadnień staramy się rozwiązywać właśnie w inercjalnych układach odniesienia. Nasuwa się jednak pytanie, jak stosować zasady dynamiki Newtona

w układzie odniesienia, który doznaje przyspieszenia. Na przykład co możemy powiedzieć o siłach jakich działania "doznajemy" gdy znajdujemy się w samochodzie, który przyspiesza, hamuje lub zakręca?

W tym celu rozpatrzmy ruch ciała o masie  $m$  poruszającego się wzdłuż osi  $x$  ruchem przyspieszonym, pod wpływem działania siły  $F = ma$ .

Ruch ten jest obserwowany z dwóch różnych układów odniesienia (dwaj obserwatorzy), z których jeden  $xy$  jest układem inercyjnym, a drugi  $x'y'$  porusza się względem pierwszego wzdłuż osi  $x$  (rysunek poniżej).



Rys. 5.2. Położenie ciała  $m$  w dwóch układach odniesienia

Odległość między dwoma obserwatorami (układami) wynosi w danej chwili  $x_0(t)$  więc związek między położeniem ciała rejestrowanym przez obu obserwatorów ma postać

$$x'(t) = x(t) - x_0(t) \quad (5.5)$$

Natomiast przyspieszenie w obu układach znajdujemy korzystając z równań (3.1)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (5.6)$$

to znaczy, różniczkując dwukrotnie równanie (5.5)

$$a' = a - a_0 \quad (5.7)$$

Widać, że przyspieszenia w obu układach są równe tylko wtedy gdy  $a_0 = 0$  więc gdy układ  $x'y'$  porusza się względem układu  $xy$  ruchem jednostajnym lub względem niego spoczywa to znaczy gdy układ  $x'y'$  też jest układem inercyjnym tak jak  $xy$ . Natomiast gdy  $a_0 \neq 0$  to układ  $x'y'$  nazywamy *układem nieinercyjnym*  $\text{P}$ , a jego przyspieszenie  $a_0$  *przyspieszeniem unoszenia*  $\text{P}$ .

Widzimy, że przyspieszenie ciała zależy od przyspieszenia układu odniesienia (od przyspieszenia obserwatora), w którym jest mierzone więc druga zasada dynamiki jest

słuszna tylko, gdy obserwator znajduje się w układzie inercyjnym. Inaczej mówiąc, prawa strona równania  $F = ma$  zmienia się w zależności od przyspieszenia obserwatora. Jeżeli pomnożymy równanie (5.7) obustronnie przez  $m$  to otrzymamy

$$ma' = ma - ma_0$$

lub

(5.8)

$$ma' = F - ma_0$$

Widzimy, że w układzie  $x'y'$  (przyspieszającym) nie obowiązują zasady dynamiki Newtona bo:


- Gdy na ciało nie działa siła ( $F = 0$ ) to ciało nie spoczywa ani nie porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym tylko ruchem przyspieszonym z przyspieszeniem  $-a_0$ ;
- Iloczyn masy i przyspieszenia nie równa się sile działającej  $F$  ale jest mniejszy od niej o iloczyn  $ma_0$ .



### Definicja

Iloczyn masy i przyspieszenia unoszenia (ze znakiem minus) nazywamy siłą bezwładności  $F_b$ .

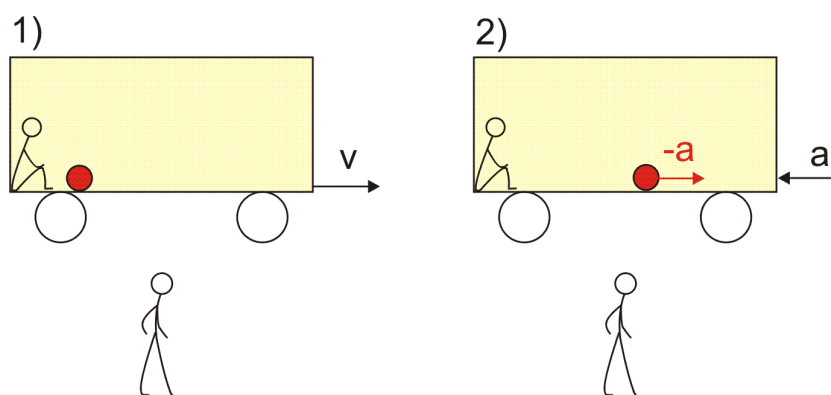
Ze wzoru (5.8) wynika, że jeżeli w układach nieinercjalnych chcemy stosować drugą zasadę dynamiki Newtona to musimy uwzględnić siły bezwładności.

Jak już mówiliśmy istnieją tylko cztery podstawowe oddziaływania, z których wynikają wszystkie siły zaobserwowane we Wszechświecie. Wszystkie te siły nazywamy *siłami rzeczywistymi*, ponieważ możemy je zawsze związać z działaniem pochodzącym od konkretnym ciał materialnych. Inaczej jest z siłami bezwładności, które nie pochodzą od innych ciał, a ich obserwowanie jest związane wyłącznie z wyborem nieinercjalnego układu odniesienia. Dlatego siły bezwładności nazywamy *siłami pozornymi* .



### Przykład

Dwaj obserwatorzy opisują ruch kulki w sytuacji pokazanej na rysunku 5.3.




Rys. 5.3. Ruch kulki obserwowany z różnych układów odniesienia

Jeden z obserwatorów znajduje się w samochodzie, a drugi stoi na Ziemi. Samochód początkowo porusza się ze stałą prędkością  $v$  po linii prostej (rys. 1), następnie hamuje ze

stałym opóźnieniem  $\mathbf{a}$  (rys. 2). Między kulką, a podłogą samochodu nie ma tarcia. Gdy samochód jedzie ze stałą prędkością to obydwaj obserwatorzy stwierdzają zgodnie, na podstawie pierwszej zasady dynamiki, że na kulkę nie działa żadna siła: obserwator w samochodzie zauważa, że  $\mathbf{v}_{kulki} = 0 \Rightarrow \mathbf{F} = 0$ , a obserwator stojący obok stwierdza, że  $\mathbf{v}_{kulki} = \mathbf{v} = \text{const.} \Rightarrow \mathbf{F} = 0$ . Zwróćmy uwagę, że obaj obserwatorzy znajdują się w *inercjalnych układach odniesienia*.

Sytuacja zmienia się gdy samochód zaczyna hamować (rys. 2). Obserwator związany z Ziemią dalej twierdzi, że kulka porusza się ze stałą prędkością, a tylko podłoga samochodu przesuwana się pod nią, bo samochód hamuje. Natomiast obserwator w samochodzie stwierdza, że kulka zaczyna się poruszać się z przyspieszeniem  $-\mathbf{a}$  w stronę przedniej ściany wózka. Dochodzi do wniosku, że na kulkę o masie  $m_{kulki}$  zaczęła *działać siła*

$$\mathbf{F} = -m_{kulki}\mathbf{a} \quad (5.9)$$

ale nie może wskazać żadnego ciała, będącego *źródłem tej siły*. Mówiliśmy już, że druga zasada dynamiki jest słuszna tylko w inercjalnym układzie odniesienia. Zauważmy, że obserwator w wózku znajduje się teraz w układzie nieinercjalnym i siła jakiej działanie zauważa jest *pozorną siłą bezwładności* .

Działanie sił bezwładności odczuwamy nie tylko podczas przyspieszania i hamowania (przyspieszenie styczne), ale również gdy zmienia się kierunek prędkości. Zgodnie z definicją siły bezwładności


$$\mathbf{F}_b = -m\mathbf{a}_0 \quad (5.10)$$

a dla ruchu krzywoliniowego przyspieszenie układu jest przyspieszeniem normalnym (dośrodkowym w ruchu po okręgu)

$$a_0 = a_n = \frac{v^2}{R} \quad (5.11)$$

więc wartość siły bezwładności wynosi

$$F_{odśr.} = m \frac{v^2}{R} \quad (5.12)$$

Tę siłę bezwładności nazywamy *siłą odśrodkową* . Z taką siłą mamy do czynienia na przykład podczas jazdy samochodem na zakręcie. Również Ziemia nie jest idealnym układem inercjalnym ponieważ wiruje. Jednak w większości rozpatrywanych przez nas zjawisk można zaniedbać wpływ ruchu Ziemi na ich przebieg.



Wpływ ruchu obrotowego układu na ruch względny ciała (siła bezwładności Coriolisa) została omówiona w *Dodatku 4*, na końcu modułu I.

## 6 Grawitacja

Przedstawimy, teraz jedno z czterech podstawowych oddziaływań - oddziaływanie grawitacyjne.

### 6.1 Prawo powszechnego ciążenia

Rozważania dotyczące grawitacji rozpoczniemy od prostego przykładu.



#### Przykład

Obliczmy stosunek przyspieszenia dośrodkowego Księżyca w kierunku Ziemi do przyspieszenia grawitacyjnego przy powierzchni Ziemi. Przyspieszenie dośrodkowe w ruchu jednostajnym po okręgu możemy obliczyć na podstawie równania (3.16)

$$a_K = \frac{4\pi^2 R_K}{T^2}$$

gdzie  $R_K = 3.86 \cdot 10^5$  km jest odległością od Ziemi do Księżyca. Okres obiegu Księżyca wokół Ziemi wynosi  $T = 27.3$  dnia. Otrzymujemy więc  $a_K = 2.73 \cdot 10^{-3}$  m/s<sup>2</sup>. Natomiast w pobliżu powierzchni Ziemi przyspieszenie wynosi 9.8 m/s<sup>2</sup>. Stosunek tych przyspieszeń

$$\frac{a_K}{g} = \frac{1}{3590} \cong \left(\frac{1}{60}\right)^2$$

Ponieważ promień Ziemi wynosi  $R_Z = 6300$  km to zauważmy, że w granicach błędu

$$\frac{a_K}{g} = \frac{R_Z^2}{R_K^2} \quad (6.1)$$

Newton wykonał takie obliczenia i wyciągnął wniosek, że siła przyciągania między dwoma masami (między ich środkami) maleje odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości między nimi. Ponadto zauważył, że skoro istnieje siła przyciągania pomiędzy dowolnym ciałem i Ziemią, to musi istnieć siła przyciągania między każdymi dwoma masami  $m_1$  i  $m_2$ . Na tej podstawie i w oparciu o liczne obserwacje astronomiczne dokonane przez jego poprzedników min. Kopernika, Galileusza, Keplera, Newton sformułował w 1687 r. prawo powszechnego ciążenia.



#### Prawo, zasada, twierdzenie

*Każde dwa ciała o masach  $m_1$  i  $m_2$  przyciągają się wzajemnie siłą grawitacji wprost proporcjonalną do iloczynu mas, a odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między nimi.*

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (6.2)$$

To jest prawo powszechne, ponieważ stosuje się do wszystkich sił grawitacyjnych; np. wyjaśnia spadanie ciał na Ziemię, ale też tłumaczy ruch planet.

Wartość współczynnika proporcjonalności  $G$ , nazywanego stałą grawitacji, Newton oszacował stosując równanie (6.2) do siły działającej między Ziemią, a ciałem o masie  $m$ . Zgodnie z drugą zasadą dynamiki

$$G \frac{M_Z m}{R_Z^2} = mg$$

skąd

$$G = \frac{gR_Z^2}{M_Z} \quad (6.3)$$

gdzie  $R_Z$  jest promieniem Ziemi. Masę Ziemi  $M_Z$  Newton obliczył zakładając średnią gęstość Ziemi równą  $\rho_Z = 5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  (dla porównania gęstość żelaza, głównego składnika masy Ziemi, wynosi  $\rho_{Fe} = 7.9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , a gęstość krzemu, podstawowego składnika skorupy ziemskiej, wynosi  $\rho_{Si} = 2.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ). Uwzględniając  $R_Z = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$  Newton otrzymał wartość  $G = 7.35 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$  co jest wartością tylko o 10% większą niż ogólnie dzisiaj przyjmowana wartość  $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ . Wartość stałej  $G$  obliczonej przez Newtona jest obarczona błędem wynikającym z przyjętej średniej wartości gęstości Ziemi.

Żeby wyznaczyć stałą  $G$  w laboratorium niezależnie od masy Ziemi i tym samym uniknąć błędu związanego z szacowaniem gęstości Ziemi trzeba by zmierzyć siłę oddziaływania dwóch mas  $m_1$  i  $m_2$  umieszczonych w odległości  $r$ . Wówczas

$$G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2}$$

Zauważmy jednak, że przykładowo dla mas każda po 1 kg oddalonych od siebie o 10 cm siła  $F$  ma wartość  $F = 6.67 \cdot 10^{-9} \text{ N}$  i jest za mała by ją dokładnie zmierzyć standardowymi metodami. Problem pomiaru tak małej siły rozwiązał Cavendish.

### 6.1.1 Doświadczenie Cavendisha

W swoim pomiarze Cavendish wykorzystał fakt, że siła potrzebna do skręcenia długiego, cienkiego włókna kwarcowego jest bardzo mała. Na takim włóknie zawiesił pręt z dwiema małymi kulkami ołowianymi ( $m$ ) na końcach (rysunek 6.1). Następnie w pobliżu każdej z kulek umieścił większą kulę ołowianą ( $M$ ) i zmierzył precyzyjnie kąt  $\alpha$  o jaki obrócił się pręt.

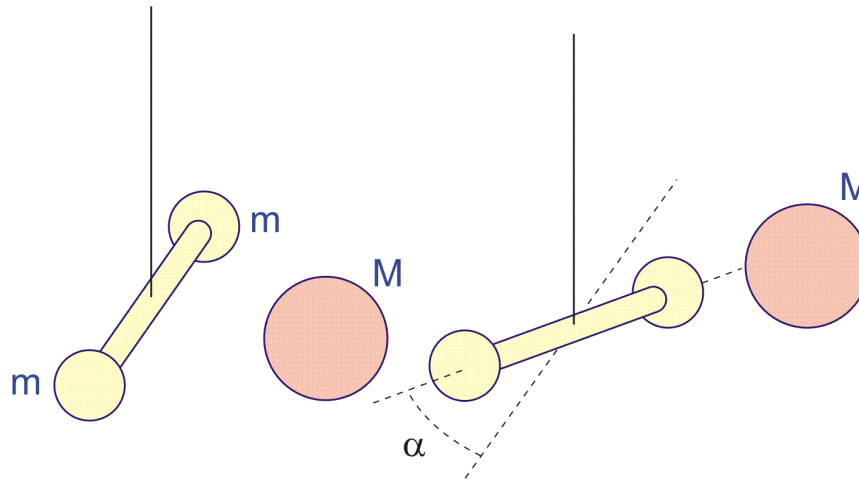
Pomiar wykonany metodą Cavendisha dał wartość  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ .

Znając już wartość stałej  $G$ , Cavendish wyznaczył masę Ziemi  $M_Z$  z równania

$$M_Z = \frac{gR_Z^2}{G} \quad (6.4)$$

Cavendish wyznaczył też masę Słońca i masy planet, tych których satelity zostały zaobserwowane.





Rys. 6.1. Doświadczenie Cavendisha



**Przykład**

Rozpatrzmy ruch planety o masie  $m$  krążącej w odległości  $R$  wokół Słońca o masie  $M$ . Wtedy siła przyciągania grawitacyjnego wynosi

$$F = G \frac{Mm}{R^2} \quad (6.5)$$

a ponieważ przyspieszenie w ruchu po okręgu jest dane wyrażeniem

$$a = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad (6.6)$$

to równanie (6.5) przyjmuje postać

$$G \frac{Mm}{R^2} = m \left( \frac{4\pi^2 R}{T^2} \right) \quad (6.7)$$

skąd otrzymujemy

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} \quad (6.8)$$



**Ćwiczenie 6.1**

Oblicz jaki był okres obiegu Księżyca przez moduł statku Apollo? Dane są: promień Księżyca  $R_K = 1740$  km, jego masa  $M_K = 7.35 \cdot 10^{22}$  kg oraz stała  $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>. Wynik zapisz poniżej.

Wskazówka: Skorzystaj z równania (6.7).

$T =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.



### Ćwiczenie 6.2

Na podstawie wzoru (6.8) oblicz masę Słońca przyjmując odległość Ziemia - Słońce równą  $R = 1.5 \cdot 10^8$  km, oraz okres obiegu  $T = 1$  rok. Porównaj ten wynik z masą Ziemi obliczoną na podstawie równania (6.4). Ile razy masa Słońca jest większa od masy Ziemi? Wynik zapisz poniżej.

$M_S =$

$M_Z =$

$M_S/M_Z =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

## 6.2 Prawa Keplera ruchu planet

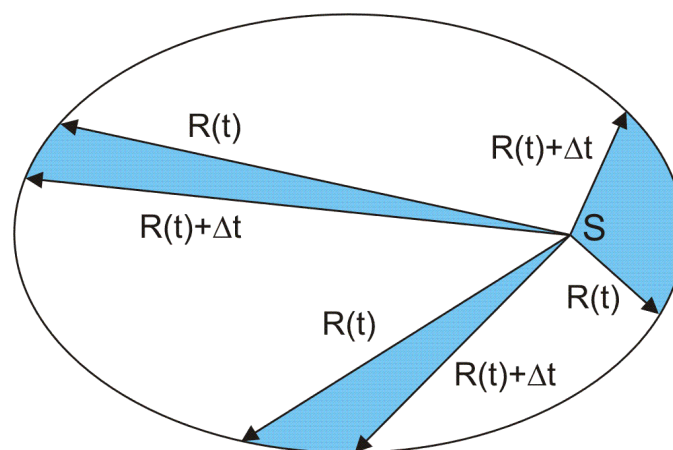
Jeszcze przed sformułowaniem przez Newtona prawa powszechnego ciążenia, Johannes Kepler zauważył, że ruch planet stosuje się do trzech prostych praw, które zgadzały się z wynikami pomiarowymi pozycji planet z bardzo dużą dokładnością



### Prawo, zasada, twierdzenie

1. *Pierwsze prawo Keplera: Każda planeta krąży po orbicie eliptycznej, ze Słońcem w jednym z ognisk tej elipsy.*
2. *Drugie prawo Keplera (prawo równych pól): Linia łącząca Słońce i planetę zakreśla równe pola w równych odstępach czasu.*
3. *Trzecie prawo Keplera: Sześciangy pólosi wielkich orbit dowolnych dwóch planet mają się do siebie jak kwadraty ich okresów obiegu (półoś wielka jest połową najdłuższej cięciwy elipsy).*

Z drugiego prawa Keplera (zilustrowanego na rysunku 6.2) wynika, że planety (lub naturalne satelity) powinny poruszać się szybko w pobliżu Słońca (gdy wektor  $R(t)$  jest najkrótszy) i coraz wolniej w miarę oddalania się od Słońca (gdy wektor  $R(t)$  rośnie).



Rys. 6.2. Wektor  $R(t)$  zakreśla równe pola w równych odstępach czasu

Dobrym przykładem jest kometa Halleya, która obiega Słońce w ciągu 76 lat, z czego tylko 1 rok spędza w pobliżu Słońca (jest wtedy niewidoczna z Ziemi).

Newton pokazał, że prawa Keplera można wyprowadzić z zasad dynamiki. Pokazał na przykład, że tylko wtedy, gdy siła jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości to spełnione są pierwsze i trzecie prawo Keplera.



O związku między zasadami dynamiki Newtona, a prawami Keplera możesz przeczytać w *Dodatku 5*, na końcu modułu I.

## 6.3 Ciężar




### Definicja

*Ciężar definiujemy jako siłę ciężkości działającą na ciało.*


W pobliżu powierzchni Ziemi ciężar jest więc siłą z jaką Ziemia przyciąga ciało i dla ciała o masie  $m$  jest równy  $mg$ . Na Księżycu ciężar jest mniejszy w porównaniu z ciężarem na Ziemi około sześć razy. Ciężaru nie należy więc mylić z masą ciała.

### 6.3.1 Masa bezwładna i grawitacyjna

Gdy spróbujemy wprawić w ruch ciało popychając je to wymaga to pewnego wysiłku nawet gdy ruch odbywa się po idealnie gładkiej poziomej powierzchni. Wysiłek jest tym większy im ciało ma większą masę. Wynika to bezpośrednio z drugiej zasady dynamiki Newtona  $F = ma$ . Masę  $m$  występującą w tym wzorze nazywamy *masą bezwładną* .

Z kolei rozpatrzmy sytuację gdy utrzymujemy klocek uniesiony w górę w stanie spoczynku. Bezwładność nie odgrywa tu żadnej roli bo ciało nie przyspiesza, jest w spoczynku. Ale przecież musimy używać siły, o wartości równej przyciąganiu grawitacyjnemu między ciałem i Ziemią, żeby ciało nie spadło. Odgrywa tu rolę ta właściwość ciała, która powoduje że jest ono przyciąganie przez inne obiekty takie jak Ziemia i siłą

$$F = G \frac{m' M_Z}{R_Z^2} \quad (6.9)$$

Występującą w tym wzorze masę  $m'$  nazywamy *masą grawitacyjną* .

Powstaje pytanie czy masa bezwładna  $m$  i masa grawitacyjna  $m'$  ciała są sobie równe? Żeby znaleźć odpowiedź na to pytanie rozpatrzmy sytuację, w której masa bezwładna  $m_1$  spadając swobodnie w pobliżu powierzchni Ziemi uzyskuje przyspieszenie  $a_1$ . Wtedy

$$m_1 a_1 = G \frac{m_1' M_Z}{R_Z^2} \quad (6.10a)$$

Jeżeli natomiast inna masa  $m_2$  uzyskuje przyspieszenie  $a_2$  to

$$m_2 a_2 = G \frac{m_2' M_Z}{R_Z^2} \quad (6.10b)$$

Dzieląc równania (6.10a) i (6.10b) przez siebie otrzymujemy

$$\frac{m_1 a_1}{m_2 a_2} = \frac{m_1'}{m_2'} \quad (6.11)$$

Ponieważ doświadczalnie stwierdzono, że wszystkie ciała spadają (w próżni) w pobliżu Ziemi z tym samym przyspieszeniem  $a_1 = a_2 = g$  to stosunek mas bezwładnych jest równy stosunkowi mas grawitacyjnych. Aktualnie jesteśmy w stanie stwierdzić, że  $a_1 = a_2$  z dokładnością do  $10^{-10}$ .




#### **Prawo, zasada, twierdzenie**

*Te wyniki wskazują, że masa bezwładna jest równa masie grawitacyjnej. To stwierdzenie nazywa się zasadą równoważności.*

Konsekwencją jest to, że nie można rozróżnić między przyspieszeniem układu, a przyspieszeniem grawitacyjnym. Ta zasada jest punktem wyjścia ogólnej teorii względności Einsteina.

### **6.4 Pole grawitacyjne, pola sił**

Na przykładzie sił grawitacyjnych omówimy ważne w fizyce *pojęcie pola* . Nasze rozważania rozpoczynamy od umieszczenia masy  $M$  w początku układu. W punkcie przestrzeni opisanym wektorem  $\mathbf{r}$  znajduje się inna masa  $m$ . Wektor  $\mathbf{r}$  opisuje położenie masy  $m$  względem masy  $M$  więc siłę oddziaływania grawitacyjnego między tymi masami (równanie (6.2)) możemy zapisać w postaci wektorowej

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r} \quad (6.12)$$

gdzie znak minus wynika z faktu, że wektor  $\mathbf{F}$  jest zwrócony przeciwnie do wektora  $\mathbf{r}$ . Zwróćmy uwagę, że siłę tę możemy potraktować jako iloczyn masy  $m$  i wektora  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r})$  przy czym

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}}{m} = -G \frac{M}{r^3} \mathbf{r} \quad (6.13)$$



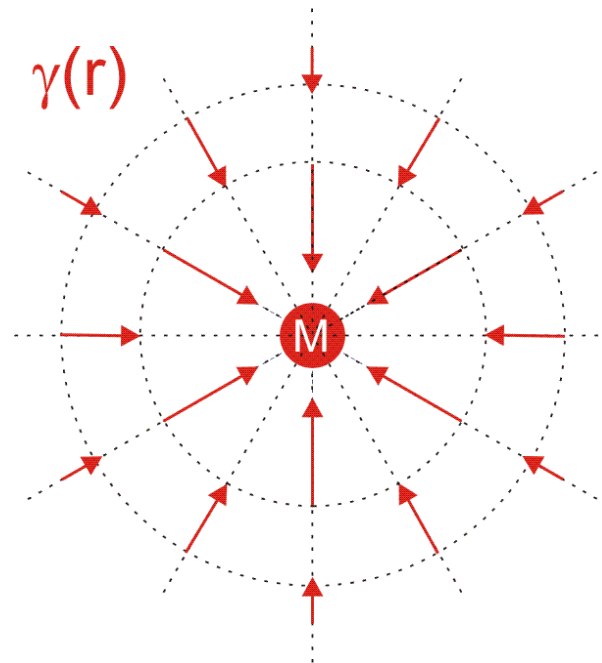
#### **Definicja**

*Wektor  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r})$  dany równaniem (6.13) nazywamy natężeniem pola grawitacyjnego.*

Zwróćmy uwagę na to, że jeżeli w punkcie  $\mathbf{r}$  umieścilibyśmy dowolną masę np.  $m'$  to zawsze możemy zapisać siłę jako iloczyn masy  $m'$  i tego samego wektora  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r})$ .

$$\mathbf{F}' = m' \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}) \quad (6.14)$$

Widzimy, że wektor  $\gamma(r)$  nie zależy od obiektu na który działa siła (masy  $m'$ ) ale zależy od źródła siły (masa  $M$ ) i charakteryzuje przestrzeń otaczającą źródło (wektor  $r$ ). Oznacza to, że masa  $M$  stwarza w punkcie  $r$  takie *warunki*, że umieszczona w nim masa  $m$  *odczuje działanie siły*. Inaczej mówiąc masie  $M$  przypisujemy *obszar wpływu* (działania), czyli *pole*. Na rysunku poniżej jest pokazany wektor  $\gamma(r)$  w wybranych punktach wokół masy  $M$ .



Rys. 6.3. "Mapa" natężenia pola grawitacyjnego wokół masy  $M$

Zwróćmy uwagę, że rozdzieliliśmy siłę na dwie części. Stwierdzamy, że *jedna masa wytwarza pole*, a następnie to *pole działa na drugą masę*. Taki opis pozwala uniezależnić się od obiektu (masy  $m'$ ) wprowadzanego do pola.

Z pojęcia pola korzysta się nie tylko w związku z grawitacją. Jest ono bardzo użyteczne również przy opisie zjawisk elektrycznych i magnetycznych. Źródłami i obiektami działania pola elektrycznego są ładunki w spoczynku, a pola magnetycznego ładunki w ruchu. Właściwości pól wytwarzanych przez ładunki elektryczne omówimy w dalszych rozdziałach.

Chociaż pole jest pojęciem abstrakcyjnym jest bardzo użyteczne i znacznie upraszcza opis wielu zjawisk. Na przykład gdy mamy do czynienia z wieloma masami, możemy najpierw obliczyć w punkcie  $r$  pole pochodzące od tych mas, a dopiero potem siłę działającą na masę umieszczoną w tym punkcie.

Z polem sił wiąże się nie tylko przestrzenny rozkład wektora natężenia pola, ale również przestrzenny rozkład energii. Właśnie zagadnieniom dotyczącym pracy i energii są poświęcone następne rozdziały.

Ten rozdział kończy pierwszy moduł; możesz teraz przejść do podsumowania i zadań testowych.

## Podsumowanie

- Wyrażenie  $v = \frac{x - x_0}{t - t_0}$  opisuje prędkość w ruchu jednostajnym po linii prostej i również jest prawdziwe dla prędkości średniej.
- Prędkość chwilowa jest pochodną drogi względem czasu  $v = \frac{dx}{dt}$ .
- W ruchu ze stałym przyspieszeniem mamy  $v = v_0 + at$  oraz  $x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$ .
- Przyspieszenie chwilowe jest równe  $a = \frac{dv}{dt}$ .
- W rzucie ukośnym ze stałym przyspieszeniem  $-g$  (w kierunku pionowym) tor ruchu ciała jest parabolą  $y = (tg\theta)x - \frac{g}{2(v_0 \cos \theta)^2}x^2$ .
- Przyspieszenie dośrodkowe w ruchu jednostajnym po okręgu wynosi  $a_r = \frac{v^2}{r}$  lub  $a_r = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$ .
- Jeżeli na ciało o masie  $m$  działa siła wypadkowa  $F_{wyp}$  to ruch ciała można przewidzieć posługując się zasadami dynamiki Newtona
  - Zasada 1  $a = 0$ , gdy  $F_{wyp} = 0$
  - Zasada 2  $F_{wyp} = \frac{dp}{dt} = ma$  gdy  $m = \text{const.}$  pęd  $p = m\mathbf{v}$
  - Zasada 3  $F_{1 \rightarrow 2} = -F_{2 \rightarrow 1}$
- Pierwsza zasada dynamiki stwierdza, że jeżeli na ciało nie działają siły zewnętrzne to istnieje taki układ odniesienia, w którym to ciało spoczywa lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Taki układ nazywamy układem inercyjnym.
- Maksymalna siła tarcia statycznego jest równa sile, którą musimy przyłożyć, żeby ruszyć ciało z miejsca.
- W układach poruszających się z przyspieszeniem uwzględniamy, że na każde ciało działa siła bezwładności  $F_b$  wprost proporcjonalna do masy ciała oraz do przyspieszenia układu  $a_0$  i jest do niego skierowana przeciwnie  $F_b = -ma_0$ .
- Prawo powszechnego ciążenia  $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$  stosuje się do wszystkich sił grawitacyjnych.
- Prawa Keplera
  - 1) Każda planeta krąży po orbicie eliptycznej, ze Słońcem w jednym z ognisk tej elipsy;
  - 2) Linia łącząca Słońce i planetę zakreśla równe pola w równych odstępach czasu;
  - 3) Sześciiany pólosi wielkich orbit dowolnych dwóch planet mają się do siebie jak kwadraty ich okresów obiegu (półos wielka jest połową najdłuższej cięciwy elipsy).
- Wektor natężenia pola grawitacyjnego  $\gamma(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}}{m} = -G \frac{M}{r^3} \mathbf{r}$  charakteryzuje przestrzeń otaczającą źródło siły grawitacyjnej (masę  $M$ ).

## Materiały dodatkowe do Modułu I

### Średnia ważona

W celu przybliżenia pojęcia średniej ważonej rozważmy prosty układ, w którym mamy do czynienia ze skrzynką zawierającą np. jabłka o różnej masie. W skrzynce mamy  $n_1$  jabłek, każde o masie  $m_1$ , oraz  $n_2$  jabłek, każde o masie  $m_2$ . Spróbujmy policzyć jaka jest średnia masa jabłka:

$$m_{\text{śred.}} = \frac{m_{\text{cak.}}}{n_{\text{cak.}}}$$

$$m_{\text{śred.}} = \frac{n_1 m_1 + n_2 m_2}{n_1 + n_2}$$

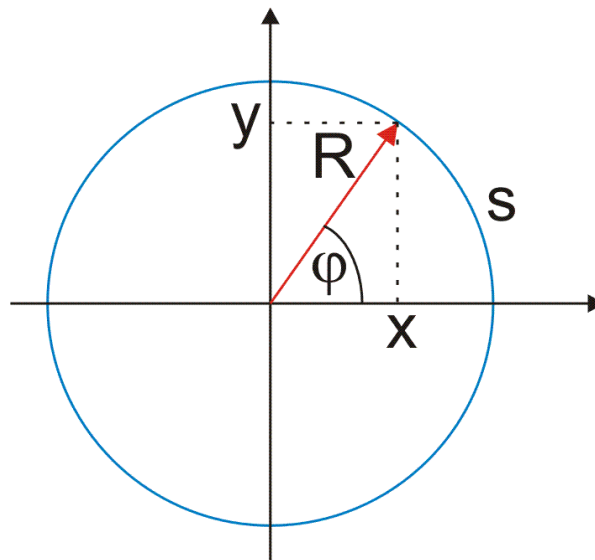
czyli

$$m_{\text{śred.}} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} m_1 + \frac{n_2}{n_1 + n_2} m_2$$

To jest średnia ważona (wagami są ułamki ilości jabłek w skrzynce). Uwzględniamy w ten sposób fakt, że liczby jabłek (wchodzące do średniej) nie są równe.

### Ruch przyspieszony po okręgu

Współrzędne  $x$ ,  $y$  punktu poruszającego się po okręgu można wyrazić za pomocą promienia  $R$  (o stałej wartości) oraz kąta  $\varphi$  (rysunek poniżej).



Rys. I.2.1. Współrzędne punktu poruszającego się po okręgu

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cos \varphi(t) \\ y(t) &= R \sin \varphi(t) \end{aligned} \tag{I.2.1}$$

Przy czym związek między drogą liniową  $s$ , a *drogą kątową*  $\varphi$ , jest dany z miary łukowej kąta  $\varphi = s/R$ . Różniczkując równania (I.2.1), możemy obliczyć zgodnie ze wzorami (3.1), składowe prędkości

$$\begin{aligned}v_x &= -R \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi = -R\omega \sin \varphi(t) \\v_y &= R \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi = R\omega \cos \varphi(t)\end{aligned}\tag{I.2.2}$$

gdzie tempo zmian drogi kątowej  $d\varphi/dt$  oznaczono jako *prędkość kątową*  $\omega$  (analogicznie do prędkości liniowej  $v$ )

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}\tag{I.2.3}$$

Różniczkując z kolei równania (I.2.2) otrzymamy zgodnie ze wzorami (3.1) składowe przyspieszenia

$$\begin{aligned}a_x &= -R \frac{d\omega}{dt} \sin \varphi - R\omega \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi = -R\alpha \sin \varphi - R\omega^2 \cos \varphi \\a_y &= R \frac{d\omega}{dt} \cos \varphi - R\omega \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi = R\alpha \cos \varphi - R\omega^2 \sin \varphi\end{aligned}\tag{I.2.4}$$

lub

$$\begin{aligned}a_x &= \frac{\alpha}{\omega} v_x - x\omega^2 \\a_y &= \frac{\alpha}{\omega} v_y - y\omega^2\end{aligned}\tag{I.2.5}$$

gdzie wprowadzono *przyspieszenie kątowe*  $\alpha$  wyrażające tempo zmian prędkości kątowej  $d\omega/dt$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}\tag{I.2.6}$$

Na podstawie powyższych zależności możemy obliczyć wektor całkowitego przyspieszenia

$$\mathbf{a} = \frac{\alpha}{\omega} \mathbf{v} - R\omega^2 \mathbf{e}_r\tag{I.2.7}$$

Wektor przyspieszenia całkowitego  $\mathbf{a}$  jest sumą dwóch wektorów: *przyspieszenia stycznego*  $\mathbf{a}_s$  (równoległego do wektora prędkości  $\mathbf{v}$ )

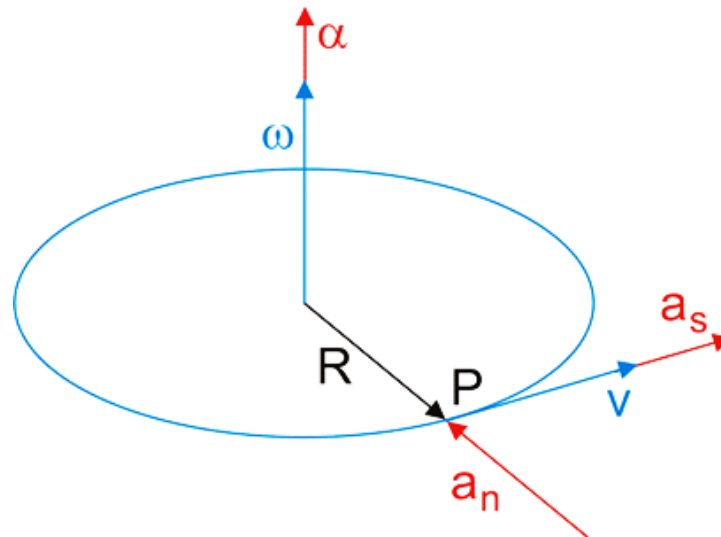
$$\mathbf{a}_s = \frac{\alpha}{\omega} \mathbf{v}\tag{I.2.8}$$



i *przyspieszenia normalnego*  $\mathbf{a}_n$  (przeciwnego do wektora  $\mathbf{R}$  czyli skierowanego do środka okręgu)

$$\mathbf{a}_n = -R\omega^2 \quad (\text{I.2.9})$$

Wektory prędkości liniowej i kątowej oraz wektory przyspieszeń stycznego, normalnego i kątowego, w ruchu przyspieszonym po okręgu, są pokazane na rysunku poniżej.



Rys. I.2.2. Wektory prędkości i przyspieszeń w ruchu przyspieszonym po okręgu

### ***Ruch w polu grawitacyjnym z uwzględnieniem oporu powietrza***

Naszym zadaniem jest opisanie ruchu ciała o masie  $m$  puszczonego z pewnej wysokości nad powierzchnią Ziemi, które spadając doznaje oporu powietrza. Z codziennych doświadczeń wiemy, że opór powietrza zależy od prędkości, na przykłady podczas jazdy na rowerze, i jest tym większy im szybciej jedziemy. Przyjmijmy więc, *założenie że siła oporu powietrza jest proporcjonalna do prędkości  $v$*

$$\mathbf{F}_{\text{oporu}} = -\gamma\mathbf{v} \quad (\text{I.3.1})$$

Znak minus wskazuje, że siła oporu działa przeciwnie do kierunku ruchu (wektora prędkości  $\mathbf{v}$ ).

Ruch ciała odbywa się pod działaniem dwóch sił: stałej siły grawitacji i zmiennej siły oporu. Wraz ze wzrostem prędkości rośnie siła oporu, aż do momentu gdy stanie się ona równa co do wartości sile grawitacji. Wówczas siła wypadkowa działająca na ciało staje się równa zero, prędkość dalej już nie rośnie i nie rośnie też siła oporu, zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki ciało porusza się od tej chwili ruchem jednostajnym, prostoliniowym. Graniczną prędkość  $v_{gr}$  jaką osiąga ciało obliczamy z warunku

$$\begin{aligned} mg &= \gamma v_{gr} \\ v_{gr} &= \frac{mg}{\gamma} \end{aligned} \quad (\text{I.3.2})$$

Teraz poszukujemy odpowiedzi na pytanie jak zmienia się prędkość podczas ruchu. W tym celu korzystamy z drugiej zasady dynamiki Newtona, która przyjmuje postać równania

$$ma = mg - \gamma v$$

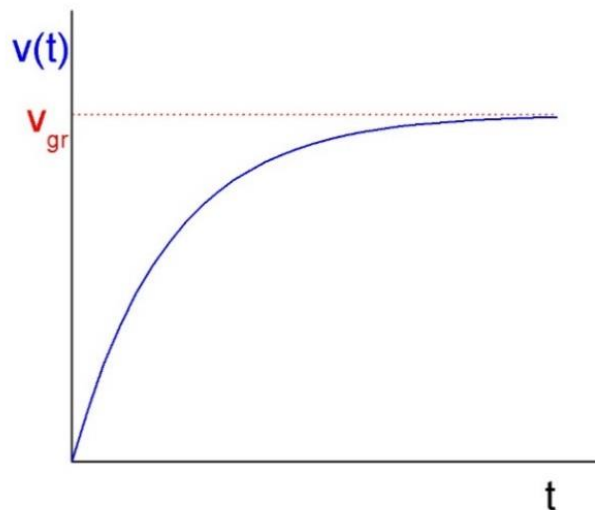
lub

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v \quad (\text{I.3.3})$$

Rozwiązaniem równania różniczkowego (I.3.3) jest funkcja  $v(t)$

$$v(t) = \frac{mg}{\gamma} \left( 1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t} \right) = v_{gr} \left( 1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t} \right) \quad (\text{I.3.4})$$

Zależność ta jest wykreślona na rysunku poniżej. Widać, że po odpowiednio długim czasie prędkość osiąga wartość graniczną.



Rys. I.3.1. Zależność prędkości od czasu

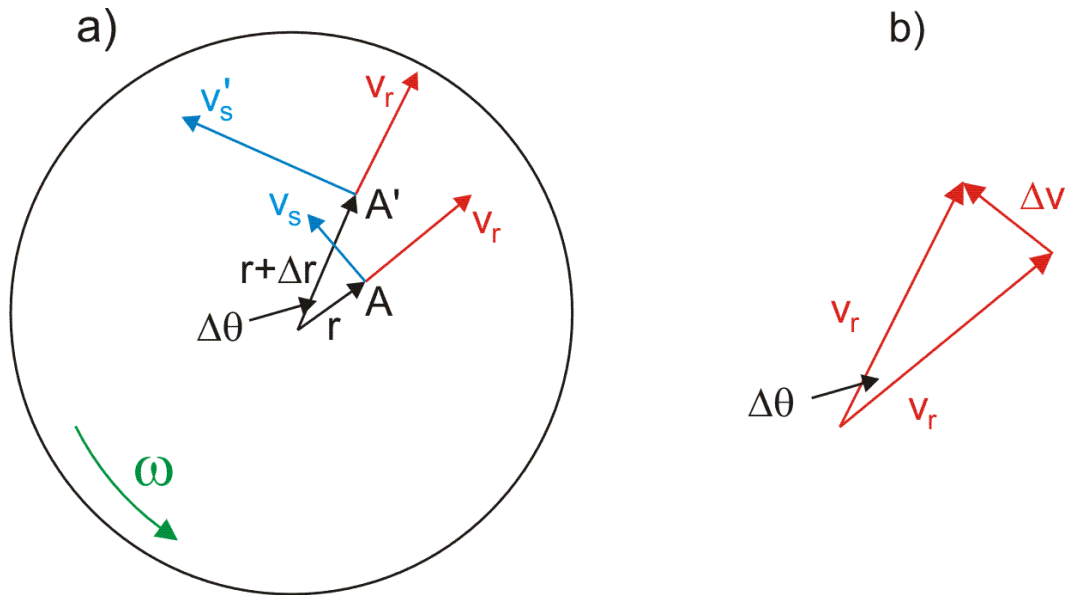
Otrzymaliśmy więc równanie  $v(t)$  opisujące ruch ciała.

### **Siła Coriolisa**

Tę siłę bezwładności musimy uwzględniać, gdy rozpatrujemy ruch postępowy ciała w obracającym się układzie odniesienia. Przykładem może być człowiek poruszający się po linii prostej (radialnie) od środka do brzegu obracającej się karuzeli. Na rysunku poniżej pokazana jest zmiana prędkości człowieka. Linia (promień) wzdłuż której porusza się człowiek zmienia swój kierunek (karuzela obraca się) o kąt  $\Delta\theta$  w czasie  $\Delta t$ . W tym samym czasie człowiek zmienia swoje położenie z punktu  $A$  do  $A'$ .

Linia (promień) wzdłuż której porusza się człowiek zmienia swój kierunek (karuzela obraca się) o kąt  $\Delta\theta$  w czasie  $\Delta t$ . W tym samym czasie człowiek zmienia swoje położenie z punktu  $A$  do  $A'$ .

Linia (promień) wzdłuż której porusza się człowiek zmienia swój kierunek (karuzela obraca się) o kąt  $\Delta\theta$  w czasie  $\Delta t$ . W tym samym czasie człowiek zmienia swoje położenie z punktu  $A$  do  $A'$ .




Rys. I.4.1. Zmiana prędkości człowieka poruszającego się po linii prostej (radialnie) od środka do brzegu karuzeli obracającej się z prędkością kątową  $\omega$

Obliczymy teraz zmianę jego prędkości radialnej (normalnej)  $v_r$  i stycznej  $v_s$ . Prędkość radialna zmienia swój kierunek. Prędkość styczna natomiast zmienia zarówno kierunek (przyspieszenie dośrodkowe) ale również wartość bo człowiek oddala się od środka (rośnie  $r$ ). Najpierw rozpatrzmy różnicę prędkości  $v_r$  w punktach A i A' pokazaną na rysunku (b) po prawej stronie. Dla małego kąta  $\Delta\theta$  (tzn. małego  $\Delta t$ ) możemy napisać

$$\Delta v_r = v_r \Delta\theta \quad (\text{I.4.1})$$

Jeżeli obustronnie podzielimy równanie (I.4.1) przez  $\Delta t$  to w granicy  $\Delta t \rightarrow 0$  otrzymamy

$$a_1 = \frac{dv_r}{dt} = v_r \frac{d\theta}{dt} = v_r \omega \quad (\text{I.4.2})$$

gdzie wielkość  $\omega = d\theta/dt$  jest definiowana jako *prędkość kątowa* .

W tym ruchu zmienia się również prędkość styczna bo człowiek porusza się wzdłuż promienia. W punkcie A prędkość styczna  $v_s = \omega r$ , a w punkcie A'  $v_s = \omega(r + \Delta r)$ . Zmiana prędkości stycznej wynosi więc



$$\Delta v_s = \omega(r + \Delta r) - \omega r = \omega \Delta r \quad (\text{I.4.3})$$

Jeżeli obustronnie podzielimy równanie (I.4.3) przez  $\Delta t$  to w granicy  $\Delta t \rightarrow 0$  otrzymamy

$$a_2 = \frac{dv_s}{dt} = \omega \frac{dr}{dt} = \omega v_r \quad (\text{I.4.4})$$

Przyspieszenia  $a_1$  i  $a_2$  mają ten sam kierunek (równoległy do  $v_s$ ) więc przyspieszenie całkowite jest równe sumie

$$a = a_1 + a_2 = 2\omega v_r \quad (\text{I.4.5})$$

Przyspieszenie to jest nazywane *przyspieszeniem Coriolisa* . Pochodzi ono stąd, że nawet przy stałej prędkości kątowej  $\omega$  rośnie prędkość liniowa człowieka bo rośnie  $r$ . Gdyby człowiek stał na karuzeli to obserwator stojący na Ziemi mierzyłby tylko przyspieszenie dośrodkowe ( $\omega^2 r$ ) skierowane do środka wzdłuż promienia. Natomiast gdy człowiek idzie na zewnątrz to obserwator rejestruje także przyspieszenie Coriolisa (o kierunku równoległym do  $v_s$ ). Oczywiście musi istnieć siła działająca w tym kierunku. Jest nią w tym przypadku siła tarcia między podłogą i nogami idącego człowieka. Jednak obserwator związany z karuzelą nie widzi ani przyspieszenia dośrodkowego ani przyspieszenia Coriolisa, człowiek poruszający się wzdłuż promienia jest w stanie równowagi w układzie karuzeli. A przecież istnieje realnie odczuwalna (rzeczywista) siła tarcia. Żeby wyeliminować tę rozbieżność obserwator stojący na karuzeli wprowadza dwie siły pozorne równoważące siłę tarcia. Jedna to siła odśrodkowa, a druga to siła Coriolisa. Siła odśrodkowa działa radialnie na zewnątrz a siła Coriolisa stycznie ale przeciwnie do  $v_s$ . Ogólnie, na ciało o masie  $m$  poruszające się ruchem postępowym z prędkością  $v$  w obracającym się układzie odniesienia działa siła bezwładności zwana *siłą Coriolisa*  $F_c$  

$$F_c = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (\text{I.4.6})$$

Ziemia nie jest idealnym układem inercjalnym ponieważ wiruje. W wyniku tego obrotu w zjawiskach zachodzących na Ziemi obserwujemy siłę Coriolisa. Przykładowo, rzeki płynące na półkuli północnej podmywają silniej prawy brzeg. Również ciała spadające swobodnie odchylają się od pionu pod działaniem tej siły. Jednak w większości rozpatrywanych przez nas zjawisk można zaniedbać wpływ ruchu Ziemi na ich przebieg.

### **Prawa Keplera a zasady dynamiki Newtona**

Pierwsze prawo Keplera wynika z tego, że siła grawitacyjna jest siłą centralną, tj. taką, która zawsze skierowana jest do określonego punktu – centrum siły. Jeżeli początek układu współrzędnych umieścimy w centrum siły, to siłę centralną można zapisać ogólnie w postaci

$$\mathbf{F} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{I.5.1})$$

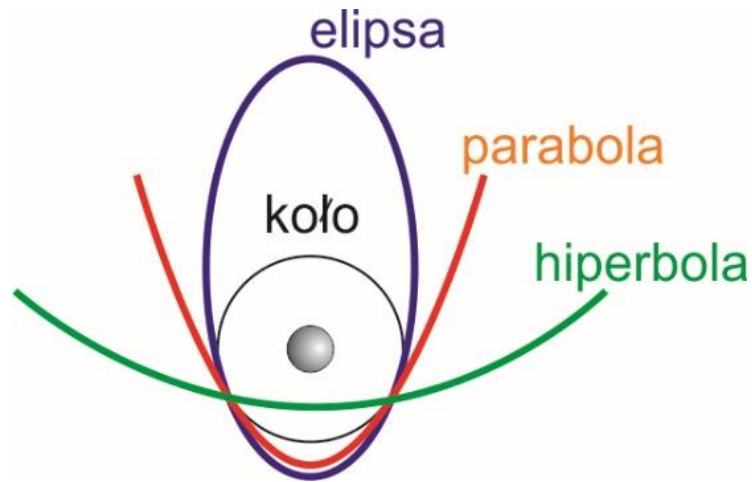
lub dla siły grawitacji

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{I.5.2})$$

Równanie opisujące ruch pod wpływem siły grawitacji ma więc postać

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{I.5.3})$$

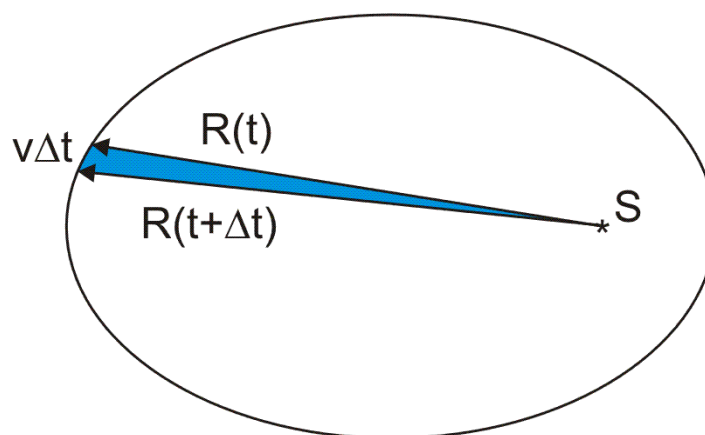
Rozwiązaniem tego równania są krzywe stożkowe tj. krzywe będące przekrojami stożka, takie jak elipsa, parabola, hiperbola (rysunek poniżej).



Rys. I.5.1. Krzywe stożkowe – tor ruchu w polu siły grawitacji

Teraz przejdziemy do drugiego prawa Keplera. Na rysunku I.5.1 zaznaczona jest powierzchnia zakreślana w czasie  $\Delta t$  przez linię łączącą planetę ze Słońcem. Jeżeli weźmiemy bardzo krótki przedział czasu  $dt$  ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) to zaznaczone pole  $dS$  jest powierzchnią trójkąta o podstawie równej długości zakreślonego łuku ( $vdt$ ) i wysokości równej promieniowi  $R$

$$dS = \frac{1}{2} v dt R \quad (I.5.4)$$



Rys. I.5.2. Powierzchnia zakreślana w czasie  $\Delta t$  przez linię łączącą planetę ze Słońcem

Z równania (I.5.4) wynika, że chwilowa prędkość polowa (prędkość z jaką promień  $R$  zakreśla powierzchnię) jest równa

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} vR \quad (I.5.5)$$

Z definicji siły centralnej (I.5.1) wynika że *moment siły*  $\tau$  centralnej jest równy zero

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) \frac{f(r)}{r} = 0 \quad (I.5.6)$$

z czego wynika, że *moment pędu*  $L$  jest zachowany w ruchu pod wpływem siły centralnej (np. w ruchu planety w jej obiegu wokół Słońca)

$$L = mvR = \text{const.} \quad (I.5.7)$$

Łącząc równania (I.5.5) i (I.5.7) otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{const.} \quad (I.5.8)$$

Otrzymane równanie (I.5.8) wyraża drugie prawo Keplera.

Na koniec rozpatrzmy trzecie prawo Keplera dla planet poruszających się po orbitach kołowych. Korzystając z otrzymanego uprzednio wzoru (6.8) na masę Słońca otrzymujemy dla pierwszej planety krążącej wokół Słońca

$$M_s = \frac{4\pi^2 R_1^3}{GT_1^2} \quad (I.5.9)$$

a dla drugiej

$$M_s = \frac{4\pi^2 R_2^3}{GT_2^2} \quad (I.5.10)$$

Porównując te równania stronami otrzymujemy

$$\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2} \quad \text{czyli} \quad \frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \quad (I.5.11)$$

## Rozwiązania ćwiczeń z modułu I

### Ćwiczenie 2.1

ciało	$x_0$ [m]	$v$ [m/s]
1	-1	1.5
2	0	0.67

### Ćwiczenie 2.2

Całkowita droga przejechana przez samochód:  $x_1 + x_2 = 20 \text{ km} + 20 \text{ km} = 40 \text{ km}$

Całkowity czas jazdy samochodu :  $t_1 = x_1/v_1 = (20 \text{ km})/(40 \text{ km/h}) = 0.5 \text{ h}$

$t_2 = x_2/v_2 = (20 \text{ km})/(80 \text{ km/h}) = 0.25 \text{ h}$

$t = t_1 + t_2 = 0.75 \text{ h}$

Prędkość średnia (równanie 2.4):  $(40 \text{ km})/(0.75 \text{ h}) = \mathbf{53.33 \text{ km/h}}$

### Ćwiczenie 2.3

Prędkość średnia wynosi 10 m/s.

Korzystając z równania (2.4):  $x - x_0 = 10 \text{ m/s} \cdot 5 \text{ s} = 50 \text{ m}$ .

To najkrótsza droga hamowania.

### Ćwiczenie 2.4

Dane:  $v_0 \Delta t$ ,  $g$  - przyspieszenie ziemskie.

Korzystając z równania (2.10) otrzymujemy:  $y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$

*Wektor położenia*  $y$  (opisujący wysokość ponad poziom  $y = 0$ ) jest w dowolnej chwili sumą dwóch wektorów  $v_0 t$  oraz  $gt^2/2$ . Powyższe równanie opisuje więc zarówno ruch ciał w górę jak i w dół. Oczywiście opis matematyczny musi odzwierciedlać sytuację fizyczną. W rzucie pionowym ciało przebywa na tej samej wysokości ( $y = h$ ) dwa razy w dwóch różnych chwilach (pierwszy raz przy wznoszeniu, drugi przy opadaniu). Trójmian kwadratowy

$$h - v_0 t + \frac{gt^2}{2} = 0$$

ma dwa rozwiązania  $t_1$  i  $t_2$ . Z treści zadania wynika, że  $t_1 - t_2 = \Delta t$ . Z tego warunku otrzymujemy rozwiązanie:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{(\Delta t)^2 g}{8}$$

**Ćwiczenie 3.1**

Dane:  $v_0$ ,  $\theta$ ,  $g$  - przyspieszenie ziemskie.

W celu znalezienia zasięgu rzutu podstawiamy do równania (3.11)  $y = 0$  i otrzymujemy dwa miejsca, w których parabola lotu przecina oś  $x$ . Pierwsze,  $x = 0$ , odpowiada punktowi z którego wylatuje ciało, drugie  $x = Z$  poszukiwanemu zasięgowi rzutu

$$Z = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$$

Z powyższego równania wynika, że zasięg  $Z$  osiąga maksimum dla kąta  $\theta = 45^\circ$ , bo wtedy funkcja  $\sin 2\theta$  ma maksymalną wartość równą 1.

**Ćwiczenie 3.2**

Dane:  $R_Z = 6370 \text{ km}$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $T = 24 \text{ h} = 8.64 \cdot 10^4 \text{ s}$

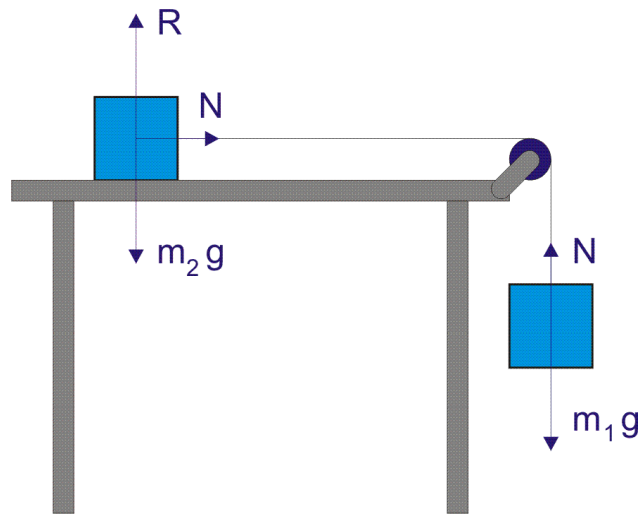
Podstawiając te dane do równania (3.16)  $a_n = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$

otrzymujemy  $a_n = 0.034 \text{ m/s}^2$  co stanowi 0.35 % przyspieszenia grawitacyjnego  $g$ .

**Ćwiczenie 4.1**

Dane:  $m_1 = m_2$ , przyspieszenie grawitacyjne  $g$ .

Na rysunku zaznaczamy siły działające w układzie



Stosujemy drugą zasadę dynamiki Newtona do każdego ciała osobno:

$$m_1 a = m g - N$$

$$m_2 a = N$$

rozwiązując ten układ równań i uwzględniając, że  $m_1 = m_2 = m$  otrzymujemy

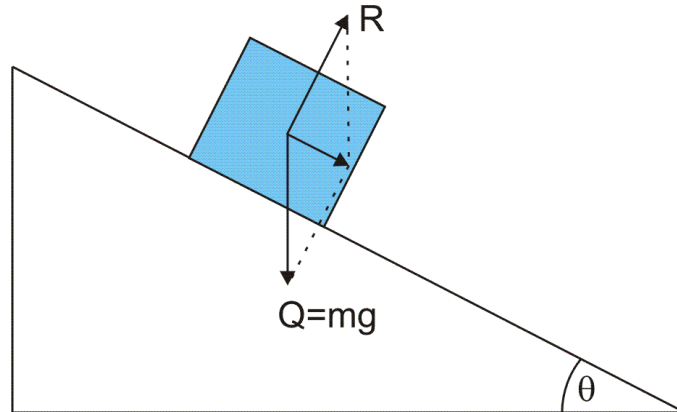
$$a = \frac{g}{2} \quad N = \frac{mg}{2}$$



**Ćwiczenie 4.2**

Dane:  $m$ ,  $\theta$ , przyspieszenie grawitacyjne  $g$

Na rysunku poniżej pokazane są siły działające na klocek: ciężar klocka  $Q = mg$  i siła reakcji  $R$  (na nacisk klocka) wywierana na klocek przez płaszczyznę równi.



Żeby wyliczyć siłę wypadkową należy dodać wektorowo te dwie siły

$$ma = Q + R$$

Zaczynamy od wyboru układu współrzędnych. Wygodnie jest tak wybrać układ, żeby jedna oś, na przykład  $x$ , była skierowana wzdłuż równi, a druga (oś  $y$ ) prostopadłe do niej. Wtedy wystarczy rozłożyć na składowe *tylko jedną* siłę  $Q$ . W tak wybranym układzie współrzędnych składowe ciężaru wynoszą

$$Q_x = mg \sin \theta$$

$$Q_y = mg \cos \theta$$

Składowa  $Q_y$  (nacisk na równię) jest równoważona przez reakcję równi  $R$ . Natomiast składowa  $Q_x$  jest odpowiedzialna za przyspieszenie ciała. Możemy więc zastosować drugą zasadę dynamiki Newtona dla każdej składowej

$$ma_x = mg \sin \theta$$

$$ma_y = R - mg \cos \theta$$

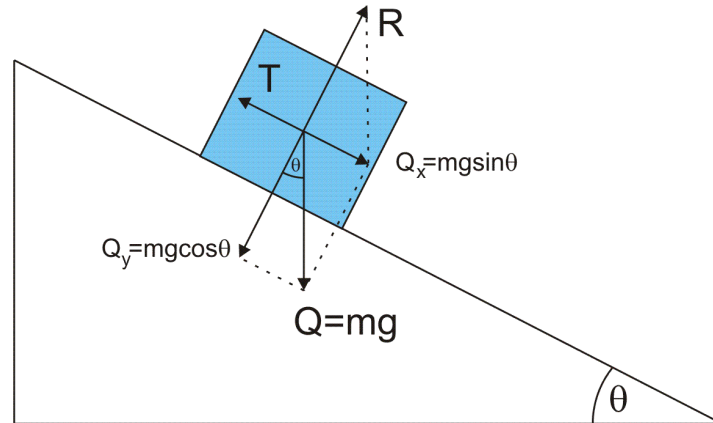
Stąd wynika, że przyspieszenie ciała wynosi  $a = g \sin \theta$  i jest skierowane wzdłuż równi.

Już Galileusz korzystał z równi pochyłej do analizy ruchu przyspieszonego. Regulując wysokość równi (kąt  $\theta$ ) możemy zmniejszać prędkość ruchu i tym samym ułatwić jego pomiar.

**Ćwiczenie 5.1**

Dane;  $m$ ,  $\mu_s$ , przyspieszenie grawitacyjne  $g$ .

Klocek spoczywa na równi bo oprócz siły grawitacji i reakcji podłoża działa na niego również siła tarcia statycznego (rysunek).



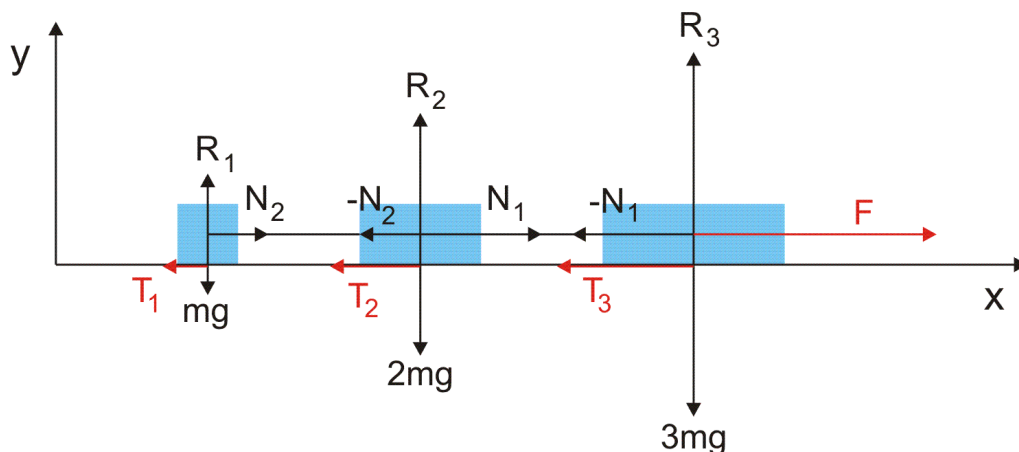
Siła reakcji  $R$  równoważy składową ciężaru prostopadłą do powierzchni równi (nacisk)  $R = Q_y = F_N$ , natomiast siła tarcia  $T$  równoważy składową równoległą do równi  $T = Q_x$ . Przy granicznym (maksymalnym) kącie

$$\begin{aligned} mg \sin \theta_{gr} &= \mu_s F_N \\ mg \sin \theta_{gr} &= \mu_s Q_y \\ mg \sin \theta_{gr} &= \mu_s mg \cos \theta_{gr} \end{aligned}$$

Skąd otrzymujemy wartość granicznego kąta  $tg \theta_{gr} = \mu_s$ . Pomiar kąta  $\theta_{gr}$  jest prostą metodą doświadczalną wyznaczenia współczynnika tarcia  $\mu_s$

### Ćwiczenie 5.2

Dane:  $F$ ,  $m_1=m$ ,  $m_2=2m$ ,  $m_3=3m$ ,  $\mu_k$ , przyspieszenie grawitacyjne  $g$   
Wykonujemy rysunek i zaznaczamy siły działające w układzie



Zapisujemy drugą zasadę dynamiki Newtona do każdego ciała osobno

$$\begin{aligned} 3ma &= F - N_1 - T_3 \\ 2ma &= N_1 - N_2 - T_2 \\ ma &= N_2 - T_1 \end{aligned}$$

Następnie, korzystając z tego, że

$$T_1 = \mu_k mg$$

$$T_2 = \mu_k 2mg$$

$$T_3 = \mu_k 3mg$$

przepisujemy równania dynamiki w postaci

$$3ma = F - N_1 - \mu_k 3mg$$

$$2ma = N_1 - N_2 - \mu_k 2mg$$

$$ma = N_2 - \mu_k mg$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy poszukiwane wielkości

$$a = \frac{F - \mu_k 6mg}{6m} = \frac{F}{6m} - \mu_k g$$

$$N_1 = \frac{F}{2} \quad N_2 = \frac{F}{6}$$

### Ćwiczenie 6.1

Dane:  $R_K = 1740$  km,  $M_K = 7.35 \cdot 10^{22}$  kg,  $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>

Do obliczenia okresu obiegu Księżyca przez statek Apollo korzystamy z równania (6.7), które przyjmuje postać

$$G \frac{M_K m}{R^2} = m \left( \frac{4\pi^2 R}{T^2} \right)$$

gdzie  $m$  jest masą pojazdu kosmicznego. Po przekształceniach otrzymujemy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_K}}$$

a po podstawieniu danych  $T_K = 6.5 \cdot 10^3$  s czyli 108 minut.

### Ćwiczenie 6.2

Dane:  $R = 1.5 \cdot 10^8$  km =  $1.5 \cdot 10^{11}$  m,  $T = 1$  rok =  $3.154 \cdot 10^7$  s.

Masę Słońca obliczamy z zależności (6.8)  $M_S = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$

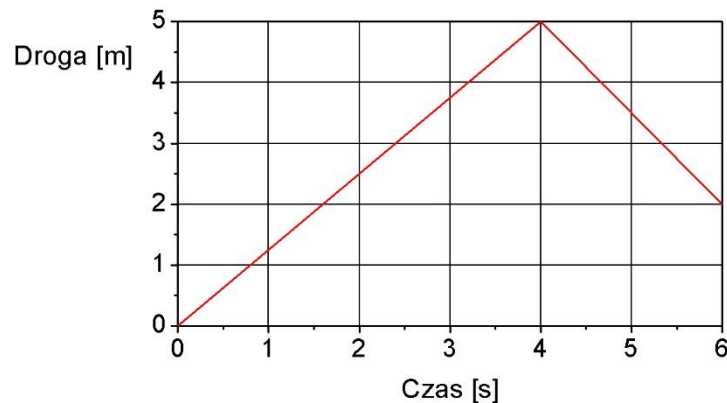
Otrzymujemy  $M_S = 2 \cdot 10^{30}$  kg.

Natomiast masę Ziemi obliczmy ze wzoru (6.4)  $M_Z = \frac{gR_Z^2}{G}$

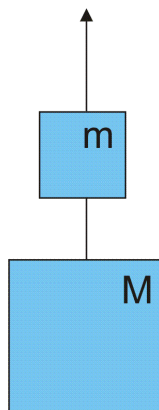
Otrzymujemy  $M_Z = 5.97 \cdot 10^{24}$  kg oraz  $M_S / M_Z = 3.3 \cdot 10^5$ .

## Test I

- Na rysunku poniżej przedstawiono wykres zależności drogi od czasu dla pewnego ciała. Oblicz prędkość ciała w trzeciej i piątej sekundzie ruchu oraz prędkość średnią dla całego ruchu.



- Ze skrzyżowania rusza samochód w chwili, kiedy na następnym skrzyżowaniu odległym o  $d = 0.5$  km zapala się zielone światło. Cykl zmiany światel jest następujący: zielone-żółte-czerwone-zielone-żółte-czerwone itd., a czas świecenia się światel przedstawia się następująco: zielone- $t_1 = 25$  s, żółte- $t_2 = 3$  s, czerwone- $t_3 = 20$ . Z jaką prędkością (średnią) powinien jechać samochód, aby na najbliższe skrzyżowanie wjechał przy zielonym świetle w dowolnym kolejnym cyklu zmiany światel?
- Z wieży wyrzucono jednocześnie dwa ciała z jednakową prędkością  $v_0$ , jedno pionowo do góry, a drugie pionowo w dół. Jak zmienia się z biegiem czasu odległość między tymi ciałami?
- Zależność wektora położenia ciała od czasu dana jest wzorem:  $\mathbf{r}(t) = [1 + t, 2t - t^2]$ . Oblicz wartości bezwzględne prędkości początkowej i przyspieszenia.
- Dwa klocki, o masach  $m = 1$  kg i  $M = 2$  kg, połączone sznurkiem są podnoszone pionowo do góry ze stałą prędkością (rysunek poniżej). Jaka jest siła przyłożona do górnego sznurka, a jakie jest napięcie sznurka łączącego oba klocki?



6. Odpowiedz na pytania (odpowiedź uzasadnij). Czy ciało może mieć zerową prędkość, a niezerowe przyspieszenie? Jeżeli wartość prędkości ciała pozostaje stała, to czy przyspieszenie tego ciała musi być równe zeru?
7. Kruszenie kopalin silnym strumieniem wody jest jedną z metod stosowanych w górnictwie. Oblicz siłę, z jaką działa strumień wody o gęstości  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$  i przekroju poprzecznym  $S = 0.01 \text{ m}^2$  poruszający się z prędkością  $v = 50 \text{ m/s}$ . Zauważ, że przy zderzeniu ze ścianą woda traci całkowicie swój pęd.
8. Dwie nieruchome łodzie znajdujące się na jeziorze połączone są długim sznurem. Człowiek znajdujący się na pierwszej łodzi ciągnie sznur działając siłą  $F = 50 \text{ N}$ . Oblicz prędkość względną obu łodzi po czasie  $t = 4 \text{ s}$  działania siły. Ciężar pierwszej łodzi wraz z człowiekiem wynosi  $Q_1 = 2000 \text{ N}$ , a ciężar drugiej łodzi  $Q_2 = 800 \text{ N}$ . Opory ruchu można pominąć.
9. Sanki ześlizgują się z góry o wysokości  $h = 4 \text{ m}$  i kącie nachylenia  $\alpha = 30^\circ$  i dalej z rozpędu ślizgają się jeszcze po poziomym śniegu poza nią, zatrzymując się w odległość  $10 \text{ m}$  od podnóża góry. Ile wynosi współczynnik tarcia sanek o śnieg?
10. Platforma kolejowa jest załadowana skrzyniami. Współczynnik tarcia statycznego między skrzyniami, a podłogą platformy wynosi  $0.3$ . Pociąg, w którego składzie znajduje się platforma, jedzie z prędkością  $60 \text{ km/h}$ . Na jakim najkrótszym odcinku można zatrzymać pociąg, żeby nie spowodowało to ślizgania się skrzyń?
11. Jak daleko od Ziemi w kierunku Słońca musi znajdować się ciało, żeby przyciąganie grawitacyjne Słońca zrównoważyło przyciąganie ziemskie? Słońce znajduje się w odległości  $1.49 \cdot 10^8 \text{ km}$  od Ziemi, a jego masa równa się  $3.24 \cdot 10^5$  masy Ziemi.

# MODUŁ II

## 7 Praca i energia

Znajomość zagadnień związanych z szeroko rozumianym pojęciem energii jest konieczna dla wszelkich rozważań zarówno technologicznych, ekonomicznych, ekologicznych jak i społecznych. Żeby się o tym przekonać wystarczy sprawdzić jak istotną pozycją w budżecie domowym stanowią wydatki związane z zapotrzebowaniem na energię (zakupy żywności, opłaty za prąd, gaz, ogrzewanie czy paliwo do samochodu).

Z energią związana jest najważniejsza chyba zasada całej fizyki - zasada zachowania energii. Nakłada ona sztywne granice na przetwarzanie energii i jej wykorzystanie. Do zasady tej będziemy się odwoływali wielokrotnie w kolejnych rozdziałach dotyczących różnych zagadnień fizyki. W mechanice zasada zachowania energii pozwala obliczać w bardzo prosty sposób ruch ciał, stanowi alternatywę do stosowania zasad dynamiki Newtona.

### 7.1 Praca wykonana przez siłę stałą

W najprostszym przypadku, punkt materialny przemieszcza się pod wpływem *stałej siły*  $F$ . Traktując przesunięcie  $s$  jako wektor o długości równej drodze jaką przebywa ten punkt i kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu, możemy zdefiniować pracę  $W$ .



#### Definicja

*Praca  $W$  wykonana przez stałą siłę  $F$  jest iloczynem skalarnym tej siły  $F$  i wektora przesunięcia  $s$ .*

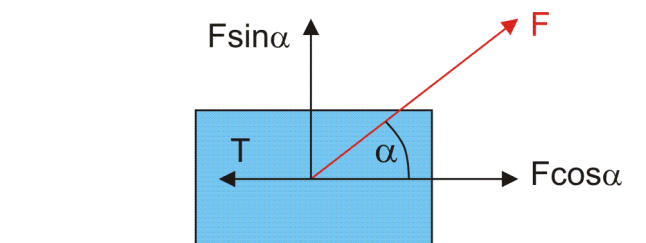
$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F s \cos \alpha \quad (7.1)$$

gdzie  $\alpha$  jest kątem między kierunkami siły i przesunięcia. Zwróćmy uwagę, że kąt  $\alpha$  może być różny od zera bo stała siła nie musi mieć kierunku zgodnego z kierunkiem ruchu punktu materialnego. Dzieje się tak gdy działają jeszcze inne siły (np. ciężar, tarcie). Ale nawet gdy działała tylko jedna siła to i tak ciało nie musi poruszać się w kierunku jej działania (np. siła grawitacji w rzucie ukośnym). Rozpatrzmy teraz następujący przykład.



#### Przykład

Ciało o masie  $m$  (na przykład sanki) jest ciągnięte po poziomej powierzchni stałą siłą  $F$  (rysunek poniżej), a sznurek, za który ciągniemy tworzy kąt  $\alpha$  z poziomem.



Rys. 7.1. Ciało o masie  $m$  ciągnięte po poziomej powierzchni stałą siłą  $F$  tworzącą kąt  $\alpha$  z poziomem

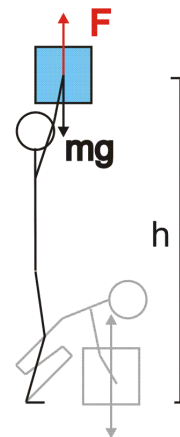
Praca jaką wykonał człowiek ciągnący to ciało na drodze  $s$  jest, zgodnie z równaniem (7.1), równa  $Fs\cos\alpha$ . Zauważmy, że pracę wykonuje tylko składowa  $F_s = F\cos\alpha$  styczna do przesunięcia  $s$ . Natomiast składowa pionowa  $F\sin\alpha$  działa w górę zmniejszając nacisk ciała na powierzchnię.

Ze wzoru (7.1) wynika, że praca może przyjmować zarówno wartości dodatnie gdy  $\alpha < 90^\circ$ , jak i ujemne gdy  $\alpha > 90^\circ$ . W omawianym przykładzie, poza siłą ciągnącą ciało, działa jeszcze siła tarcia kinetycznego  $T$  (rysunek 7.1) przeciwstawiająca się ruchowi ( $\alpha = 180^\circ$ ). Praca wykonana przez siłę tarcia jest ujemna  $W = \mathbf{T} \cdot \mathbf{s} = Ts \cos 180^\circ = -Ts$ . W szczególności praca może być równa zero, gdy kierunek siły jest prostopadły do kierunku przesunięcia ( $\alpha = 90^\circ$ ,  $\cos 90^\circ = 0$ ). Przykładem może być siła dośrodkowa. Przyspieszenie dośrodkowe jest prostopadłe do toru więc siła dośrodkowa nie wykonuje pracy.

Rozpatrzmy jeszcze raz powyższy przykład ale w sytuacji gdy człowiek ciągnący ciało porusza się ze stałą prędkością. Z pierwszej zasady dynamiki wynika, że wtedy  $F_{\text{wyp}} = 0$ . W kierunku poziomym  $F_{\text{wyp}} = F\cos\alpha - T = 0$ , zatem "dodatnia" praca wykonana przez człowieka jest równa co do wartości bezwzględnej "ujemnej" pracy wykonanej przez siłę tarcia.

Z podobną sytuacją mamy do czynienia przy podnoszeniu w górę (ze stałą prędkością) ciała o masie  $m$  na wysokość  $h$  (rysunek 7.2 obok).

Zauważmy, że w trakcie podnoszenia ciała człowiek działa siłą  $F$  równą ciężarowi ale przeciwnie skierowaną, więc "dodatnia" praca  $W = mgh$  wykonana na drodze  $h$  przez siłę  $F$  (człowieka) jest równa co do wartości "ujemnej" pracy wykonanej przez siłę ciężkości.



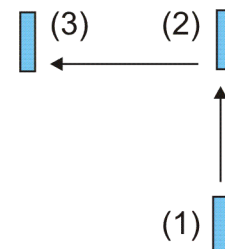
Rys. 7.2. Podnoszenie ciężaru na wysokość  $h$



### Ćwiczenie 7.1

Teraz gdy znasz już definicję pracy spróbuj samodzielnie odpowiedzieć na proste pytania związane z następującym ćwiczeniem:

Wyobraź sobie, że podnosisz książkę na półkę, tak jak pokazano to na rysunku obok. W pierwszym kroku podnosisz książkę z położenia (1) i umieszczasz ją na półce (położenie 2). Następnie przenosisz książkę poziomo ze stałą prędkością na inne miejsce na półce (położenie 3). Jaki znak ma praca wykonana przez ciebie na odcinku 1-2 i 1-3, a jaki znak ma praca wykonana przez siłę ciężkości? Tarcie i wszelkie opory pomijamy.

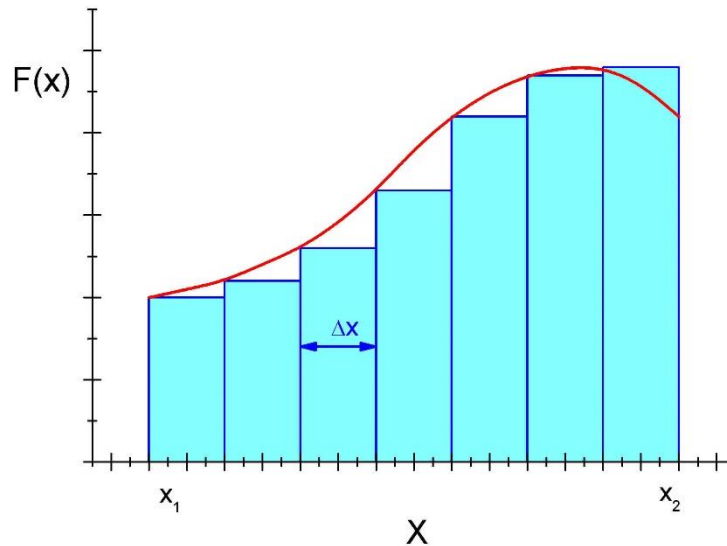


Wzór (7.1) pozwala obliczyć pracę dla siły stałej; do obliczeń "podstawiamy" za  $F$  konkretną jej wartość. Teraz poznamy jak obliczyć pracę gdy siła zmienia się, przyjmuje różne wartości.



## 7.2 Praca wykonana przez siłę zmienną

Rozważmy teraz siłę będącą funkcją położenia  $F(x)$ , której kierunek jest zgodny z osią  $x$ . Szukamy pracy jaką wykona ta siła przy przesuwaniu ciała od położenia  $x_1$  do położenia  $x_2$ . Jak już mówiliśmy wzór  $W = F \cdot s$  pozwala obliczyć pracę dla stałej siły  $F$ . Natomiast gdy wartość siły zmienia się, na przykład tak jak na rysunkach 7.3 (linia ciągła) trzeba stosować inny algorytm.



Rys. 7.3a. Zmienna siła  $F(x)$  przybliżona ciągiem stałych wartości  $F_i$

Zacznijmy od zastosowania przybliżenia. Dzielimy całkowite przemieszczenie  $x$  na  $n$  jednakowych odcinków  $\Delta x$  tak jak na rysunku. Wewnątrz takiego przedziału  $\Delta x$  przyjmujemy (i to jest to przybliżenie), że siła jest stała i możemy już teraz skorzystać ze wzoru (7.1) do obliczenia pracy w dowolnym przedziale  $\Delta x$

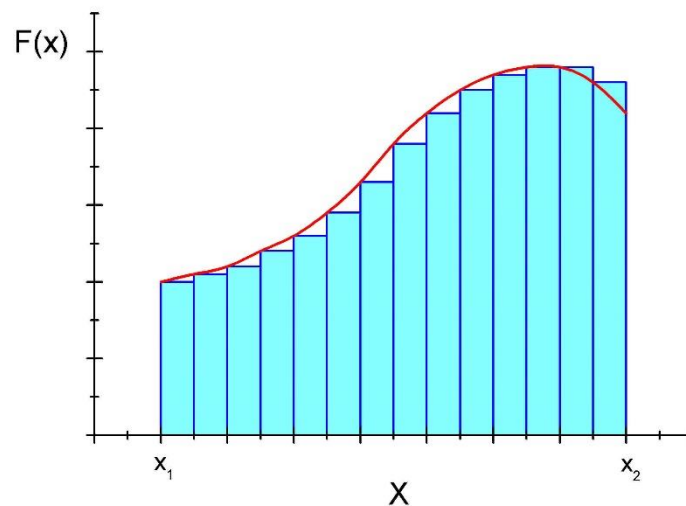
$$\Delta W_i = F_i \Delta x_i \quad (7.2)$$

gdzie  $F_i$  jest wartością siły na  $i$ -tym odcinku  $\Delta x$ . Następnie sumujemy prace wykonane na poszczególnych odcinkach otrzymując całkowitą pracę

$$W = \sum_{i=1}^n F_i \Delta x \quad (7.3)$$

Zwróćmy uwagę, że od strony czysto formalnej *liczenie pracy jest równoważne liczeniu sumy powierzchni* kolejnych prostokątów o podstawie  $\Delta x$  i wysokości  $F_i$ .

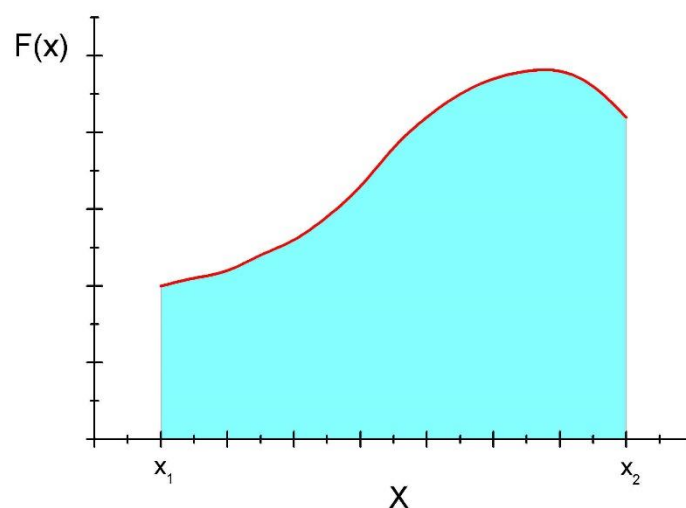
Możemy "poprawić" nasze przybliżenie. W tym celu, w kolejnym kroku dzielimy przedział  $(x_1, x_2)$  na więcej (mniejszych) odcinków  $\Delta x$ , tak jak pokazano na rysunku 7.3b. Widać, że nowe przybliżenie jest lepsze. Wartości sił  $F_i$  dla poszczególnych przedziałów są znacznie bliższe rzeczywistej funkcji  $F(x)$ , a co za tym idzie obliczona (wzór 7.3) wartość pracy całkowitej jest bliższa wartości rzeczywistej (pola powierzchni prostokątów bardziej pokrywają się z polem pod krzywą).

Rys. 7.3b. Zmienna siła  $F(x)$  przybliżona ciągiem stałych wartości  $F_i$ 

Widać, że rozwiązaniem problemu jest przejście (w granicy)  $\Delta x \rightarrow 0$ . Stosujemy tę samą procedurę obliczając całkowitą pracę

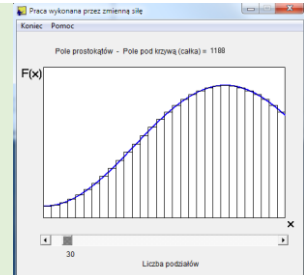
$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} F_i \Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (7.4)$$

Tak w matematyce definiujemy całkę. Całkowanie funkcji  $F(x)$  w zadanych granicach odpowiada liczeniu *poli powierzchni pod krzywą  $F(x)$*  w danym przedziale (patrz rysunek 7.3c). Ta procedura odpowiada też z definicji liczeniu *wartości średniej*  $W = \bar{F}(x_2 - x_1)$  co zgadza się z intuicyjnym podejściem.

Rys. 7.3c. Pole powierzchni pod krzywą  $F(x)$  równe liczbowo pracy wykonanej przez siłę na odcinku  $x_1 - x_2$



Możesz prześledzić jak dzielenie przedziału  $(x_1, x_2)$  na więcej (mniejszych) odcinków  $\Delta x$  wpływa na dokładność obliczeń pracy wykonanej przez zmienną siłę  $F(x)$ . korzystając z programu komputerowego „Praca wykonana przez siłę zmienną” dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.

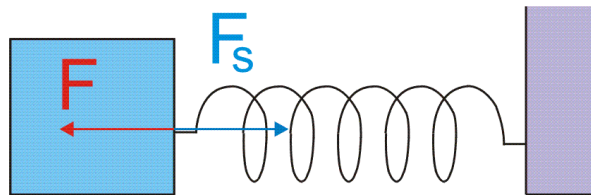


Żeby obliczyć pracę wykonaną przez zmienną siłę trzeba albo umieć *obliczyć całkę* (ewentualnie poszukać rozwiązania w tablicach) lub umieć *obliczyć pole powierzchni pod krzywą* co w szczególnych przypadkach nie jest trudne.



### Przykład

Rozważmy sprężynę zamocowaną jednym końcem i rozciągniętą siłą  $F$  tak, że jej drugi koniec przemieszcza się o  $x$ . Siła wywierana przez sprężynę  $F_s = -kx$  jest siłą przywracającą równowagę. Aby rozciągnąć sprężynę musimy zatem przyłożyć siłę równą co do wartości lecz przeciwnie skierowaną tzn.  $F = kx$ .



Rys. 7.4. Rozciąganie sprężyny siłą  $F$

Znamy już postać funkcji  $F(x)$  i możemy teraz korzystając z równania (7.4) obliczyć pracę wykonaną przy rozciąganiu sprężyny

$$W = \int_0^x F(x) dx = \int_0^x (kx) dx = \frac{kx^2}{2} \Big|_0^x = \frac{kx^2}{2} \quad (7.5)$$



### Ćwiczenie 7.2

Sprawdź, czy uzyskana wartość jest poprawna. W tym celu oblicz bezpośrednio pole pod wykresem funkcji  $F(x)$ . Wynik obliczeń zapisz poniżej i porównaj z wynikiem całkowania.

$S =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

### 7.3 Energia kinetyczna

Rozpatrzmy jeszcze raz ruch ciała pod wpływem stałej, niezrównoważonej siły  $F$  i obliczmy pracę jaką wykonuje ona na drodze  $s$ . Stałość siły oznacza, że ruch odbywa się ze stałym przyspieszeniem  $a$ . Zakładamy ponadto, że kierunek siły  $F$  i przyspieszenia  $a$  pokrywa się z kierunkiem przesunięcia  $s$ . Dla ruchu jednostajnie przyspieszonego możemy napisać

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (7.6)$$

$$v = v_0 + at \Rightarrow a = \frac{v - v_0}{t} \quad (7.7)$$

co w połączeniu daje

$$s = \frac{v + v_0}{2} t \quad (7.8)$$

Wykonana praca jest równa

$$W = F \cdot s = ma \cdot s = m \left( \frac{v - v_0}{t} \right) \left( \frac{v + v_0}{2} \right) t = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \quad (7.9)$$



#### Definicja

Połowę iloczynu masy ciała i kwadratu prędkości nazywamy energią kinetyczną  $E_k$  ciała o masie  $m$ .

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad (7.10)$$

Na podstawie wzorów (7.8) i (7.9) widzimy, że



#### Prawo, zasada, twierdzenie

Praca wykonana przez siłę  $F$  działającą na ciało o masie  $m$  jest równa zmianie energii kinetycznej tego ciała.

$$W = E_k - E_{k0} \quad (7.11)$$

To jest twierdzenie o pracy i energii.

Z tego twierdzenia wynika, że jednostki pracy i energii są takie same.



#### Jednostki

Jednostką pracy i energii jest w układzie SI dżul (J);  $1\text{J} = 1\text{N} \cdot \text{m}$ . W fizyce atomowej powszechnie używa się jednostki elektronowolt (eV)  $1\text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{J}$ .

Spróbuj teraz wykonać proste ćwiczenie.




### Ćwiczenie 7.3

Porównaj energię kinetyczną sprintera o masie 80 kg biegnącego z prędkością 10 m/s z energią kinetyczną pocisku o masie 5 g wylatującego z karabinu z prędkością 800 m/s. Skorzystaj ze wzoru (7.10). Wynik obliczeń zapisz poniżej. Pamiętaj o odpowiednich jednostkach.

$$E_{\text{sprintera}} =$$

$$E_{\text{pocisku}} =$$


## 7.4 Moc

Z punktu widzenia zastosowań praktycznych często istotnym jest nie to ile energii można uzyskać ze źródła ale to jak szybko można ją uzyskać (zamienić w użyteczną postać). Na przykład, ważnym parametrem samochodu, istotnym przy wyprzedzaniu, jest to jak szybko samochód przyspiesza tzn. jak szybko silnik wykonuje pracę związaną z rozpędzaniem samochodu. Inny przykład to, dwa dźwigi, które podnoszą jednakowe masy na jednakową wysokość  $h$  ale w różnym czasie. Tak jak zostało to już pokazane na wcześniejszym przykładzie, każdy z dźwigów wykonuje taką samą pracę równą  $mgh$ . Jednak jeden z dźwigów wykonuje tę pracę w czasie krótszym niż drugi. Mówimy, że ten dźwig ma większą *moc* .



### Definicja


*Moc definiujemy jako ilość wykonanej pracy (lub przekazanej energii) do czasu w jakim została ona wykonana.*

Jeżeli praca  $W$  została wykonana w czasie  $t$  to *średnia moc*  jest dana wzorem

$$\bar{P} = \frac{W}{t} \quad (7.12)$$

Dla stałej siły  $F$  wzór ten przyjmuje postać

$$\bar{P} = \frac{Fs}{t} = F\bar{v} \quad (7.13)$$

Dla czasu  $t \rightarrow 0$  mówimy o *mocy chwilowej* 

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (7.14)$$

Moc chwilową obliczamy jako pochodną pracy względem czasu.



### Jednostki

Jednostką mocy w układzie SI jest *wat* (W);  $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$ . Dla celów praktycznych powszechnie stosowaną jednostką mocy jest *kilowat* (kW), a jednostką energii (iloczyn mocy i czasu) jest *kilowatogodzina* (kWh).



### Ćwiczenie 7.4

Teraz gdy znasz już definicję mocy średniej i odpowiednie jednostki spróbuj ocenić średnią moc zużywaną przez urządzenia elektryczne w twoim mieszkaniu. W tym celu odczytaj stan licznika energii elektrycznej, a następnie powtórz odczyt po 24 godzinach. Jaką wielkość rejestruje licznik i w jakich jednostkach? Na podstawie tych pomiarów oblicz moc średnią. Wynik zapisz poniżej.


$P_{\text{średnia}} =$

## 8 Zasada zachowania energii

### 8.1 Siły zachowawcze i niezachowawcze

W poprzednim rozdziale pokazaliśmy, że praca wykonana przez siłę wypadkową działającą na punkt materialny (ciało) wzdłuż pewnej drogi, jest równa zmianie energii kinetycznej  $E_k$  tego punktu materialnego

$$W = \Delta E_k \quad (8.1)$$

Skorzystamy z tego związku, dla rozróżnienia *sił zachowawczych i niezachowawczych* . W tym celu rozpatrzmy ciało rzucone pionowo do góry, któremu nadano prędkość początkową  $v_0$ , a tym samym energię kinetyczną  $E_k = mv_0^2 / 2$ . Podczas wznoszenia się ciała siła grawitacji działa przeciwnie do kierunku ruchu więc prędkość ciała, a także i jego energia kinetyczna maleją aż do zatrzymania ciała. Następnie ciało porusza się w przeciwnym kierunku pod wpływem siły grawitacji, która teraz jest zgodna z kierunkiem ruchu. Przy zaniedbywalnym oporze powietrza, prędkość i energia kinetyczna rosną aż do wartości jaką ciało miało początkowo. Ciało rzucone do góry, wraca z *tą samą prędkością i energią kinetyczną*. Widzimy, że po przebyciu zamkniętej drogi (cyklu) energia kinetyczna ciała nie zmieniła się, więc na podstawie równania (8.1) oznacza to, że *praca wykonana przez siłę grawitacji podczas pełnego cyklu jest równa zero*. Praca wykonana przez siłę grawitacji podczas wznoszenia się ciała jest ujemna bo siła jest skierowana przeciwnie do przemieszczenia (kąt pomiędzy przemieszczeniem i siłą wynosi  $180^\circ$ ;  $\cos 180^\circ = -1$ ). Gdy ciało spada siła i przemieszczenie są jednakowo skierowane, praca jest dodatnia, tak że całkowita praca jest równa zero.



#### Definicja

*Siła jest zachowawcza, jeżeli praca wykonana przez tę siłę nad punktem materialnym, który porusza się po dowolnej drodze zamkniętej jest równa zero.*

Siła grawitacji jest siłą zachowawczą. Wszystkie siły, które działają w ten sposób, np. siła sprężysta wywierana przez idealną sprężynę, nazywamy siłami zachowawczymi.

Jeżeli jednak, opór powietrza nie jest do zaniedbania, to ciało rzucone pionowo w górę powraca do położenia początkowego i ma *inną energię kinetyczną* niż na początku ponieważ siła oporu przeciwstawia się ruchowi bez względu na to, w którym kierunku porusza się ciało (nie tak jak siła grawitacji). Praca wykonywana przez siłę oporu jest ujemna dla każdej części cyklu zarówno przy wznoszeniu jak i opadaniu ciała więc podczas tego cyklu *została wykonana praca różna od zera*.

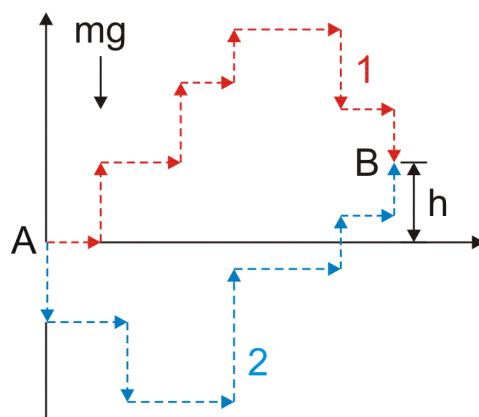


#### Definicja

*Siła jest niezachowawcza jeżeli praca wykonana przez tę siłę nad punktem materialnym, który porusza się po dowolnej drodze zamkniętej nie jest równa zero.*

Siła oporu powietrza jest siłą niezachowawczą. Wszystkie siły, które działają w ten sposób, np. siła tarcia, nazywamy siłami niezachowawczymi.

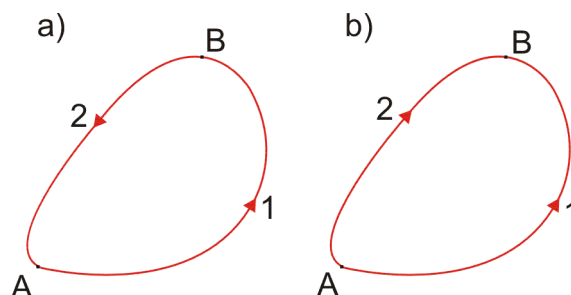
Różnicę między siłami niezachowawczymi i zachowawczymi możemy zobrazować jeszcze inaczej. W tym celu rozpatrzmy pracę wykonaną przez siłę grawitacji podczas ruchu ciała z punktu  $A$  do punktu  $B$  po dwóch różnych drogach tak jak pokazano na rysunku poniżej.



Rys. 8.1. Ciało przesuwane z punktu  $A$  do punktu  $B$  w polu grawitacyjnym po dwóch różnych drogach

Z naszych poprzednich rozważań wiemy, że praca wykonana przez siłę grawitacji podczas ruchu ciała w górę jest ujemna bo siła jest skierowana przeciwnie do przemieszczenia (kąt pomiędzy przemieszczeniem i siłą wynosi  $180^\circ$ ;  $\cos 180^\circ = -1$ ). Gdy ciało przemieszcza się w dół to siła grawitacji i przemieszczenie są jednakowo skierowane, praca jest dodatnia. Natomiast przy przemieszczaniu w bok, siła grawitacji nie wykonuje żadnej pracy bo jest prostopadła do przemieszczenia ( $\cos 90^\circ = 0$ ). Widzimy, że przesunięcia w górę znoszą się z przemieszczeniami w dół, tak że wypadkowe przemieszczenie w pionie wynosi  $h$  i w konsekwencji wypadkowa praca wykonana przez siłę grawitacji wynosi  $W = mgh$  bez względu na wybór drogi. Praca w polu grawitacyjnym *nie zależy od wyboru drogi łączącej dwa punkty ale od ich wzajemnego położenia*.

Możemy uogólnić nasze rozważania na dowolną siłę zachowawczą. Jeszcze raz rozpatrzmy ruch ciała z punktu  $A$  do punktu  $B$  po jednej drodze (1) oraz powrót z  $B$  do  $A$  po innej drodze (2) (rysunek 8.2a).



Rys. 8.2. Ciało przemieszcza się z punktu  $A$  do punktu  $B$  i z powrotem



Ponieważ siła działająca na ciało jest zachowawcza to dla drogi zamkniętej z  $A$  do  $B$  i z powrotem praca jest równa zero

$$W_{A1B} + W_{B2A} = 0 \quad (8.2)$$

Lub zapisując to inaczej

$$W_{A1B} = -W_{B2A} \quad (8.3)$$

Jeżeli teraz odwrócimy kierunek ruchu i przejdziemy z  $A$  do  $B$  po drodze (2) (rysunek 8.2b) to ponieważ zmieniamy tylko kierunek ruchu to otrzymujemy pracę tę samą, co do wartości ale różniącą się znakiem

$$W_{A2B} = -W_{B2A} \quad (8.4)$$

Porównując dwa ostatnie równania otrzymujemy

$$W_{A1B} = W_{A2B} \quad (8.5)$$

Widać z tego, że praca wykonana przez siłę zachowawczą przy przemieszczaniu ciała od  $A$  do  $B$  jest taka sama dla obu dróg. Drogi (1) i (2) mogą mieć dowolny kształt o ile tylko łączą te same punkty  $A$  i  $B$ .



### Definicja

*Siłę nazywamy zachowawczą jeżeli praca wykonana przez nią nad punktem materialnym poruszającym się między dwoma punktami zależy tylko od tych punktów, a nie od łączącej je drogi. Siłę nazywamy niezachowawczą jeżeli praca wykonana przez nią nad punktem materialnym poruszającym się między dwoma punktami zależy od drogi łączącej te punkty.*

Przedstawione definicje siły zachowawczej są równoważne.

Teraz kiedy znasz już definicję sił zachowawczych spróbuj wykonać poniższe ćwiczenie



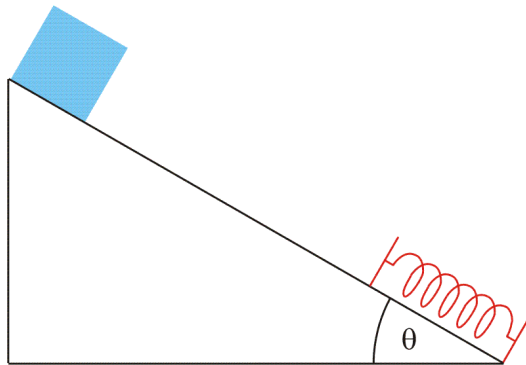
### Ćwiczenie 8.1

Ciało o masie  $m$  zsuwa się z równi pochyłej w kierunku nieważkiej sprężyny (rysunek poniżej). Ruch odbywa się bez tarcia. Ciało dociera do sprężyny i w wyniku działania siły sprężystej zostaje zatrzymane. Następnie, pod wpływem rozprężającej się sprężyny, ciało porusza się w przeciwnym kierunku.

Spróbuj teraz odpowiedzieć na następujące pytania (odpowiedzi zapisz poniżej):

a) Jakie siły działają na ciało w trakcie jego ruchu?

b) Czy są to siły zachowawcze?)



Jak zmieniłaby się sytuacja, gdyby występowało tarcie pomiędzy ciałem a poziomą płaszczyzną?

Zauważ, że ciało odepchnięte przez sprężynę powraca do swojego stanu początkowego.

## 8.2 Energia potencjalna

Gdy rozpatrywaliśmy (w poprzednim rozdziale) ruch ciała pod wpływem siły grawitacji lub siły sprężystości widzieliśmy, że energia kinetyczna poruszającego się ciała zmieniała się (malą i rosła) podczas ruchu, tak że w cyklu zamkniętym powracała do początkowej wartości. W tej sytuacji, gdy działają siły zachowawcze, do opisu tych zmian celowe jest wprowadzenie pojęcia *energii potencjalnej*  $E_p$ . Mówimy, że zmianie energii kinetycznej ciała o wartość  $\Delta E_k$  towarzyszy zmiana energii potencjalnej  $\Delta E_p$  tego ciała równa co do wartości ale przeciwnego znaku, tak że suma tych zmian jest równa zero

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0 \quad (8.6)$$

Każda zmiana energii kinetycznej ciała  $E_k$  jest równoważona przez zmianę energii potencjalnej  $E_p$ , tak że ich suma pozostaje przez cały czas stała

$$E_k + E_p = \text{const.} \quad (8.7)$$

Energię potencjalną można traktować jako energię nagromadzoną, która może być w przyszłości całkowicie odzyskana i zamieniona na inną użyteczną formę energii. Oznacza to, że nie możemy wiązać energii potencjalnej z siłą niezachowawczą. Energię potencjalną często nazywa się *energią stanu*. Mówimy, że jeżeli energia układu zmieniła się to zmienił się stan układu.

Z twierdzenia o pracy i energii (7.10) wynika, że

$$W = \Delta E_k \quad (8.8)$$

więc zgodnie z wprowadzonym pojęciem energii potencjalnej, dla zachowawczej siły  $F$ , zachodzi związek

$$W = \Delta E_k = -\Delta E_p \quad (8.9)$$

Korzystając z ogólnego wzoru na pracę (7.4) otrzymujemy ogólną zależność

$$\Delta E_p = -W = -\int_{r_0}^r F(r) dr \quad (8.10)$$

Możemy również zapisać zależność odwrotną między siłą i energią potencjalną

$$F(r) = -\frac{dE_p(r)}{dr} \quad (8.11)$$

Zauważmy, że na podstawie równania (8.10) potrafimy obliczyć zmianę energii potencjalnej  $\Delta E_p$ , a nie samą energię potencjalną  $E_p$ . Ponieważ  $\Delta E_p = E_p(r) - E_p(r_0)$ , to żeby znaleźć  $E_p(r)$  trzeba nie tylko znać siłę ale jeszcze wartość  $E_p(r_0)$

$$E_p(r) = \Delta E_p + E_p(r_0) = -\int_{r_0}^r F(r) dr + E_p(r_0) \quad (8.12)$$

Punkt  $r_0$  nazywamy punktem odniesienia i zazwyczaj wybieramy go tak, żeby energia potencjalna w tym punkcie odniesienia  $E_p(r_0)$  była równa zero. Jako punkt odniesienia  $r_0$  często wybiera się położenie, w którym siła działająca na ciało jest równa zero. Trzeba jednak podkreślić, że wybór punktu odniesienia jest sprawą czysto umowną.



### Przykład

Spróbujmy teraz obliczyć energię potencjalną na przykład w rzucie pionowym do góry, w pobliżu powierzchni Ziemi. W tym celu przyjmujemy, że ruch odbywa się wzdłuż osi  $y$ , przy czym kierunek osi  $y$  w górę przyjmujemy jako dodatni. W konsekwencji siła grawitacji  $F(y) = -mg$  bo jest skierowana w ujemnym kierunku osi  $y$ . Wybieramy teraz punkt odniesienia np. na powierzchni Ziemi  $y_0 = 0$  i przyjmujemy  $E_p(0) = 0$ . Energię potencjalną w położeniu  $y$  tj. na wysokości  $y$  ponad poziomem odniesienia obliczamy z równania (8.12). Obliczenie jest tym prostsze, że siła grawitacji  $F(y)$  jest stała więc nie musimy obliczać całki ale do obliczenia pracy stosujemy wzór (7.1)  $W = Fs$ .

Otrzymujemy

$$E_p(y) = -(-mgy) + E_p(y_0) = mgy \quad (8.13)$$

Energia potencjalna związana z siłą grawitacyjną wynosi  $mgy$ , gdzie  $y$  jest wysokością ponad punktem (poziomem) odniesienia i jest równa pracy jaką trzeba wykonać przy podnoszeniu

ciała na tę wysokość (przykład z rozdziału 7.1). Energia potencjalna przedstawia tu formę nagromadzonej w wyniku wykonanej pracy energii, która może być całkowicie odzyskana i zamieniona na energię kinetyczną, podczas spadku ciała z danej wysokości.

W analogiczny sposób obliczymy teraz energię potencjalną idealnej nieważkiej sprężyny. Gdy sprężyna jest rozciągnięta na odległość  $x$  od położenia równowagi to siła sprężystości wynosi  $F = -kx$ . Jako punkt odniesienia przyjmujemy tym razem  $x_0 = 0$ . Odpowiada to położeniu równowagi, w którym sprężyna jest nierozciągnięta i siła sprężystości jest równa zeru. Energię potencjalną ponownie obliczamy z równania (8.12) przy czym korzystamy z podanego wyrażenia (7.5) na pracę wykonaną przy rozciąganiu sprężyny

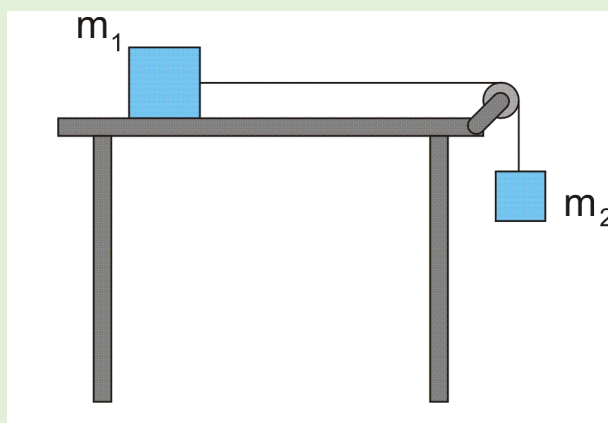
$$E_p(x) = -\int_{x_0}^x (-kx) dx + E_p(x_0) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (8.14)$$

Spróbuj teraz, korzystając z definicji energii potencjalnej, wykonać następujące ćwiczenie



### Ćwiczenie 8.2

Dwa klocki o masach  $m_1$  i  $m_2$  są połączone cienką linką przerzuconą przez nieważki bloczek tak jak na rysunku obok. W układzie występuje tarcie pomiędzy masą  $m_1$  i stołem. Układ pozostający początkowo w spoczynku zostaje puszczonej i masa  $m_2$  opada na podłogę.



Określ, w chwili gdy klocek  $m_2$  dociera do podłogi, jaki znak (+/-) ma:

- 1) energia potencjalna klocka  $m_1$  względem podłogi,
- 2) energia potencjalna klocka  $m_2$  względem stołu,
- 3) praca wykonana przez siłę grawitacji,
- 4) praca wykonana przez siłę tarcia,
- 5) zmiana energii potencjalnej układu,
- 6) zmiana energii kinetycznej klocka  $m_1$ ,
- 7) zmiana energii kinetycznej klocka  $m_2$ .

Spróbuj też odpowiedzieć na następujące pytania:

- 1) Czy zmiana energii kinetycznej klocka  $m_1$  jest większa, równa, czy mniejsza od zmiany energii kinetycznej klocka  $m_2$  ?
- 2) Czy zmiana całkowitej energii kinetycznej układu jest co do bezwzględnej wartości większa, równa, czy mniejsza od zmiany energii potencjalnej układu?

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

### 8.2.1 Energia potencjalna i potencjał pola grawitacyjnego

W przykładzie powyżej obliczyliśmy energię potencjalną związaną z siłą grawitacyjną w pobliżu powierzchni Ziemi, gdzie przyjmowaliśmy, że siła grawitacji jest stała. Teraz zajmiemy się zagadnieniem bardziej ogólnym i znajdziemy energię potencjalną masy  $m$  znajdującej się w dowolnym punkcie nad powierzchnią Ziemi odległym o  $r$  od środka Ziemi.

Gdy obliczaliśmy grawitacyjną energię potencjalną w pobliżu powierzchni Ziemi (przykład powyżej) właśnie powierzchnię Ziemi przyjmowaliśmy jako punkt odniesienia o zerowej energii potencjalnej. Natomiast dla ogólnych obliczeń punkt odniesienia wybiera się w nieskończoności. Temu położeniu ( $r \rightarrow \infty$ ) przypisujemy zerową energię potencjalną. Zwróć uwagę, że stan zerowej energii jest również stanem zerowej siły.

Przypomnijmy, że dla sił zachowawczych zmianę energii potencjalnej ciała przy przejściu z położenia (lub ogólniej ze stanu)  $A$  do  $B$  możemy zapisać jako

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = -W_{AB} \quad (8.15)$$

Siła grawitacji jest siłą zachowawczą więc dla tak wybranego punktu odniesienia

$$E_p(r) - E_p(\infty) = -W_{\infty r} \quad (8.16)$$

Praca wykonywaną przez siłę grawitacji przy przenoszeniu masy  $m$  z nieskończoności do punktu odległego o  $r$  od środka Ziemi wynosi

$$\begin{aligned} E_p(r) - E_p(\infty) = -W_{\infty r} &= -\int_{\infty}^r F dr = -\int_{\infty}^r \left( -G \frac{Mm}{r^2} \right) dr = \\ &= -G \frac{Mm}{r} \Big|_{\infty}^r = -G \frac{Mm}{r} \end{aligned} \quad (8.17)$$

Znak minus wynika stąd, że kierunek działania siły grawitacji jest przeciwny do kierunku wektora  $r$ . Ponieważ energia potencjalna ma wartość równą zero w nieskończoności (punkt odniesienia) więc grawitacyjna energia potencjalna w odległości  $r$  od środka Ziemi (od środka dowolnej masy  $M$ ) wynosi

$$E_p(r) = -G \frac{Mm}{r} \quad (8.18)$$

Energia potencjalna ma wartość równą zero w nieskończoności (punkt odniesienia) i maleje w miarę zmniejszania się  $r$ . Oznacza to, że siła jest przyciągająca. Wzór ten jest prawdziwy bez względu na wybór drogi po jakiej punkt porusza się z nieskończoności do  $r$  bo siła grawitacji jest siłą zachowawczą.

Widzimy, że z polem siły grawitacji wiąże się *przestrzenny rozkład energii  $E(r)$*  dany równaniem (8.17).

Omawiając w punkcie (6.4) pole grawitacyjne przedstawialiśmy siłę działającą na umieszczony w tym polu obiekt jako iloczyn natężenia pola i masy tego obiektu. Stwierdziliśmy, że jedna masa wytwarza pole, a następnie to pole działa na drugą masę.

Inaczej mówiąc rozdzieliliśmy siłę na dwie części i w ten sposób uniezależniliśmy nasz opis od masy obiektu wprowadzanego do pola. Podobnie możemy postąpić z energią potencjalną. Zauważmy, że zgodnie z wyrażeniem (8.17) możemy ją przedstawić jako iloczyn masy  $m$  i pewnej funkcji  $V(r)$

$$E_p(r) = mV(r) \quad (8.19)$$



### Definicja

Funkcję  $V(r)$  nazywamy potencjałem pola grawitacyjnego i definiujemy jako stosunek grawitacyjnej energii potencjalnej masy  $m$  do wartości tej masy.

$$V(r) = \frac{E_p(r)}{m} = -G \frac{M}{r} \quad (8.20)$$

Jak już wspominaliśmy z pojęcia pola korzysta się nie tylko w związku z grawitacją. Przy opisie zjawisk elektrycznych również będziemy się posługiwali pojęciem pola (elektrycznego), jego natężenia i potencjału.




### Ćwiczenie 8.3

Skorzystaj teraz z wyrażenia na grawitacyjną energię potencjalną, żeby znaleźć prędkość jaką należy nadać obiektowi przy powierzchni Ziemi, aby wzniósł się on na wysokość  $h$  nad powierzchnię Ziemi. Dane są masa Ziemi  $M_z$  i jej promień  $R_z$  oraz stała grawitacyjna  $G$ . Wynik zapisz poniżej.

Wskazówka: Dla siły zachowawczej suma energii kinetycznej  $E_k$  i energii potencjalnej  $E_p$  ciała pozostaje przez cały czas stała (wzór 8.7).

$v =$


Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Jeżeli obiektowi nadamy na powierzchni Ziemi odpowiednio dużą prędkość początkową to zacznie on okrążyć Ziemię i nie spadnie na jej powierzchnię. Tę graniczną prędkość nazywamy *pierwszą prędkością kosmiczną* . Jest to najmniejsza prędkość jaką musi mieć punkt materialny swobodnie krążący po orbicie wokół Ziemi. Na tak poruszający się obiekt działają dwie siły; siła grawitacji i siła odśrodkowa. Siły te mają przeciwne zwroty i dla stabilnej orbity równoważą się

$$\frac{mv^2}{R} = G \frac{M_z m}{R^2} \quad (8.21)$$

skąd obliczamy

$$v_I = \sqrt{G \frac{M_z}{R}} \quad (8.22)$$

Jeżeli na powierzchni Ziemi dostarczymy ciału jeszcze większej energii kinetycznej to wtedy może ono bezpowrotnie uciec z Ziemi w przestrzeń kosmiczną. Prędkość początkową (tzw. prędkość ucieczki), przy której ciało ucieknie z powierzchni Ziemi do nieskończoności znajdujemy analogicznie jak w ćwiczeniu 8.3 wstawiając  $h \rightarrow \infty$ . Prędkość ta nosi nazwę *drugiej prędkości kosmicznej*  i wynosi

$$v_{II} = \sqrt{2G \frac{M_Z}{R_Z}} \quad (8.23)$$

Zauważmy, że w trakcie oddalania się ciała do nieskończoności ( $R \rightarrow \infty$ ) jego energia potencjalna rośnie do zera (jest ujemna) kosztem energii kinetycznej, która maleje do zera (jest dodatnia).

W naszych obliczeniach pominęliśmy inne siły, takie jak siły grawitacyjne wywierane przez Księżyc czy Słońce.

### 8.3 Zasada zachowania energii

Pokazaliśmy, że gdy na ciało działa tylko siła zachowawcza to dla dowolnej drogi z  $A$  do  $B$

$$W = \Delta E_k = E_{kB} - E_{kA} \quad (8.24)$$

oraz

$$W = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) \quad (8.25)$$

skąd wynika, że

$$-(E_{pB} - E_{pA}) = E_{kB} - E_{kA} \quad (8.26)$$

lub


$$E_{kA} + E_{pA} = E_{kB} + E_{pB} \quad (8.27)$$

Równanie (8.27) wyraża zasadę zachowania energii mechanicznej.



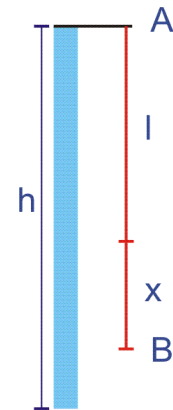
#### **Prawo, zasada, twierdzenie**

*Zasada zachowania energii mechanicznej mówi, że dla ciała podlegającego działaniu siły zachowawczej, suma energii kinetycznej i potencjalnej jest stała.*

Podaliśmy zasadę zachowania energii mechanicznej dla pojedynczego ciała, ale ta zasada jest bardziej ogólna i obowiązuje dla wszystkich *odosobnionych układów ciał* . Układy odosobnione to takie, na które nie działają siły zewnętrzne (spoza układu). W takich układach suma energii kinetycznych i potencjalnych wszystkich ciał pozostaje stała bez względu na oddziaływania w nich zachodzące.

**Przykład**

Skoczek na linie "bungee" skacze z punktu  $A$  i osiąga najniższy punkt  $B$  tak jak na rysunku obok. Skoczek korzysta z liny o długości  $l$ , która rozciąga się sprężystości ( $F = -kx$ ), aż do zerwania, co następuje gdy lina wydłuży się o  $x = 50\%$  w stosunku do długości początkowej. Ile razy wytrzymałość liny na zerwanie musi być większa niż ciężar skoczka, żeby lina nie urwała się?



W punkcie  $A$  grawitacyjna energia potencjalna skoczka liczona względem powierzchni Ziemi wynosi  $mgh$  (masę liny pomijamy) natomiast energia potencjalna sprężystości liny równa się zero bo lina nie jest rozciągnięta. Całkowita energia mechaniczna układu w punkcie  $A$  wynosi więc

$$E_A = mgh$$

Natomiast energia całkowita układu w punkcie  $B$

$$E_B = mg(h - l - x) + \frac{kx^2}{2}$$

jest sumą grawitacyjnej energii potencjalnej skoczka i energii potencjalnej sprężystości rozciągniętej liny równanie (8.14).

Ponieważ siły grawitacji i sprężystości są siłami zachowawczymi więc energia mechaniczna jest zachowana. Uwzględniając, że energia kinetyczna skoczka w punktach  $A$  i  $B$  jest równa zero otrzymujemy

$$mgh = mg(h - l - x) + \frac{kx^2}{2}$$

lub

$$\frac{kx^2}{2} - mgl - mgx = 0$$

Wstawiając do tego równania maksymalne możliwe wydłużenie liny  $x = 0.5l$  możemy obliczyć graniczny współczynnik  $k$  liny

$$k = \frac{12mg}{l}$$

skąd otrzymujemy

$$F = kx = \frac{12mg}{l} \frac{l}{2} = 6mg$$

Wytrzymałość liny na zerwanie musi być co najmniej 6 razy większa niż ciężar skoczka.




Teraz spróbujemy odpowiedzieć na pytanie czy energia jest zachowana w przypadku gdy w układzie działa siła niezachowawcza. Jeżeli oprócz siły zachowawczej  $F_z$  działa jeszcze *siła niezachowawcza*  $F_{nz}$  (np. tarcie) to z twierdzenia o pracy i energii otrzymujemy

$$W_z + W_{nz} = \Delta E_k \quad (8.28)$$

a ponieważ  $W_z = -\Delta E_p$  to

$$W_{nz} = \Delta E_k + \Delta E_p \quad (8.29)$$

Widzimy, że siła tarcia zmienia energię mechaniczną układu (zmniejsza ją bo tarcie jest siłą rozpraszającą). Pozostaje wyjaśnić co stało się ze "straconą" energią mechaniczną. Okazuje się, że zostaje ona przekształcona na *energię wewnętrzną*  $U$  , która objawia się wzrostem temperatury ciała i otoczenia. Zmiana energii wewnętrznej  $\Delta U$  jest równa rozproszonej energii mechanicznej

$$\Delta E_k + \Delta E_p + \Delta U = 0 \quad (8.30)$$

Z równania (8.30) wynika, że



#### **Prawo, zasada, twierdzenie**

*Energia całkowita, tj. suma energii kinetycznej, energii potencjalnej i energii wewnętrznej w układzie odosobnionym nie zmienia się. Mamy więc zasadę zachowania energii całkowitej. Inaczej mówiąc energia może być przekształcana z jednej formy w inną, ale nie może być wytwarzana ani niszczone; energia całkowita jest wielkością stałą.*

Na zakończenie uwzględnijmy jeszcze dodatkowo siłę  $F_{zew}$  wywieraną na układ przez *czynnik zewnętrzny*. Jeżeli działa taka siła to równanie (8.28) przyjmuje postać

$$W_{zew} + W_z + W_{nz} = \Delta E_k \quad (8.31)$$

i w konsekwencji otrzymujemy

$$W_{zew} = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta U \quad (8.32)$$

Praca wykonana przez czynnik zewnętrzny równa jest sumie zmian *energii kinetycznej, potencjalnej i energii wewnętrznej* układu. W ten sposób uwzględniliśmy już *całą energię*.

Zasada zachowania energii należy do najbardziej podstawowych praw fizyki. Wszystkie nasze doświadczenia pokazują, że jest to prawo bezwzględnie obowiązujące; nie znamy wyjątków od tego prawa.

**Ćwiczenie 8.4**

Piłkę puszczone swobodnie z pewnej wysokości  $h$  nad podłożem. Podczas odbicia piłka traci  $1/3$  swojej energii mechanicznej, która zamienia się na energię wewnętrzną. Oblicz na jaką wysokość wzniesie się piłka po 4-tym odbiciu i ile energii mechanicznej zamieniło się w energię wewnętrzną? Wynik zapisz poniżej.

Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania energii całkowitej.

$h_4 =$

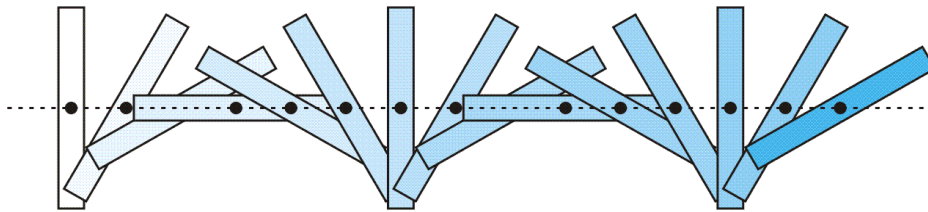
Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Jak widzieliśmy na przykładzie omawianym w ćwiczeniu powyżej, w zderzeniach nie musi być zachowana energia mechaniczna. Okazuje się jednak, że w zderzeniach spełniona jest inna zasada zachowania; zasada zachowania pędu.


## 9 Zasada zachowania pędu

### 9.1 Środek masy

Dotychczas przedmioty traktowaliśmy jak punkty materialne, tzn. obdarzone masą cząstki bezwymiarowe (o zerowej objętości) co wystarczało w przypadku ruchu postępowego ciał bo ruch jednego punktu odzwierciedlał ruch całego ciała. Jednak rzeczywiste ciała są układami ogromnej liczby atomów, a ich ruch może być bardzo skomplikowany. Ciało może wirować lub drgać, w trakcie ruchu cząstki mogą zmieniać swoje wzajemne położenie. Przykład takiego ruchu jest przedstawiony na rysunku poniżej.



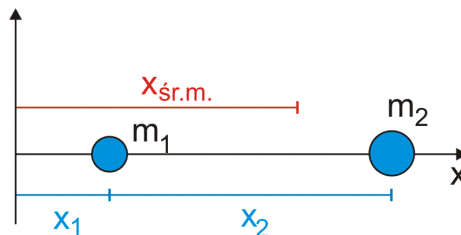
Rys. 9.1. Ciało wykonuje skomplikowany ruch obrotowy za wyjątkiem jednego punktu, który porusza się po linii prostej

Zauważmy, że istnieje w tym układzie jeden punkt, który porusza się po linii prostej ze stałą prędkością. Żaden inny punkt nie porusza się w ten sposób. Ten punkt to *środek masy* . Sposób wyznaczania środka masy zilustrujemy następującym przykładem.



#### Przykład

Rozważamy układ dwóch różnych mas  $m_1$  i  $m_2$  pokazanych na rysunku 9.2.



Rys. 9.2. Środek masy układu dwóch mas  $m_1$  i  $m_2$

Położenie środka masy tego układu definiujemy jako

$$x_{\text{śr.m.}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (9.1)$$

lub

$$\bar{x} = x_{\text{śr.m.}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_2 \quad (9.2)$$

Widzimy, że położenie środka masy układu punktów materialnych wyznaczamy jak średnią ważoną, przy czym masa tych punktów jest czynnikiem ważącym przy tworzeniu średniej. Przez analogię dla układu  $n$  cząstek (punktów materialnych) współrzędna  $x$  środka masy jest dana zależnością

$$x_{sr.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (9.3)$$

gdzie suma mas  $m_i$  poszczególnych punktów układu jest całkowitą masą  $M$  układu. Postępując w ten sam sposób możemy wyznaczyć pozostałe współrzędne  $y$ ,  $z$ . W wyniku otrzymujemy trzy równania skalarne (analogiczne do 9.3), które możemy zastąpić jednym równaniem wektorowym

$$\mathbf{r}_{sr.m.} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \quad (9.4)$$

Zauważmy, że *środek masy układu punktów materialnych* zależy tylko od mas tych punktów i od wzajemnego ich rozmieszczenia, a nie zależy od wyboru układu odniesienia. Dla ciał o regularnym kształcie środek masy pokrywa się ze środkiem geometrycznym.



### Ćwiczenie 9.1

Znajdź środek masy układu trzech cząstek o masach  $m_1 = 1$  kg,  $m_2 = 2$  kg i  $m_3 = 3$  kg, umieszczonych w wierzchołkach równobocznego trójkąta o boku  $a = 1$  m. Wynik zapisz poniżej. Wskazówka: Wybierz układu odniesienia, a następnie oblicz współrzędne  $x$  i  $y$  środka masy zgodnie z równaniem (9.3)

$x_{sr.m.} =$

$y_{sr.m.} =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Przedyskutujmy teraz fizyczne znaczenie środka masy.

## 9.2 Ruch środka masy

Rozważmy układ punktów materialnych o masach  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$  i o stałej całkowitej masie  $M$ . Na podstawie równania (9.4) możemy napisać

$$M \mathbf{r}_{sr.m.} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \quad (9.5)$$

Różniczkując (względem czasu) powyższe równanie otrzymujemy zgodnie z równaniami (3.1)

$$M \frac{d\mathbf{r}_{sr.m.}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \quad (9.6)$$

$$M \mathbf{v}_{sr.m.} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i$$

a po ponownym różniczkowaniu

$$M \frac{d\mathbf{v}_{sr.m.}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \quad (9.7)$$

$$M \mathbf{a}_{sr.m.} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i$$

To ostatnie równanie możemy zapisać w postaci

$$M \mathbf{a}_{sr.m.} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (9.8)$$

Suma (wektorowa) wszystkich sił działających na poszczególne punkty materialne układu jest równa wypadkowej sile zewnętrznej więc

$$M \mathbf{a}_{sr.m.} = \mathbf{F}_{zew} \quad (9.9)$$

Z równania (9.9) wynika, że



#### **Prawo, zasada, twierdzenie**

*Środek masy układu punktów materialnych porusza się w taki sposób, jakby cała masa układu była skupiona w środku masy i jakby wszystkie siły zewnętrzne nań działały.*

Z twierdzenia o ruchu środka masy wynika, że nawet ciała materialne będące układami złożonymi z dużej liczby punktów materialnych możemy w pewnych sytuacjach traktować jako pojedynczy punkt materialny. Tym punktem jest środek masy. To twierdzenie obowiązuje dla każdego układu punktów materialnych. W szczególności układ może być ciałem o budowie ciągłej (np. ciało stałe). Wtedy przy obliczeniach środka masy sumowanie występujące w równaniach (9.3), (9.4) zastępujemy całkowaniem. Układ może też być zbiorem cząstek, w którym występują wszystkie rodzaje ruchu wewnętrznego. Pojęcie środka masy jest bardzo użyteczne np. do obliczania energii kinetycznej.



Bardziej zaawansowany przykład wykorzystania pojęcia środka masy (do obliczania energii kinetycznej) możesz poznać w *Dodatku 1*, na końcu modułu II.

### 9.3 Pęd układu punktów materialnych

Zdefiniowaliśmy pęd punktu materialnego jako iloczyn jego masy  $m$  i jego prędkości  $\mathbf{v}$ . Poznaliśmy też, drugą zasadę dynamiki Newtona w postaci

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (9.10)$$

Jeżeli jednak zamiast pojedynczego punktu mamy do czynienia z układem, o stałej masie  $M$ , złożonym z  $n$  punktów materialnych o masach  $m_1, \dots, m_n$  oraz prędkościach  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  to układ jako całość będzie miał całkowity pęd  $\mathbf{P}$  będący sumą wektorową pędów poszczególnych punktów

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \quad (9.11)$$

Porównując tę zależność z równaniem (9.6) otrzymujemy zależność

$$\mathbf{P} = M \mathbf{v}_{sr.m.} \quad (9.12)$$



#### Prawo, zasada, twierdzenie

*Całkowity pęd układu punktów materialnych jest równy iloczynowi całkowitej masy układu i prędkości jego środka masy.*

Zgodnie z równaniem (9.7)

$$\mathbf{F}_{zew} = M \mathbf{a}_{sr.m.} = M \frac{d\mathbf{v}_{sr.m.}}{dt} \quad (9.13)$$

więc druga zasada dynamiki Newtona dla układu punktów materialnych przyjmuje postać

$$\mathbf{F}_{zew} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (9.14)$$

Ponownie widzimy, że nawet ciała materialne będące układami złożonymi z dużej liczby punktów materialnych możemy w pewnych sytuacjach traktować jako pojedynczy punkt materialny. Tym punktem jest środek masy.

Z równania (9.14) wynika, że gdy wypadkowa siła zewnętrzna równa jest zeru  $\mathbf{F}_{zew} = 0$ , to dla układu o stałej masie, środek masy pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, przy czym poszczególne punkty układu mogą poruszać się po różnych torach.

To stwierdzenie wprowadza nas w zasadę zachowania pędu.

### 9.4 Zasada zachowania pędu

Ponownie rozpatrzmy układ  $n$  punktów materialnych. Jeżeli układ jest odosobniony, to znaczy nie działają siły zewnętrzne to zgodnie z równaniem (9.14)

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \quad \text{lub} \quad \mathbf{P} = \text{const.} \quad (9.15)$$

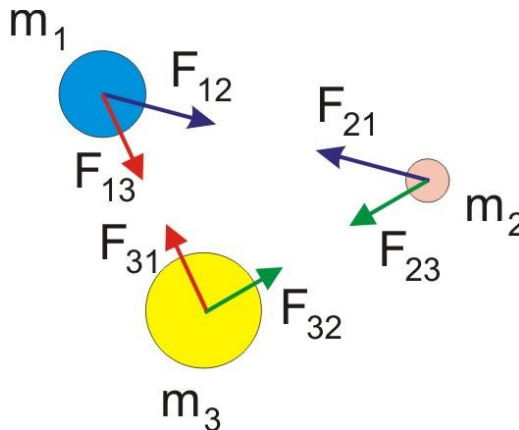
Ten warunek wyraża zasadę zachowania pędu.



#### Prawo, zasada, twierdzenie

*Jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych działających na układ jest równa zero, to całkowity wektor pędu układu pozostaje stały.*

Ta sytuacja jest zilustrowana na rysunku poniżej przykładowo dla układu trzech oddziaływujących mas (punktów materialnych).



Rys. 9.3. Układ trzech oddziaływujących mas

Druga zasada dynamiki Newtona dla tego układu punktów materialnych przyjmuje postać

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_3}{dt} \quad (9.16)$$

a ponieważ

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13}, \quad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23}, \quad \frac{d\mathbf{p}_3}{dt} = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} \quad (9.17)$$

więc

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{32} = 0 \quad \text{lub} \quad \mathbf{P} = \text{const} \quad (9.18)$$

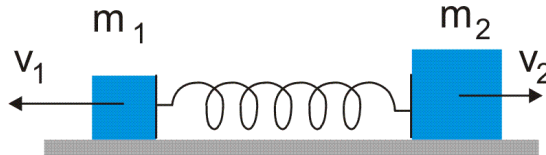
jeżeli nie działają siły zewnętrzne.

Zobaczmy teraz jak zasada zachowania pędu stosuje się do wybranej sytuacji.



### Przykład

Rozważmy dwa ciała o masach  $m_1$  i  $m_2$  połączone nieważką sprężyną umieszczone na doskonale gładkim stole (rysunku poniżej). Przybliżamy do siebie te ciała na pewną odległość (ściskamy sprężynę), a następnie puścimy swobodnie.



Rys. 9.4. Układ dwóch mas połączonych sprężyną

Jeżeli pod pojęciem układ rozumiemy obie masy i sprężynę to na ten układ nie działa żadna siła zewnętrzna (układ odosobniony), działają tylko siły pomiędzy elementami układu. Oznacza to, że możemy do tego układu stosować zasadę zachowania pędu. Przed zwolnieniem ciał pęd układu (w odniesieniu do stołu) był równy zeru. Pęd zostaje zachowany więc pozostaje taki sam po zwolnieniu obu ciał. Choć poszczególne ciała poruszają się i ich pędy są różne od zera to pęd układu może być równy zeru. Pęd układu będący wielkością wektorową jest sumą ujemnego pędu ciała  $m_1$  (porusza się w kierunku  $-x$ ) i dodatniego pędu ciała  $m_2$  (porusza się w kierunku  $+x$ ). Pęd nieważkiej sprężyny jest równy zeru. Z zasady zachowania pędu wynika, że pęd początkowy układu jest równy pędowi w dowolnej chwili co możemy zapisać w postaci równania

$$0 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 \quad (9.19)$$

lub

$$m_2 \mathbf{v}_2 = -m_1 \mathbf{v}_1 \quad (9.20)$$

Przykładowo gdy  $m_1 = 1$  kg i  $m_2 = 2$  kg to  $v_1$  jest dwukrotnie większa od  $v_2$  i ma przeciwny zwrot.



### Ćwiczenie 9.2

Spróbuj teraz zastosować te samą zasadę do opisu rozpadu promieniotwórczego. Spoczywające jądro uranu emituje, z prędkością  $10^7$  m/s, cząstkę  $\alpha$  (jądro atomu helu). Oblicz prędkość odrzutu powstałego w tym rozpadzie jądra toru. Stosunek masy cząstki  $\alpha$  do masy jądra toru wynosi  $M_\alpha/M_{Th} = 4/234$ . Wynik zapisz poniżej.

Wskazówka: Skorzystaj z równania (9.19)

$v_{Th} =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.




Analogicznie posługując się zasadą zachowania pędu można wytłumaczyć zjawisko odrzutu występujące przy strzelaniu z broni palnej. Zjawisko odrzutu ma jednak ważne praktyczne znaczenie. Zostało wykorzystane w silnikach odrzutowych i raketowych, w których wyrzucane spaliny nadają samolotowi (rakiecie) przeciwnie skierowany pęd. Zjawisko to jednak różni się od opisanych powyżej, bo w przeciwieństwie do układów gdzie masa elementów składowych pozostawała stała masa wyrzucanych spalin i masa rakiety zmieniają się.



Przykład zastosowania zasad zachowania pędu dla układu o zmiennej masie (rakietę) możesz poznać w *Dodatku 2*, na końcu modułu II.

Wiemy już, że jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych działających na układ jest równa zero to spełniona jest zasada zachowania pędu. W takim układzie mogą jednak działać siły wewnętrzne, na przykład siły występujące przy zderzeniach między cząsteczkami gazu. I właśnie dlatego możemy skorzystać z zasady zachowania pędu do opisu zderzeń.

## 10 Zderzenia

Termin zderzenia obejmuje w fizyce szeroką klasę zjawisk. Do tej kategorii zaliczamy na przykład zderzenia kul bilardowych czy uderzenia piłki o ścianę. W tych przypadkach zderzające się ciała stykają się bezpośrednio i w punkcie ich zetknięcia pojawia się bardzo duża siła kontaktowa. Jednak oddziaływujące ciała nie muszą się stykać ze sobą, a i tak możemy mówić o ich zderzeniu. Dotyczy to na przykład oddziaływania cząstek naładowanych za pośrednictwem pola elektrycznego: odpychanie elektrostatyczne wpływa na ruch "zderzających się" cząstek. Pod pojęcie zderzeń możemy podciągnąć również reakcje jądrowe. Przykładowo, neutron w trakcie zderzenia z jądrem może wnikać do niego. Możemy również rozszerzyć definicję zderzeń o rozpady cząstek. Cechą charakterystyczną tych wszystkich zjawisk jest występowanie *sił impulsowych* , to jest sił działających przez bardzo krótki czas.


### 10.1 Zderzenia w przestrzeni jednowymiarowej

Właśnie ze względu na krótki czas działania nie możemy na ogół zmierzyć sił działających podczas zderzenia. Wiemy jednak, że musi być spełniona zasada zachowania pędu (występują tylko siły wewnętrzne oddziaływania między zderzającymi się obiektami, a siły zewnętrzne są równe zero), oraz zasada zachowania energii całkowitej. Wobec tego nawet nie znając szczegółów oddziaływania można, stosując te zasady, spróbować przewidzieć wynik zderzenia.




#### Definicja

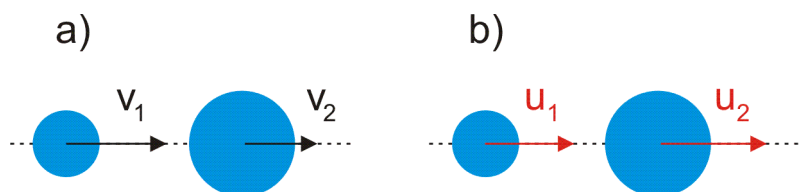
Gdy dwa ciała zderzają się to zderzenie może być sprężyste (elastyczne) lub niesprężyste (nieelastyczne) w zależności od tego czy energia kinetyczna jest zachowana podczas tego zderzenia czy też nie.

W zderzeniu sprężystym całkowita energia kinetyczna jest zachowana podczas gdy w zderzeniu niesprężystym ciała tracą część energii kinetycznej. Kiedy dwa ciała po zderzeniu łączą się mówimy, że zderzenie jest *całkowicie niesprężyste* .



#### Przykład

Jako przykład rozpatrzmy, zderzenie sprężyste dwóch gładkich nie wirujących kul o masach  $m_1$  i  $m_2$ . Przed zderzeniem kule poruszają się wzdłuż linii łączącej ich środki (*zderzenie centralne* ) z prędkościami odpowiednio  $v_1$  i  $v_2$  na przykład tak jak na rysunku poniżej. Naszym celem jest znalezienie prędkości  $u_1$  i  $u_2$  tych kul po zderzeniu.



Rys. 10.1. Kule o masach  $m_1$  i  $m_2$  przed (a) i po (b) zderzeniu

Z zasady zachowania pędu dla układu obu kul otrzymujemy

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (10.1)$$

Ponieważ zderzenie jest sprężyste to zgodnie z definicją energia kinetyczna jest zachowana w tym zderzeniu

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \quad (10.2)$$

Rozwiązujemy układ dwóch równań (10.1) i (10.2) z dwoma niewiadomymi  $u_1$ ,  $u_2$  i otrzymujemy

$$u_1 = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1 + \left( \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_2 \quad (10.3)$$

oraz

$$u_2 = \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_1 + \left( \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_2 \quad (10.4)$$

Rozpatrzmy teraz kilka przypadków. W każdym z nich, posługując się zależnościami (10.3) i (10.4) obliczymy prędkości ciał po zderzeniu  $u_1$  i  $u_2$ .

- Zderzenie dwóch identycznych ciał  $m_1 = m_2 = m$ . Rozwiązanie:  $u_1 = v_2$ ,  $u_2 = v_1$ . Ciała wymieniają się prędkościami i zarazem pędami.  
Na przykład gdy podczas gry w bilard poruszająca się z prędkością  $v$  kula zderza się centralnie z drugą identyczną ale nieruchomą kulą to sama zatrzymuje się, a spoczywająca dotychczas kula zaczyna poruszać się z prędkością  $v$ .
- Lekka cząstka zderza się centralnie z ciężkim nieruchomym jądrem lub piłka uderza o ścianę;  $m_1 \ll m_2$ ,  $v_2 = 0$ . Rozwiązanie:  $u_1 = -v_1$ ,  $u_2 = 0$ .  
Piłka odbija się sprężysto od ściany więc prędkość zmienia znak (wektor zmienia zwrot), a ściana pozostaje nieruchoma.
- Sytuacja odwrotna, ciężka cząstka uderza w nieruchomą cząstkę lekką;  $m_1 \gg m_2$  oraz  $v_2 = 0$ . Rozwiązanie:  $u_1 = v_1$ ,  $u_2 = 2v_1$ .  
Cząstka lekka uzyskuje prędkość dwukrotnie większą od cząstki ciężkiej, której prędkość (pęd) nie ulega zmianie.

Powyższa analiza pokazuje na przykład jak dobierać materiał spowalniający neutrony w reaktorze. Neutrony muszą być spowalniane aby podtrzymać proces rozszczepienia. W tym celu zderza się je sprężysto z jądrami (spoczywającymi) spowalniaczem. Gdyby w spowalniaczu były ciężkie jądra to neutrony zderzając się "odbijałyby" się nie tracąc nic z prędkości (przypadek b). Gdyby natomiast spowalniaczem były cząstki lekkie, np. elektrony, to neutrony poruszałyby się wśród nich praktycznie bez zmiany prędkości (przypadek c). Zatem trzeba wybrać moderator (spowalniacz) o masie jąder porównywalnej z masą neutronów (przypadek a).

**Ćwiczenie 10.1**

Sprawdź, jaką część swej energii kinetycznej traci neutron o masie  $m_1$  w zderzeniu centralnym z będącym w spoczynku jądrem atomowym o masie  $m_2$ ? Obliczenia wykonaj dla jądra ołowiu  $m_2 = 206 m_1$ , jądra węgla i jądra wodoru  $m_2 = m_1$ .

Wynik zapisz poniżej. Wskazówka: Skorzystaj z równania (10.3) uwzględniając, że  $v_2 = 0$ .

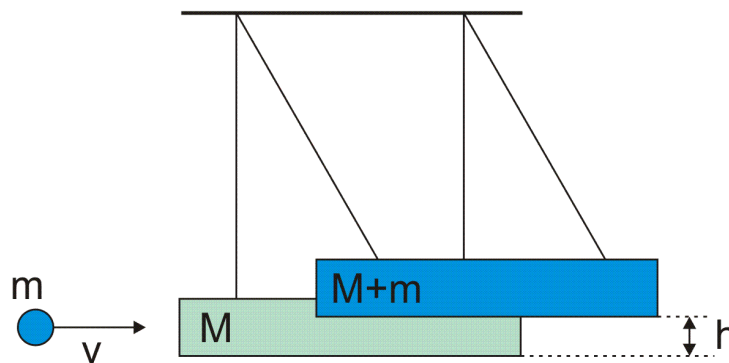
$$\text{dla ołowiu } \frac{\Delta E_k}{E_k} =$$

$$\text{dla węgla } \frac{\Delta E_k}{E_k} =$$

$$\text{dla wodoru } \frac{\Delta E_k}{E_k} =$$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Rozważmy teraz przypadek zderzenia całkowicie niesprężystego. Przy zderzeniach niesprężystych energia kinetyczna nie jest zachowana. Energia będąca różnicą pomiędzy początkową i końcową energią kinetyczną przechodzi w inne formy energii na przykład w ciepło lub energię potencjalną związaną z deformacją ciała podczas zderzenia. Tak jest w przypadku wahadła balistycznego, które służy do pomiaru prędkości pocisków. Składa się ono z bloku drewnianego o masie  $M$ , wiszącego na dwóch sznurach. Pocisk o masie  $m$ , mający prędkość poziomą  $v$ , wbija się w klocek i zatrzymuje w nim. Po zderzeniu wahadło tzn. klocek z tkwiącym w nim pociskiem wychyla się i podnosi na maksymalną wysokość  $h$  tak jak pokazano na rysunku poniżej.



Rys. 10.2. Wahadło balistyczne

Pęd przed zderzeniem jest równy pędowi pocisku, bo klocek jest nieruchomy. Natomiast po zderzeniu klocek i pocisk poruszają się razem. Stosując zasadę zachowania pędu otrzymujemy

$$mv = (m + M)u \quad (10.5)$$

gdzie  $u$  jest prędkością układu klocek - pocisk zaraz po zderzeniu. W zderzeniu, część energii kinetycznej pocisku jest tracona min. na ciepło i odkształcenie klocka, w który pocisk się wbija. Pozostała część energii kinetycznej zamienia się po zderzeniu w potencjalną energię grawitacji co możemy zapisać w postaci równania

$$\frac{1}{2}(m+M)u^2 = (m+M)gh \quad (10.6)$$

Rozwiązując ostatnie dwa równania otrzymujemy

$$v = \frac{m+M}{m} \sqrt{2gh} \quad (10.7)$$

Wystarczy więc zmierzyć wysokość  $h$  oraz masy  $m$  i  $M$  aby móc wyznaczyć prędkość pocisku  $v$ .



### Ćwiczenie 10.2

Sprawdź jaka część początkowej energii zostaje zachowana w tym zderzeniu. Przyjmij masę pocisku  $m = 5$  g, a masę klocka  $M = 2$  kg. Wynik zapisz poniżej.

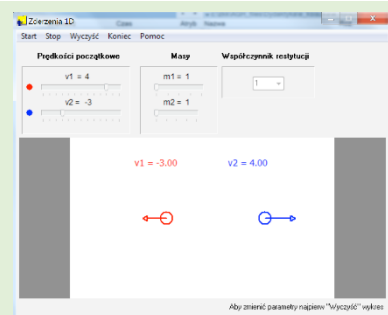
Wskazówka: Skorzystaj z równania (10.7) i oblicz iloraz

$$\frac{\frac{1}{2}(m+M)u^2}{\frac{1}{2}mv^2} =$$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.



Korzystając z programu komputerowego „Zderzenia centralne”, dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH, możesz prześledzić wynik zderzenia dwu kul poruszających się wzdłuż linii łączącej ich środki (zderzenia centralne – jednowymiarowe) w zależności od ich prędkości początkowych jak i ich masy oraz *współczynnika restytucji*  $P$  wyrażającego stosunek prędkości względnych ciał po zderzeniu i przed zderzeniem. Dla zderzeń sprężystych współczynnik ten ma wartość 1, a dla zderzeń całkowicie niesprężystych 0.



## 10.2 Zderzenia na płaszczyźnie

Dotychczas zajmowaliśmy się zderzeniami cząstek w przestrzeni jednowymiarowej. Teraz rozpatrzmy najprostszyp przypadkewielowymiarowy; zajmiemy się zderzeniami sprężystymi na płaszczyźnie. Zaczniemy od analizy zderzenia sprężystego ukośnego kuli

o masie  $m$  i prędkości  $v$  ze ścianą. Naszym celem jest znalezienie prędkości kuli po zderzeniu.

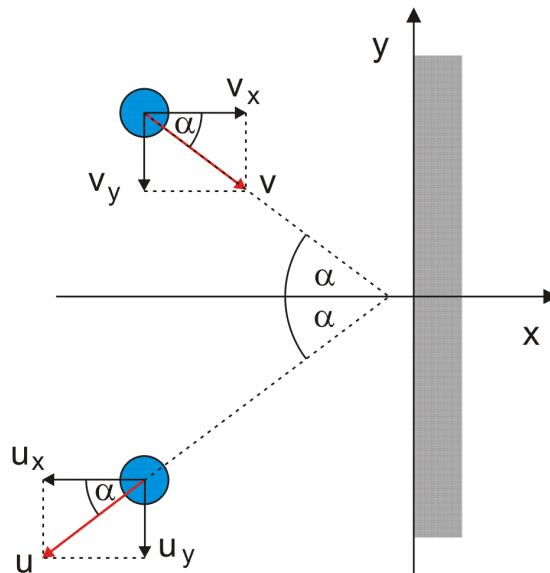
Ruch kuli opisujemy w układzie współrzędnych  $x$  i  $y$  związanym ze ścianą, oś  $x$  pokazuje kierunek prostopadły do ściany,  $y$  - kierunek równoległy, a początek układu umieszczamy na powierzchni ściany w punkcie zderzenia. W tak wybranym układzie współrzędnych rozkładamy na składowe wektor prędkości  $v$  (rysunek 10.3)

$$\begin{aligned}v_x &= v \cos \alpha \\v_y &= v \sin \alpha\end{aligned}\quad (10.8)$$

Na przykładzie rzutu ukośnego (punkt 3.2) pokazaliśmy, że taki ruch na płaszczyźnie można traktować jak dwa niezależne ruchy jednowymiarowe. Ruch kuli w kierunku  $y$  odbywa się równoległe do ściany więc składowa  $v_y$  nie ulega zmianie przy odbiciu. Natomiast składowa prostopadła do powierzchni ściany, po zderzeniu zmienia znak na przeciwny, kula odbija się od ściany jak w przykładzie (b) w poprzednim rozdziale. Stąd prędkość kuli po zderzeniu (odbiciu się od ściany)

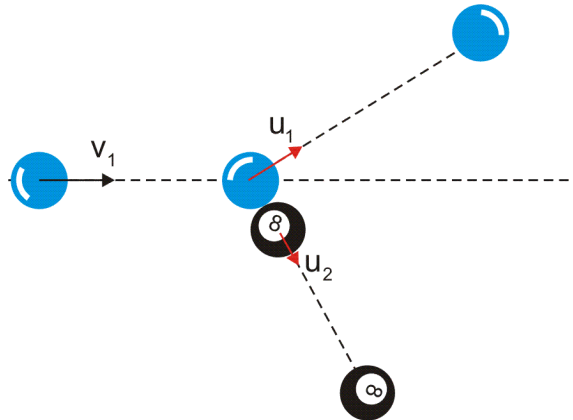
$$u = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-v \cos \alpha)^2 + (v \sin \alpha)^2} = v \quad (10.9)$$

Prędkość po odbiciu od ściany jest taka sama jak przed odbiciem, a kąt odbicia jest równy kątowi padania (rysunek poniżej).



Rys. 10.3. Sprężyste zderzenie kuli ze ścianą

Teraz rozpatrzmy *ukośne*, sprężyste zderzenie kuli bilardowej poruszającej się z prędkością  $v_1$  z drugą identyczną spoczywającą kulą. Takie zagranie stosuje się, żeby skierować wybraną kulę pod pewnym kątem w bok. Dzieje się tak, gdy środek kuli spoczywającej nie leży na linii wzdłuż, której porusza się pierwsza kula. Takie zderzenie jest pokazane na rysunku poniżej.



Rys. 10.4. Zderzenia kul bilardowych

Zgodnie z zasadą zachowania pędu i zasadą zachowania energii

$$m\mathbf{v}_1 = m\mathbf{u}_1 + m\mathbf{u}_2$$

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2} \quad (10.10)$$

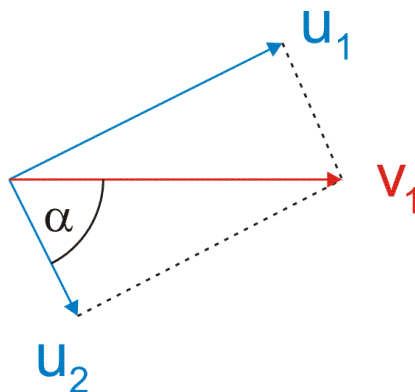
lub

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

(10.11)

$$v_1^2 = u_1^2 + u_2^2$$

Z równań tych wynika, że wektory  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{u}_1$  i  $\mathbf{u}_2$  tworzą boki trójkąta prostokątnego (twierdzenie Pitagorasa) tak jak na rysunku 10.5.

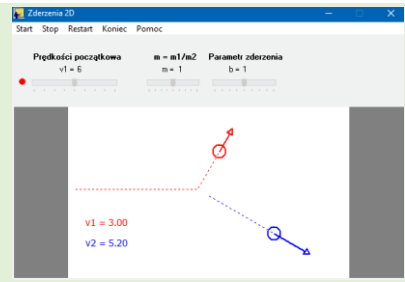


Rys. 10.5. Prędkości kul przed i po zderzeniu

Oznacza to, że dla dowolnego kąta  $\alpha$  ( $0, \pi/2$ ) po zderzeniu kule będą zawsze poruszały się względem siebie pod kątem prostym. Wartość kąta  $\alpha$  zależy natomiast od tak zwanego *parametru zderzenia*  $\mathbb{P}$  czyli odległości między pierwotnym kierunkiem ruchu kuli pierwszej, a środkiem kuli spoczywającej.



Możesz prześledzić wynik sprężystego zderzenia dwu kul w zależności od prędkości względnej kul i stosunku ich mas oraz parametru zderzenia, korzystając z programu komputerowego „Zderzenia sprężyste w dwóch wymiarach”, dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.



Ten rozdział kończy drugi moduł; możesz teraz przejść do podsumowania i zadań testowych.



## Podsumowanie

- Praca  $W$  wykonana przez  $F$  jest iloczynem skalarnym siły  $F$  i wektora przesunięcia  $s$ . Praca wykonana przez siłę stałą  $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs \cos \alpha$ , a przez siłę zmienną  $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ .
- Energia kinetyczna jest definiowana jako  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ .
- Moc jest szybkością wykonywania pracy  $P = \frac{dW}{dt}$ .
- Jeżeli siła  $F$  jest siłą zachowawczą to zmiana energii potencjalnej jest równa  $\Delta E_p = -W = -\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ . Dla sił zachowawczych ta całka nie zależy od drogi od  $A$  do  $B$ , na której wykonujemy pracę, a tylko od położenia punktów  $A$  i  $B$ .
- Zasada zachowania energii mechanicznej mówi, że dla ciała podlegającego działaniu siły zachowawczej, suma energii kinetycznej i potencjalnej jest stała.
- Jeżeli działają siły niezachowawcze to zamieniają one energię mechaniczną na energię wewnętrzną.
- Grawitacyjna energia potencjalna wynosi  $E_p(r) = -G \frac{Mm}{r}$ .
- Potencjał pola grawitacyjnego definiujemy jako  $V(r) = \frac{E_p(r)}{m} = -G \frac{M}{r}$ .
- Zasada zachowania pędu w układzie odosobnionym mówi, że jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych działających na układ jest równa zero, to całkowity wektor pędu układu pozostaje stały.  $\mathbf{F}_{\text{wyp}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{P} = \text{const.}$
- W zderzeniu *sprężystym* całkowita energia kinetyczna jest taka sama po zderzeniu jak przed zderzeniem podczas gdy w zderzeniu *niesprężystym* ciała tracą część energii kinetycznej. Kiedy dwa ciała po zderzeniu łączą się mówimy, że zderzenie jest *całkowicie niesprężyste*.

## Materiały dodatkowe do Modułu II

### Energia kinetyczna w układzie środka masy

Rozpatrzmy układ, o stałej masie  $M$ , złożony z  $n$  punktów materialnych o masach  $m_1, \dots, m_n$  oraz prędkościach  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ . Energia kinetyczna tego układu mierzona względem środka masy jest dana wyrażeniem

$$E_k = \frac{\sum_{i=1}^n m_i v_i^2}{2} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_{\text{śr.m.}} + \mathbf{v}_{i,\text{wzg}})(\mathbf{v}_{\text{śr.m.}} + \mathbf{v}_{i,\text{wzg}})}{2} \quad (\text{II.1.1})$$

gdzie  $v_{\text{śr.m.}}$  jest prędkością środka masy, a  $v_{i,\text{wzg}}$  jest prędkością  $i$ -tego punktu mierzona w układzie środka masy. Wykonując mnożenie skalarne otrzymujemy

$$E_k = \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{2} v_{\text{śr.m.}}^2 + \mathbf{v}_{\text{śr.m.}} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_{i,\text{wzg}} + \frac{\sum_{i=1}^n m_i v_{i,\text{wzg}}^2}{2} \quad (\text{II.1.2})$$

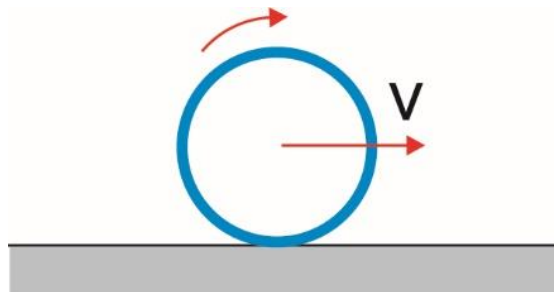
Zgodnie z równaniem (9.6)

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_{i,\text{wzg}} = M \mathbf{v}_{\text{śr.m.,wzg}}$$

a ponieważ prędkość środka masy mierzona względem środka masy jest równa zeru  $\mathbf{v}_{\text{śr.m.,wzg}} = 0$  więc drugi wyraz w równaniu (II.1.2) znika. Ostatecznie

$$E_k = \frac{M v_{\text{śr.m.}}^2}{2} + E_k' \quad (\text{II.1.3})$$

gdzie  $E_k'$  jest energią kinetyczną mierzona w układzie środka masy. Zastosowanie tego równania zilustrujemy obliczając energię kinetyczną obręczy o masie  $m$  toczącej się po płaszczyźnie tak, że środek obręczy ma prędkość  $v$  (rysunek poniżej)



Ponieważ w układzie środka masy ciało sztywne może mieć tylko energię obrotową (rotacyjną) więc równanie (3) przyjmuje postać

$$E_k = \frac{mV^2}{2} + \frac{mV_{obrot.wzg}^2}{2} \quad (\text{II.1.4})$$

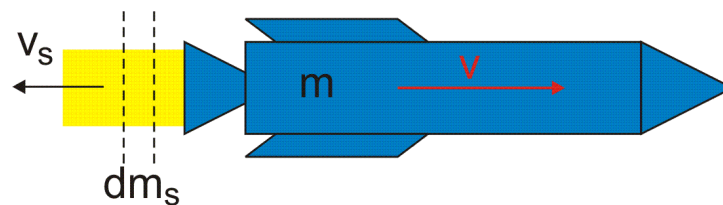
gdzie  $v_{obrot,wzg}$  to prędkość obręczy w układzie środka masy. Ponieważ obserwator w układzie środka masy widzi obręcz obracającą się z prędkością  $v$  więc  $v_{obrot,wzg} = v$ .  
Stąd

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2 \quad (\text{II.1.5})$$

Zauważmy, że obręcz ma energię dwa razy większą od ciała o masie  $m$  poruszającego się z tą samą prędkością  $v$  (ale nie obracającego się).

### Układy o zmiennej masie

Rozpatrzmy układ, który stanowi rakieta wyrzucająca ze swej dyszy gorący gaz z dużą prędkością, zmniejszając w ten sposób swoją masę i zwiększając prędkość (rysunek poniżej).



Napęd odrzutowy rakiety

Spaliny opuszczają silnik rakiety ze stałą prędkością  $v_s$  względem Ziemi. Prędkość chwilowa rakiety względem Ziemi jest równa  $v$ , zatem prędkość spalin względem rakiety  $v_{wzg}$  jest dana zależnością

$$v_{wzg} = v_s - v \quad (\text{II.2.1})$$

Jeżeli w przedziale czasu  $dt$  z rakiety wyrzucona zostaje masa  $dm_s$  z prędkością  $v_s$  to masa rakiety maleje o  $dm$ , a jej prędkość rośnie o  $d v$ , przy czym

$$\frac{dm_s}{dt} = -\frac{dm}{dt} \quad (\text{II.2.2})$$

Znak minus wynika stąd, że masa rakiety maleje. Obliczamy teraz zmianę pędu  $P$  układu w czasie  $dt$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dp_{rakiety}}{dt} + \frac{dp_{spalin}}{dt} \quad (\text{II.2.3})$$

lub

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} + \mathbf{v}_s \frac{dm_s}{dt} \quad (\text{II.2.4})$$


skąd ostatecznie

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt} + \mathbf{v}_s \frac{dm_s}{dt} \quad (\text{II.2.5})$$

Równanie to uwzględnia fakt, że w przypadku rakiety zmienia się zarówno jej masa jak i prędkość podczas gdy spaliny są wyrzucane ze stałą prędkością.

Zmiana pędu układu jest zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona równa sile zewnętrznej działającej na układ. Uwzględniając zależności (II.2.1) i (II.2.2) możemy przekształcić równanie (II.2.5) do postaci

$$\mathbf{F}_{zew} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}_{wzg} \frac{dm_s}{dt} \quad (\text{II.2.6})$$

Ostatni wyraz w równaniu (II.2.6) może być interpretowany jako siła wywierana na układ przez substancję (spaliny), która z niego wylatuje. W przypadku rakiety (samolotu) nosi ona nazwę *siły ciągu* .



### Przykład

Samolot odrzutowy leci z prędkością 250 m/s i z taką prędkością jest wciągane do jego silnika powietrze. W każdej sekundzie silnik samolotu spala mieszkankę paliwową składającą się z 75 kg powietrza i 3 kg paliwa, a prędkość wyrzucania spalin wynosi 500 m/s.

Siłę ciągu obliczamy zgodnie ze wzorem (II.2.6) przy czym prędkość względna jest równa różnicy prędkości wyrzucania spalin i wciągania powietrza  $v_{wzg} = 250$  m/s, a masa spalin wyrzucanych w jednostce czasu wynosi 78 kg/s. Stąd otrzymujemy siłę ciągu równą  $1.95 \cdot 10^4$  N.

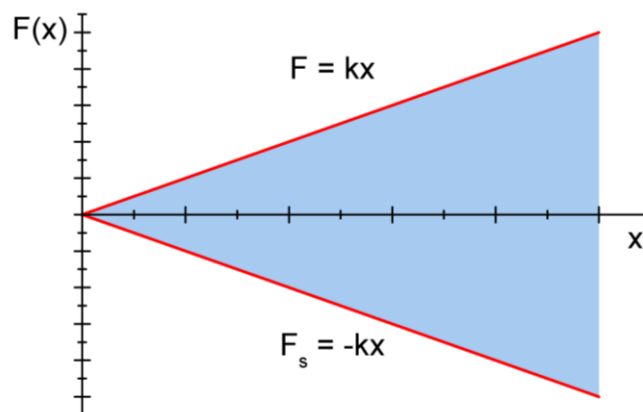
Jeżeli ruch rakiety odbywa się w przestrzeni kosmicznej to siły zewnętrzne  $\mathbf{F}_{zew}$  są do zaniedbania i wtedy zmiana pędu rakiety jest równa sile ciągu (jest spełniona zasada zachowania pędu). Natomiast gdy ruch odbywa się w pobliżu Ziemi (np. tuż po starcie) to wówczas  $\mathbf{F}_{zew}$  reprezentuje ciężar rakiety i siłę oporu atmosfery i trzeba ją uwzględnić. Konstruktorzy raket starają się uzyskać jak największą siłę ciągu aby przewyciężyć  $\mathbf{F}_{zew}$ . Na przykład rakiet Saturn 5, o masie ponad 3000 ton, wytwarzała przy starcie siłę ciągu 40 MN.

## Rozwiązania ćwiczeń z modułu II

### Ćwiczenie 7.2

Dane:  $F(x) = kx$ .

Wykres funkcji  $F(x) = kx$  jest pokazany na rysunku poniżej.



Zależność siły sprężystości od rozciągnięcia  $x$  sprężyny

Pole pod wykresem jest polem trójkąta o podstawie  $x$  i wysokości  $F(x)$  i wynosi

$$S = W = \frac{1}{2} xF(x)$$

$$S = \frac{1}{2} kx^2$$

Otrzymana wartość jest identyczna z tą daną równaniem (7.5).

Na tym samym rysunku pokazany jest również wykres  $F_s(x)$ . Zwróć uwagę, że "dodatnia" praca wykonana przez siłę  $F$  (człowieka) jest równa co do wartości "ujemnej" pracy wykonanej przez sprężynę.

### Ćwiczenie 8.2

energia potencjalna klocka $m_1$ względem podłogi	+
energia potencjalna klocka $m_2$ względem stołu	-
praca wykonana przez siłę grawitacji	+
praca wykonana przez siłę tarcia	-
zmiana energii potencjalnej układu	-
zmiana energii kinetycznej klocka $m_1$	+
zmiana energii kinetycznej klocka $m_2$	+

1) Klocki (połączone nierozciągliwą nitką) poruszają się z takim samym przyspieszeniem, więc w każdej chwili posiadają taką samą prędkość  $v = v_1 = v_2$ , stąd ich energie kinetyczne (w dowolnej chwili) są odpowiednio równe

$$E_{k1} = \frac{m_1 v^2}{2}, \quad E_{k2} = \frac{m_2 v^2}{2}$$

Ponieważ, ich energie kinetyczne w chwili początkowej równe były zeru ( $v_0 = 0$ ) to zmiany energii kinetycznej są równe właśnie powyższym wartościom  $E_k$

$$\Delta E_{k1} = \frac{m_1 v^2}{2}, \quad \Delta E_{k2} = \frac{m_2 v^2}{2}$$

Widać, że bezwzględna zmiana energii kinetycznej zależy od masy ciała.

2) Zmiana całkowitej energii kinetycznej układu jest co do bezwzględnej wartości równa zmianie energii potencjalnej układu tylko wtedy gdy działają siły zachowawcze. Ponieważ występuje tarcie pomiędzy stołem i klockiem  $m_1$ , które jest siłą niezachowawczą, więc tylko część z nagromadzonej energii potencjalnej klocka  $m_2$  jest podczas jego ruchu w dół zamieniana na energię kinetyczną (obu klocków). Bezwzględna zmiana energii kinetycznej jest więc mniejsza od bezwzględnej zmiany energii potencjalnej układu.

### Ćwiczenie 8.3

Dane:  $h, M_z, R_z, G$ .

Siła grawitacji jest siłą zachowawczą więc w jej polu

$$E_k + E_p = \text{const.}$$

Na powierzchni Ziemi

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \quad E_p = -G \frac{M_z m}{R_z}$$

a na wysokości  $h$  nad powierzchnią Ziemi

$$E_k = 0 \quad E_p = -G \frac{M_z m}{(R_z + h)}$$

Łącząc powyższe równania (korzystając z warunku  $E_k + E_p = \text{const.}$ ) otrzymujemy

$$\frac{mv^2}{2} - G \frac{M_z m}{R_z} = -G \frac{M_z m}{(R_z + h)}$$

a po przekształceniach

$$v = \sqrt{2GM_z \left( \frac{1}{R_z} - \frac{1}{R_z + h} \right)}$$

**Ćwiczenie 8.4**

Dane:  $h$ , strata energii mechanicznej przy odbiciu od podłoża  $s = 1/3$ .

Piłka puszczone z wysokości  $h$  nad podłożem posiada energię potencjalną  $E_p = mgh$  (względem podłoża). W trakcie spadania energia potencjalna zamienia się całkowicie w energię kinetyczną. W chwili odbicia  $s = 1/3$  z energii kinetycznej jest zamieniana na energię wewnętrzną, więc po odbiciu energia kinetyczna (mechaniczna) jest równa  $q = 1 - s = 2/3$  energii przed odbiciem.

Oznacza to, że energia potencjalna jaką uzyska ciało przy wznoszeniu będzie równa  $2/3$  energii początkowej, a tym samym ciało po odbiciu wzniesie się na  $2/3$  wysokości początkowej. Możemy więc napisać ogólne wyrażenie na wysokość po  $n$ -tym odbiciu od podłoża

$$h_n = qh_{n-1}$$

gdzie  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Zgodnie z tym oznaczeniem  $h_0 = h$  jest początkową wysokością z jakiej spada ciało. Widzimy, że kolejne wysokości tworzą ciąg geometryczny. Stąd

$$h_4 = hq^4 = h\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}h$$

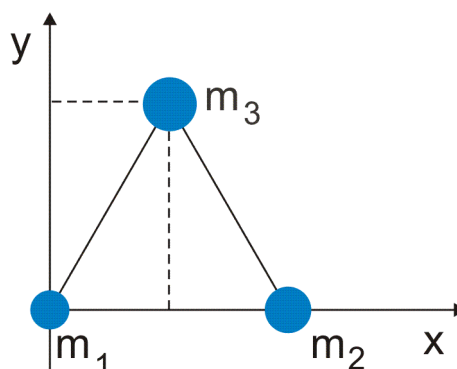
Analogicznie energia mechaniczna zamieniona na energię wewnętrzną (podczas 4-ech odbić) wynosi

$$\Delta E = mgh - mgh_4 = \frac{65}{81}mgh$$

**Ćwiczenie 9.1**

Dane:  $m_1 = 1$  kg,  $m_2 = 2$  kg i  $m_3 = 3$  kg,  $a = 1$  m.

Ponieważ wynik nie zależy od wyboru układu odniesienia to możemy przyjąć dowolny układ odniesienia w szczególności taki jak na rysunku poniżej.



Współrzędne  $x$ ,  $y$  położenia mas  $m_1$ ,  $m_2$  i  $m_3$  wynoszą odpowiednio

$$(0,0); (a,0); \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

Współrzędne środka masy obliczamy zgodnie z równaniem (9.3)

$$x_{sr.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{7}{12} m$$

$$y_{sr.m.} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\sqrt{3}}{4} m$$

Zwróćmy uwagę, że położenie środka masy nie pokrywa się ze środkiem geometrycznym.

### Ćwiczenie 9.2

Dane:  $M_\alpha/M_{Th} = 4/234$  (w jednostkach masy atomowej),  $v = 10^7$  m/s.

Ze względu na nieobecność sił zewnętrznych pęd układu, który przed rozpadem był równy zeru po rozpadzie pozostaje niezmienny: pęd początkowy = pęd końcowy:

$$0 = M_{Th} \mathbf{v}_{Th} + M_\alpha \mathbf{v}_\alpha$$

Skąd  $v_{Th} = -2.4 \cdot 10^5$  m/s

### Ćwiczenie 10.1

Dane: zderzenie sprężyste,  $v_2 = 0$ , ołów  $m_2 = 206 m_1$ , węgiel  $m_2 = 12 m_1$ , wodór  $m_2 = m_1$ .

Energia kinetyczna neutronu przed zderzeniem:  $E_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2}$

Energia kinetyczna neutronu po zderzeniu:  $E_{k2} = \frac{m_1 u_1^2}{2}$

Względna zmiana energii neutronu podczas zderzenia:  $\frac{E_{k1} - E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{v_1^2 - u_1^2}{v_1^2} = 1 - \frac{u_1^2}{v_1^2}$

Ponieważ, zderzenie odbywa się z nieruchomym jądrem ( $v_2 = 0$ ) to na podstawie wzoru (10.3)

$$u_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1$$

więc

$$\frac{E_{k1} - E_{k2}}{E_{k1}} = 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

dla ołowiu  $m_2 = 206 m_1$  więc  $\frac{E_{k1} - E_{k2}}{E_{k1}} = 0.02$  (2%)



dla węgla  $m_2 = 12 m_1$  więc  $\frac{E_{k1} - E_{k2}}{E_{k1}} = 0.28$  (28%)

dla wodoru  $m_2 = m_1$  więc  $\frac{E_{k1} - E_{k2}}{E_{k1}} = 1$  (100%)

Wyniki te pokazują dlaczego parafina, która jest bogata w wodór jest dobrym spowalniczem (a nie ołów).

### Ćwiczenie 10.2

Dane:  $m = 5\text{g}$ ,  $M = 2\text{kg}$ .

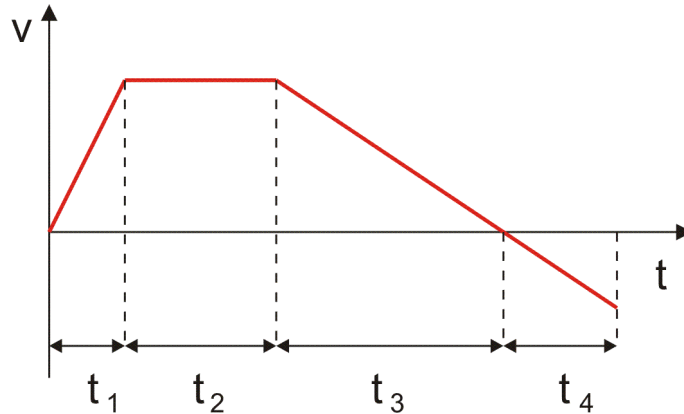
Obliczamy stosunek energii kinetycznej układu klocek – pocisk, zaraz po zderzeniu, do energii kinetycznej pocisku przed zderzeniem. Korzystając ze wzoru (10.7) otrzymujemy

$$\frac{\frac{1}{2}(m+M)u^2}{\frac{1}{2}mV^2} = \frac{(m+M)gh}{\frac{1}{2}m\left(\frac{m+M}{m}\right)^2 2gh} = \frac{m}{m+M}$$

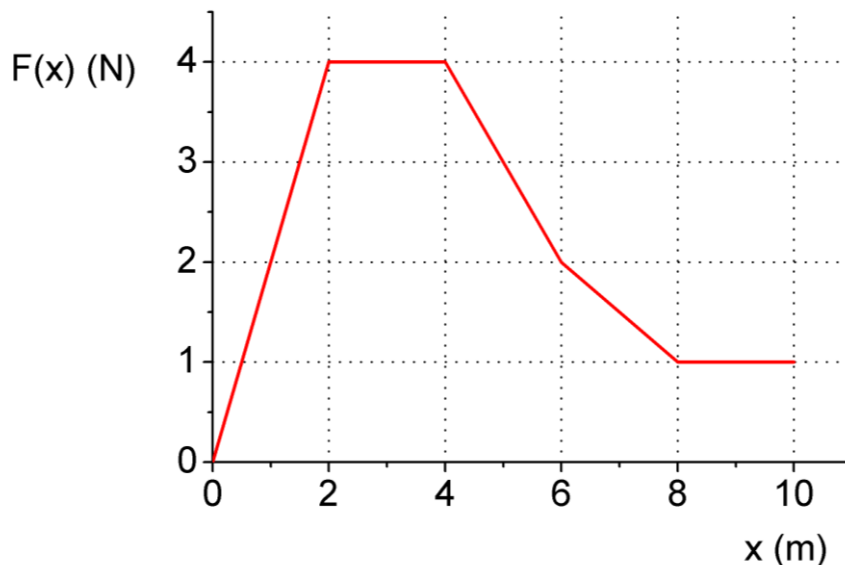
Podstawiając dane otrzymujemy stosunek  $m/(m+M) \cong 0.0025$ . Oznacza to, że zachowane zostaje tylko 0.25% początkowej energii kinetycznej, a 99.75% ulega zmianie w inne formy energii.

## Test II

1. Ciało porusza się ruchem prostoliniowym po gładkiej poziomej powierzchni. Prędkość tego ciała zmienia się w czasie ruchu tak jak pokazano na rysunku poniżej. Określ czy praca wykonana przez siłę wypadkową w kolejnych przedziałach czasu  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  i  $t_4$  jest dodatnia, ujemna czy równa zero?



2. W wyniku działania siły tarcia ciało o masie  $m = 5$  kg zmniejsza swoją prędkość od wartości  $v_1 = 10$  m/s do wartości  $v_2 = 6$  m/s. Jaką pracę wykonała siła tarcia?
3. Siła, której zależność od położenia jest pokazana na rysunku poniżej, przesuwa ciało o masie  $m = 1$  kg wzdłuż linii prostej po poziomej powierzchni. Jaką pracę wykonuje ta siła przesuając ciało od położenia  $x_0 = 0$  do położenia  $x = 10$  m? Jaką prędkość uzyskuje to ciało na drodze 10 m, przy zaniedbaniu tarcia i wszelkich oporów? Prędkość początkowa ciała  $v_0 = 0$ .



4. Pod działaniem siły pęd ciała wzrósł dwukrotnie. Ile razy wzrosła energia kinetyczna tego ciała?
5. Sformułuj zasadę zachowania energii mechanicznej.

6. Ciało o masie  $m = 1$  kg rzucono pionowo w górę z prędkością  $v_0 = 20$  m/s. Ile wynosiła energia potencjalna a ile energia kinetyczna tego ciała na wysokości 15 m? Opory powietrza pomijamy. Należy przyjąć  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.
7. Ciało, któremu nadano prędkość  $v_0$  pionowo w górę, wzniosło się z powierzchni planety na wysokość równą jej promieniowi. Jaką prędkość należy nadać ciału na powierzchni tej planety, aby oddaliło się od niej nieskończenie daleko?
8. Na układ działa stała siła zewnętrzna. Odpowiedz, czy układ zachowuje swój całkowity pęd? Odpowiedź uzasadnij.
9. Pocisk o masie  $m = 2$  kg wystrzelono z prędkością  $v = 400$  m/s z działa o masie  $M_1 = 2000$  kg a następnie taki sam pocisk, z tą samą prędkością z działa o masie  $M_2 = 3000$  kg. Porównaj energie odrzutu obu dział oraz ich pędy zaraz po wystrzeleniu pocisku.
10. Obiekt o masie  $m$  poruszający się z prędkością  $v$  uderza w inny spoczywający obiekt o masie dwukrotnie większej. Obliczyć prędkość obiektów tuż po zderzeniu, zakładając, że zderzenie jest całkowicie niesprężyste.
11. Jaki warunek musi być spełniony aby w trakcie całkowicie niesprężystego zderzenia dwóch ciał ich energia kinetyczna (jaką miały przed zderzeniem) zamieniła się całkowicie w ich energię wewnętrzną (po zderzeniu)?

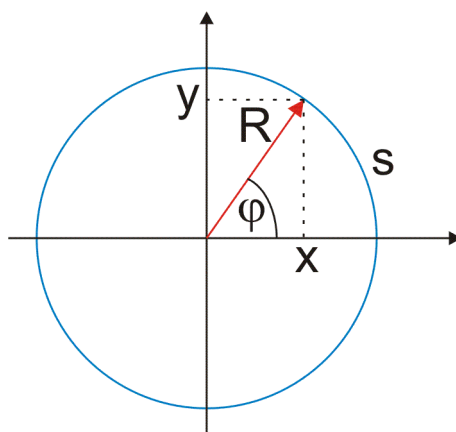
# MODUŁ III

## 11 Ruch obrotowy

W naszych dotychczasowych rozważaniach nad ruchem ciał traktowaliśmy je jako punkty materialne tzn. jako obiekty obdarzone masą, których rozmiary możemy zaniedbać. Jednak rzeczywiste ciała w ruchu mogą się obracać czy wykonywać drgania. W kolejnych rozdziałach zajmiemy się właśnie ruchem obrotowym i drgającym ciał. Będziemy rozważać ruch obrotowy ciał sztywnych tj. obiektów, w których odległości wzajemne punktów są stałe. Zajmiemy się również bardziej ogólnym przypadkiem, w którym ciało sztywne wykonuje zarówno ruch postępowy jak i obrotowy.

### 11.1 Kinematyka ruchu obrotowego

Nasze rozważania zaczniemy od wyprowadzenia równań kinematyki ruchu obrotowego, podobnych do równań kinematyki ruchu postępowego. W ruchu obrotowym wielkością analogiczną do przesunięcia jest *przesunięcie kątowe*  $\varphi$ . Kąt  $\varphi$  określa położenie (kątowe) punktu  $P$  względem układu odniesienia (rysunek 11.1).



Rys. 11.1. Punkt  $P$  obracającego się ciała zatacza łuk o długości  $s$

Związek  $\varphi = s/R$  między drogą liniową  $s$ , a przesunięciem kątowym  $\varphi$  wynika bezpośrednio z miary łukowej kąta  $\varphi$ . W ruchu obrotowym wielkością analogiczną chwilowej prędkości liniowej  $v$  jest chwilowa *prędkość kątowa*  $\omega$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R} \quad (11.1)$$

W ruchu obrotowym podobnie jak w ruchu po okręgu  $\omega$  jest też nazywana *częstością kątową*  $\omega$  i jest związana z częstotliwością  $f$  relacją

$$\omega = 2\pi f \quad (11.2)$$

Podobnie jak chwilowe przyspieszenie liniowe  $a$  zostało zdefiniowane chwilowe *przyspieszenie kątowe*  $\alpha$

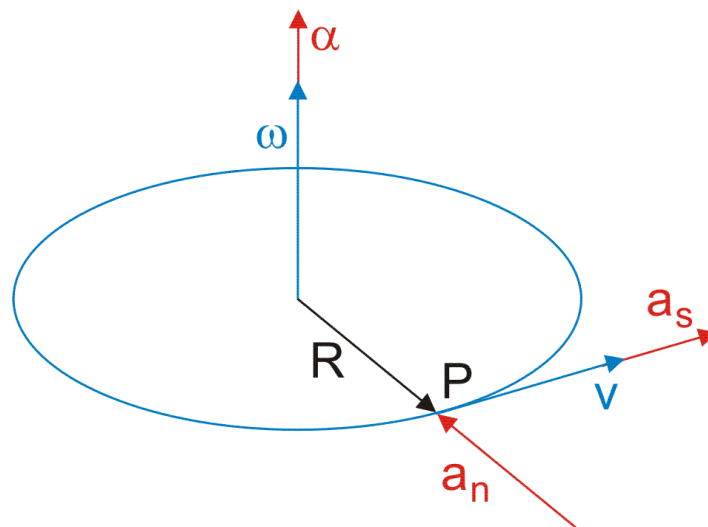
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} = \frac{a}{R} \quad (11.3)$$

Możemy teraz podać opis ruchu obrotowego ze stałym przyspieszeniem kątowym  $\alpha$  poprzez analogię do ruchu postępowego jednostajnie zmiennego.

Tab. 11.1.

Ruch postępowy	Ruch obrotowy
$a = \text{const.}$	$\alpha = \text{const.}$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$

Pamiętajmy, że zarówno prędkość kątowa jak i przyspieszenie kątowe są wektorami. Na rysunku 11.2 poniżej, pokazane są wektory: prędkości liniowej  $\mathbf{v}$ , prędkości kątowej  $\boldsymbol{\omega}$ , przyspieszenia stycznego  $\mathbf{a}_s$ , przyspieszenia normalnego  $\mathbf{a}_n$  i przyspieszenia kąowego  $\boldsymbol{\alpha}$  punktu  $P$  obracającego się ciała sztywnego. Punkt  $P$  porusza się ruchem przyspieszonym po okręgu.



Rys. 11.2. Kierunki wektorów  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{a}_s$ ,  $\mathbf{a}_n$  i  $\boldsymbol{\alpha}$  punktu  $P$  poruszającego się po okręgu wokół pionowej osi

Związki pomiędzy wielkościami liniowymi i kątowymi w postaci skalarnej są dane równaniami (11.1), (11.3) oraz równaniem (3.14). Natomiast te zależności w postaci wektorowej mają postać

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \\ \mathbf{a}_s &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} \\ \mathbf{a}_n &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \end{aligned} \quad (11.4)$$



Więcej o ruchu przyspieszonym po okręgu możesz przeczytać w *Dodatku 1*, na końcu modułu III.



### Jednostki

Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli kąt  $\varphi$  jest mierzony w radianach (rad) to jednostką prędkości kątowej  $\omega$  jest radian na sekundę (rad/s), a przyspieszenia kątowego  $\alpha$  radian na sekundę do kwadratu (rad/s<sup>2</sup>).

Na zakończenie spróbuj wykonać następujące ćwiczenie.



### Ćwiczenie 11.1

W wielu czytnikach CD płyta ma stałą prędkość liniową natomiast zmienia się jej prędkość kątowa. Dzięki tej stałej prędkości liniowej można zachować jednakowo gęste upakowanie informacji na całym dysku. Ta prędkość dla dysku audio (pojedynczej prędkości) wynosi 1.25 m/s. Całkowita długość spiralnie naniesionej ścieżki wynosi 5.55 km. Średnica zewnętrzna dysku jest równa 12 cm, a wewnętrzna 2.5 cm. Oblicz maksymalną i minimalną prędkość kątową dysku. Jakie jest średnie przyspieszenie kątowe płyty podczas jej ciągłego, całkowitego odczytu? Pamiętaj o odpowiednich jednostkach.

Wynik zapisz poniżej. Wskazówka: Skorzystaj z równań (11.1) i (11.3)


$\omega_{\min} =$

$\omega_{\max} =$

$\alpha =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

## 11.2 Dynamika ruchu obrotowego

Jak wynika z naszego codziennego doświadczenia w ruchu obrotowym ważna jest nie tylko wartość siły, ale to gdzie i pod jakim kątem jest ona przyłożona. Na przykład, drzwi najłatwiej jest otworzyć przykładając siłę na ich zewnętrznej krawędzi i pod kątem prostym do płaszczyzny drzwi. Siła przyłożona wzdłuż płaszczyzny drzwi jak i siła przyłożona w miejscu zawiasów nie pozwalają na ich obrót. Dla ruchu obrotowego wielkością, która odgrywa rolę analogiczną do siły w ruchu postępowym jest *moment siły*  (tzw. moment obrotowy)  $\tau$ . Jeżeli siła  $F$  jest przyłożona w pewnym punkcie to moment siły  $\tau$  względem tego punktu jest definiowany jako



### Definicja


$$\tau = r \times F$$

(11.5)


gdzie wektor  $r$  reprezentuje położenie punktu względem wybranego inercjalnego układu odniesienia.

Moment siły jest wielkością wektorową, której wartość bezwzględna wynosi (iloczyn wektorowy)

$$\tau = rF \sin \theta \quad (11.6)$$

Wielkość  $r$  nazywamy *ramieniem siły* . Z równania (11.6) wynika, że tylko składowa siły prostopadła do ramienia  $F_{\perp} = F \sin \theta$  wpływa na moment siły.

### 11.2.1 Moment pędu

Zdefiniujmy teraz wielkość, która w ruchu obrotowym odgrywa rolę analogiczną do pędu. Wielkość  $L$  nazywamy *momentem pędu*  i definiujemy jako



#### Definicja

$$L = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (11.7)$$

gdzie  $\mathbf{p}$  jest pędem punktu materialnego, a  $\mathbf{r}$  reprezentuje jego położenie względem wybranego inercjalnego układu odniesienia. Wartość  $L$  wynosi

$$L = r p \sin \theta \quad (11.8)$$

Istnieje bezpośrednia zależność pomiędzy momentem siły i momentem pędu. Żeby ją wyprowadzić zróżniczkujemy obie strony równania (11.7)

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \\ &= \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\text{wyp}} \end{aligned} \quad (11.9)$$

Ponieważ wektory  $\mathbf{v}$  oraz  $\mathbf{p}$  są równoległe to ich iloczyn wektorowy jest równy zeru. Natomiast drugi składnik równania jest zgodnie z definicją (11.5) wypadkowym momentem siły. Otrzymujemy więc

$$\tau_{\text{wyp}} = \frac{dL}{dt} \quad (11.10)$$



#### Prawo, zasada, twierdzenie

*Wypadkowy moment siły działający na punkt materialny jest równy prędkości zmian momentu pędu.*

To jest sformułowanie drugiej zasady dynamiki ruchu obrotowego. Równanie (11.10) jest analogiczne do równania (4.6) dla ruchu postępowego.

Analogicznie możemy sformułować pierwszą zasadę dynamiki ruchu obrotowego



#### Prawo, zasada, twierdzenie

*Ciało sztywne, na które nie działa moment siły pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem obrotowym jednostajnym.*



oraz trzecią zasadę dynamiki ruchu obrotowego



**Prawo, zasada, twierdzenie**

*Jeżeli dwa ciała oddziałują wzajemnie, to moment sił z jakim działa ciało drugie na ciało pierwsze jest równy i przeciwnie skierowany do momentu siły, z jakim ciało pierwsze działa na drugie.*

**11.2.2 Zachowanie momentu pędu**

Dla układu  $n$  cząstek możemy zsumować momenty sił działające na poszczególne punkty materialne

$$\sum_i \tau_i = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n L_i \right) = \frac{dL}{dt} \quad (11.11)$$

gdzie  $L$  oznacza teraz całkowity moment pędu układu.  
Zauważmy, że



**Prawo, zasada, twierdzenie**

*Jeżeli na układ nie działa zewnętrzny moment siły (lub wypadkowy moment sił zewnętrznych jest równy zero) to całkowity moment pędu układu pozostaje stały.*

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad \text{lub} \quad L = \text{const.} \quad (11.12)$$

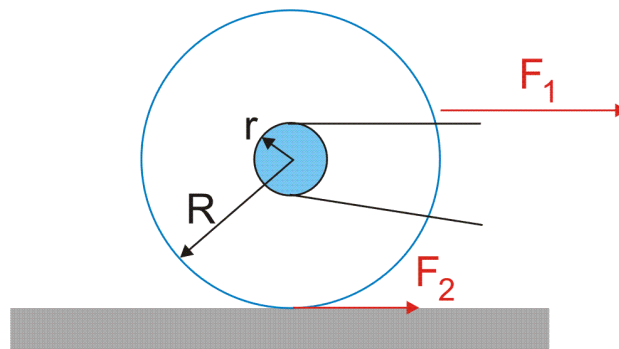
Zależność powyższa wyraża *zasadę zachowania momentu pędu*.



**Ćwiczenie 11.2**

Rozpatrzmy teraz następujący przykład. Rower jedzie ze stałą prędkością gdy siła działająca pomiędzy nawierzchnią i kołem  $F_2 = 5$  N. Z jaką siłą  $F_1$  łańcuch ciągnie zębatkę jeżeli stosunek  $R/r = 10$ ?

Wynik zapisz poniżej. Wskazówka: Zauważ, że prędkość kątowa jest stała więc  $dL/dt = 0$  i wypadkowy moment sił jest równy zero.

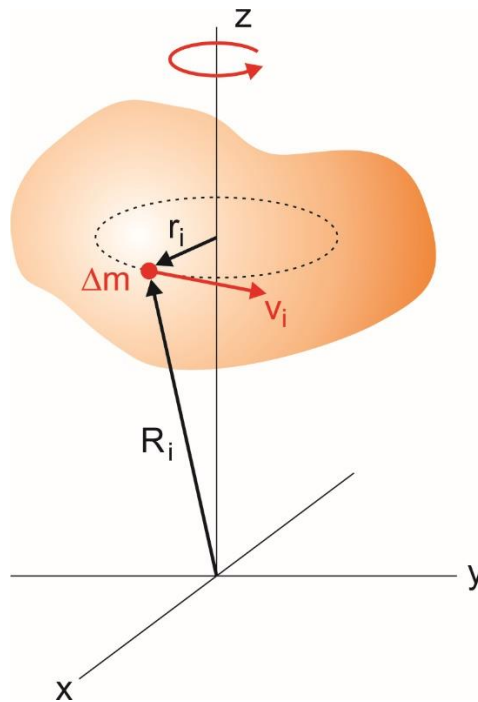


$F_1 =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

### 11.3 Dynamika bryły sztywnej

Większość ciał w przyrodzie to nie punkty materialne ale rozciągnięte ciała sztywne. Przeanalizujemy teraz ruch takiej bryły sztywnej obracającej się ze stałą prędkością kątową  $\omega$  wokół stałej osi obrotu w układzie środka masy. Zauważmy, że chociaż wszystkie punkty mają tę samą prędkość kątową  $\omega$  to punkty znajdujące się w różnych odległościach od osi obrotu mają różną prędkość liniową  $v$  (rysunek 11.3). Prędkość  $i$ -tego punktu o masie  $\Delta m_i$  wynosi  $v_i = r_i \omega$  gdzie  $r_i$  jest odległością od osi obrotu



Rys. 11.3. Obracająca się bryła sztywna

Obliczamy teraz wartość momentu pędu  $L$  tego ciała

$$L = \sum_i r_i \Delta m_i v_i = \sum_i r_i \Delta m_i (r_i \omega) = \left( \sum_i r_i^2 \Delta m_i \right) \omega \quad (11.13)$$

Wielkość w nawiasie nazywamy *momentem bezwładności*  $I$  , który definiujemy jako



#### Definicja

$$I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i \quad (11.14)$$

a dla ciągłego rozkładu masy



#### Definicja

$$I = \int r^2 dm \quad (11.15)$$

Zwróćmy uwagę, że moment bezwładności  $I$  zależy od położenia osi obrotu. Możemy teraz wyrazić moment pędu poprzez moment bezwładności

$$L = I\omega \quad (11.16)$$

a ponieważ zgodnie z równaniem (11.10)  $\tau = dL/dt$  więc

$$\tau = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha \quad (11.17)$$

gdzie  $\alpha$  jest przyspieszeniem kątowym.

Obliczmy teraz energię kinetyczną obracającego się ciała

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2 \quad (11.18)$$

więc

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (11.19)$$

Zestawmy teraz odpowiednie wielkości obliczone dla ruchu obrotowego z ich odpowiednikami dla ruchu postępowego.

Tab. 11.2

Ruch postępowy	Ruch obrotowy
$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$
$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$	$\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$
$E_k = \frac{1}{2} m v^2$	$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$

Z tego porównania widać, że moment bezwładności  $I$  jest analogiczną wielkością do masy  $m$  w ruchu postępowym. Zwróćmy uwagę, że w przeciwieństwie do masy moment bezwładności zależy od osi, wokół której obraca się ciało. Momenty bezwładności niektórych ciał sztywnych są podane w tabeli 11.3.

Tab. 11.3

Ciało	moment bezwładności $I$
Obręcz, pierścień o promieniu $R$ , względem osi obręczy	$MR^2$
Krążek, walec względem osi walca	$\frac{1}{2} MR^2$
Pręt o długości $l$ , względem osi symetrii prostopadłej do pręta	$\frac{1}{12} Ml^2$
Pełna kula o promieniu $R$ , względem średnicy	$\frac{2}{5} MR^2$



Przykład obliczania momentu bezwładności znajdziesz w *Dodatku 2*, na końcu modułu III.

Często do obliczania momentu bezwładności wygodnie jest posłużyć się twierdzeniem Steinera. Podaje ono zależność pomiędzy momentem bezwładności  $I$  ciała względem danej osi, a momentem bezwładności  $I_{sr.m.}$  tego ciała względem osi przechodzącej przez jego środek masy i równoległej do danej. Związek ten wyraża się zależnością



**Prawo, zasada, twierdzenie**

$$I = I_{sr.m.} + Md^2 \quad (11.20)$$

gdzie  $d$  jest odległością między osiami, a  $M$  jest masą ciała.



### Ćwiczenie 11.3

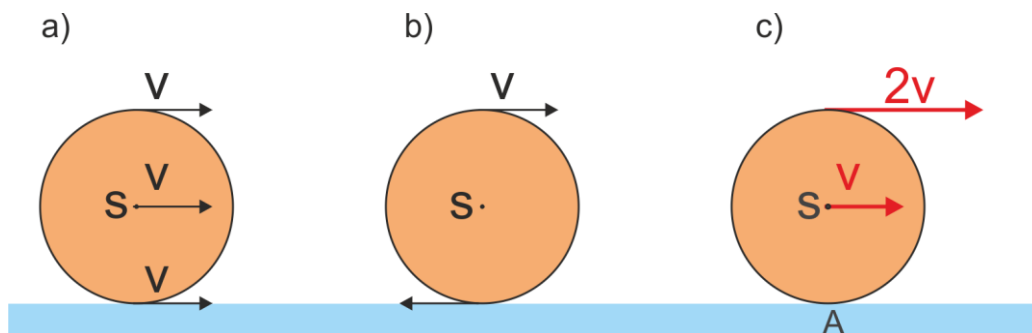
Teraz korzystając z powyższego twierdzenia i z danych w tabeli 11.3 oblicz moment bezwładności pręta o masie  $M$  i długości  $l$  względem osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jeden z jego końców. Wynik zapisz poniżej.

$I =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

## 11.4 Ruch obrotowo-postępowy

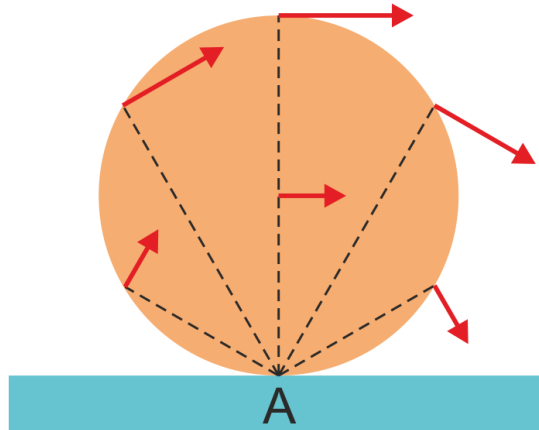
Na co dzień często mamy do czynienia z toceniem się ciał. W przeciwieństwie do ruchu obrotowego względem nieruchomej osi obrotu w przypadku toczenia występuje zarówno ruch postępowy, jak i obrotowy. Dlatego spróbujemy opisać toczenie jako złożenie ruchu postępowego i obrotowego. W tym celu prześledźmy ruch walca o promieniu  $R$  pokazany na rysunku 11.4.



Rys. 11.4. Toczenie (c) jako złożenie ruchu postępowego (a) i obrotowego (b)

W ruchu postępowym, rysunek (a), wszystkie punkty poruszają się z takimi samymi prędkościami, natomiast w ruchu obrotowym wokół środka masy  $S$ , rysunek (b), przeciwległe punkty poruszają się z przeciwnymi prędkościami, a środek jest nieruchomy.

Na rysunku (c) pokazano wynik złożenia (sumowania) odpowiednich wektorów z rysunków (a) i (b). Zwróćmy uwagę, że podstawa walca (punkt  $A$  styczności z podłożem) w każdej chwili spoczywa (prędkość chwilowa  $v_A = 0$ ). Natomiast prędkość liniowa punktów  $S$  i  $B$  jest proporcjonalna do ich odległości od punktu  $A$  (punkt  $B$  w odległości  $2R$  ma prędkość dwukrotnie większą niż punkt  $S$  w odległości  $R$ ). Jeszcze pełniej widać to na rysunku 11.5 gdzie narysowane są prędkości chwilowe kilku punktów na obwodzie toczącego się walca.



Rys. 11.5. Toczenie się walca jako obrót wokół punktu  $A$

Widać, że prędkość każdego z tych punktów jest prostopadła do linii łączącej ten punkt z podstawą  $A$  i proporcjonalna do odległości tego punktu od  $A$ . Takie zachowanie jest charakterystyczne dla ciała wykonującego ruch obrotowy względem nieruchomej osi. Oznacza to, że opisywany walec obraca się wokół punktu  $A$ , a co za tym idzie, że możemy toczenie opisywać również wyłącznie jako ruch obrotowy ale względem osi przechodzącej przez punkt  $A$  styczności z powierzchnią, po której toczy się ciało.



### Przykład

W celu zilustrowania równoważności obu opisów obliczymy teraz energię kinetyczną walca o masie  $m$  toczącego się z prędkością  $v$ . Najpierw potraktujemy toczenie jako złożenie ruchu postępowego i obrotowego względem środka masy. Energię kinetyczną obliczamy jako sumę energii ruchu postępowego i obrotowego

$$E = E_{kp} + E_{ko} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_{sr.m.}\omega^2}{2} \quad (11.21)$$

Podstawiając wartość momentu bezwładności walca odczytaną z tabeli 11.3 oraz uwzględniając, że dla ciała toczącego się bez poślizgu  $\omega = v/R$  (równanie 11.1) otrzymujemy

$$E = \frac{3}{4}mv^2 \quad (11.22)$$

Teraz powtórzmy nasze obliczenia ale potraktujemy toczenie wyłącznie jako obrót względem osi obrotu w punkcie  $A$  zetknięcia walca z powierzchnią.

Energię kinetyczną obliczamy więc jako

$$E = E_{ko} = \frac{I_A \omega^2}{2} \quad (11.23)$$

Moment bezwładności walca  $I_A$ , względem osi  $A$ , obliczamy z twierdzenia Steinera

$$I_A = I_{sr.m.} + mR^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 \quad (11.24)$$

Po podstawieniu tej wartości i uwzględniając, że  $\omega = v/R$  (równanie 11.1) otrzymujemy

$$E = \frac{3}{4}mv^2 \quad (11.25)$$

W obu przypadkach otrzymaliśmy ten sam rezultat.

Widzimy, że



#### **Prawo, zasada, twierdzenie**

*Ruch ciała będący złożeniem ruchu postępowego środka masy i obrotowego względem osi przechodzącej przez środek masy jest równoważny ruchowi obrotowemu wokół osi przechodzącej przez punkt styczności ciała z powierzchnią, po której się ono toczy.*



#### **Ćwiczenie 11.4**

Krażek (walec) i kula o takich samych masach  $m$  i promieniach  $R$  staczają się bez poślizgu po równi pochyłej z wysokości  $h$ . Korzystając z zasady zachowania energii oblicz ich prędkości u dołu równi. Jaki byłby wynik obliczeń gdyby te ciała ześlizgiwały się z równi? Obliczenia przeprowadź traktując toczenie jako złożenie ruchu postępowego i obrotowego lub jako wyłącznie jako ruch obrotowy.

Wynik zapisz poniżej.

$v_{\text{walca}} =$

$v_{\text{kuli}} =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.



Inny przykładem ruchu obrotowego, w którym oś obrotu nie jest nieruchomą w inercjalnym układzie odniesienia jest bąk wirujący dookoła pewnej osi symetrii. O ruchu precesyjnym bąka możesz przeczytać w *Dodatku 3*, na końcu modułu III.

## 12 Ruch drgający

Ruch, który powtarza się w regularnych odstępach czasu, nazywamy *ruchem okresowym*. Przeszczenie cząstki w ruchu periodycznym można zawsze wyrazić za pomocą funkcji sinus lub cosinus (tzw. funkcji harmonicznyc). Ruch drgający jest powszechną formą ruchu obserwowaną w życiu codziennym i dlatego jest ważnym przedmiotem fizyki.

### 12.1 Siła harmoniczna, drgania swobodne



#### Definicja

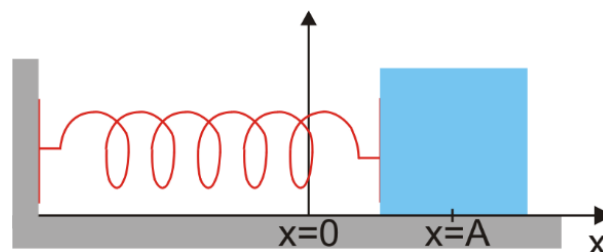
*Siłą harmoniczną (sprężystości) nazywamy siłę działającą na ciało proporcjonalną do przesunięcia tego ciała od początku układu i skierowaną ku początkowi układu.*

Dla przesunięcia wzdłuż osi  $x$ , siła sprężystości jest dana równaniem

$$F = -kx \quad (12.1)$$

gdzie  $x$  jest wychyleniem (przesunięciem) ciała od położenia równowagi. Stałą  $k$  nazywamy *współczynnikiem sprężystości*. Z siłą harmoniczną (sprężystości) spotkaliśmy się już w punktach 7.2 i 8.3 gdy rozważaliśmy siłę związaną z rozciąganiem sprężyny i elastycznej liny.

Na rysunku 12.1 pokazane jest ciało o masie  $m$  przymocowane do sprężyny, mogące poruszać się bez tarcia po poziomej powierzchni. Takie drgania, gdy siła sprężystości jest zarazem siłą wypadkową nazywamy *drganiami swobodnymi*.



Rys. 12.1. Prosty oscylator harmoniczny

Jeżeli sprężyna zostanie rozciągnięta tak, aby masa  $m$  znalazła się w chwili  $t = 0$  w położeniu  $x = A$ , (rysunek 12.1), a następnie zostanie zwolniona, to położenie masy w funkcji czasu może być dane równaniem

$$x(t) = A \cos \omega t \quad (12.2)$$

Funkcja  $x(t)$  opisuje zarazem wychylenie ciała z położenia równowagi.

Sprawdźmy teraz czy to równanie dobrze opisuje ruch harmoniczny. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona

$$ma = -kx \quad (12.3)$$

Żeby obliczyć przyspieszenie  $a$  obliczamy (zgodnie z równaniami 3.1) odpowiednie pochodne wyrażenia (12.2)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \omega t \quad (12.4)$$

oraz

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos \omega t \quad (12.5)$$

Teraz wyrażenia (12.2) i (12.5) podstawiamy do równania opisującego ruch oscylatora (12.3) i otrzymujemy

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (12.6)$$

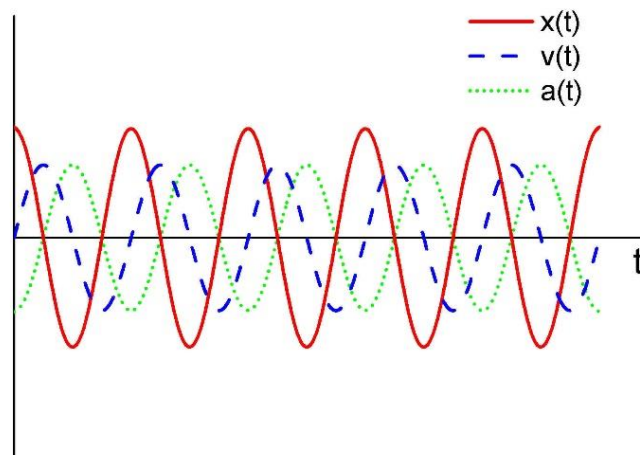
Widzimy, że zaproponowane równanie (12.2) jest rozwiązaniem równania ruchu oscylatora harmonicznego (12.3) przy warunku, że  $\omega = \sqrt{k/m}$  (równanie 12.6).

Zwróćmy uwagę, że funkcja  $x(t) = A \sin \omega t$  jest również rozwiązaniem równania ale przy innych warunkach początkowych bo gdy  $t = 0$  to położenie masy  $x = 0$ , a nie jak przyjęliśmy  $x = A$ .

Ogólne rozwiązanie równania ruchu oscylatora harmonicznego (12.3) ma postać

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (12.7)$$

Stała  $A$  (opisująca maksymalne wychylenie) jest *amplitudą*  $\text{P}$  ruchu, wyrażenie  $\omega t + \phi$  nazywamy *fazą drgań*  $\text{P}$ , a  $\phi$  *fazą początkową*  $\text{P}$  (stałą fazową). Stałe  $A$  i  $\phi$  są wyznaczone przez warunki początkowe. Na przykład dla  $\phi = \pi/2$  otrzymujemy rozwiązanie (12.2). Równania (12.2), (12.4) i (12.5) opisują kolejno położenie, prędkość i przyspieszenie w funkcji czasu. Zależności te są pokazane na rysunku 12.2.



Rys. 12.2. Wykres zależności  $x(t)$ ,  $v(t)$ ,  $a(t)$  dla prostego ruchu harmonicznego



Zwróćmy uwagę, że wychylenie z położenia równowagi  $x(t)$  oraz przyspieszenie  $a(t)$  (a tym samym siła) osiągają równocześnie maksymalne wartości, przy czym zwroty wektorów  $x(t)$  i  $a(t)$  są przeciwne (równanie (12.3)) i stąd przeciwne znaki. Natomiast prędkość  $v(t)$  jest przesunięta w fazie (względem położenia) o  $\pi/2$  co odzwierciedla fakt, że prędkość osiąga maksimum przy przechodzeniu oscylującej masy przez położenie równowagi, a jest zerowa przy maksymalnym wychyleniu gdy ciało zawraca (rysunek 12.1).

Odpowiednie maksymalne wartości położenia, prędkości i przyspieszenia wynoszą

$$\begin{aligned}x_{\max} &= A \\v_{\max} &= A\omega \\a_{\max} &= A\omega^2\end{aligned}\quad (12.8)$$

Wartości funkcji sinus i cosinus powtarzają się gdy kąt zmienia się o  $2\pi$ . Oznacza to, że funkcje  $x(t)$ ,  $v(t)$  i  $a(t)$  przyjmują taką samą wartość po czasie  $t = 2\pi/\omega$ . Ten czas jest więc okresem ruchu  $T$ . Uwzględniając zależność (12.6) otrzymujemy

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\quad (12.9)$$

Zwróćmy uwagę, że okres drgań harmonicznyc  $T$  *jest niezależny od amplitudy drgań  $A$* . Ta właściwość drgań harmonicznyc została wykorzystana w konstrukcji zegara wahadłowego.

Możesz prześledzić drgania harmoniczne masy zawieszanej na nieważkiej sprężynie w zależności od jej współczynnika sprężystości  $k$ , masy  $m$  i od amplitudy ruchu  $A$  korzystając z programu komputerowego „Drgania swobodne” dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.

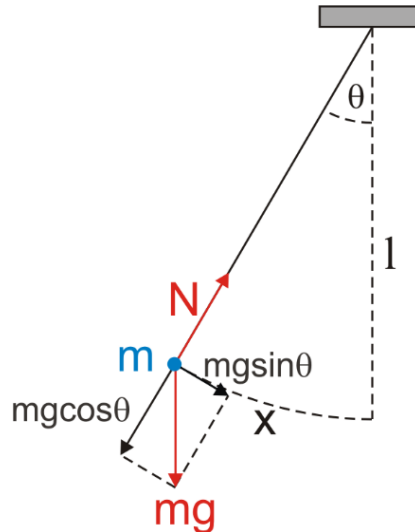
## 12.2 Wahadła

### 12.2.1 Wahadło proste

**Wahadło proste** (matematyczne) jest to wyidealizowane ciało o masie punktowej, zawieszone na cienkiej, nieważkiej, nierozciągliwej nici. Kiedy ciało wytrącimy z równowagi to zaczyna się ono wahać w płaszczyźnie poziomej pod wpływem siły ciężkości. Jest to ruch okresowy. Znajdźmy okres  $T$  tego ruchu. Rysunek 12.3 przedstawia wahadło o długości  $l$  i masie  $m$ , odchylone o kąt  $\theta$  od pionu.

Na masę  $m$  działa siła grawitacji  $mg$  i naprężenia nici  $N$ . Siłę  $mg$  rozkładamy na składową radialną (normalną) i styczną. Składowa normalna jest równoważona przez naciąg nici  $N$ . Natomiast składowa styczna przywraca równowagę układu i sprowadza masę  $m$  do położenia równowagi. Składowa styczna siły grawitacji ma wartość

$$F = -mg\sin\theta\quad (12.10)$$



Rys. 12.3. Wahadło matematyczne

Zwróćmy uwagę, że to nie jest, w myśl podanej definicji, siła harmoniczna bo jest proporcjonalna do sinusa wychylenia ( $\sin\theta$ ), a nie do wychylenia  $\theta$ . Jeżeli jednak kąt  $\theta$  jest mały (np.  $5^\circ$ ) to  $\sin\theta$  jest bardzo bliski  $\theta$  (różnica  $\approx 0.1\%$ ). Przeszyczenie  $x$  wzdłuż łuku wynosi (z miary łukowej kąta)  $x = l\theta$ . Przyjmując zatem, że  $\sin\theta \approx \theta$  otrzymujemy

$$F = -mg\theta = -\frac{mg}{l}x \quad (12.11)$$

Tak więc dla małych wychyleń siła jest proporcjonalna do przemieszczenia i mamy do czynienia z ruchem harmonicznym. Równanie (12.11) jest analogiczne do równania (12.1) przy czym  $k = mg/l$ . Możemy więc skorzystać z zależności (12.9) i obliczyć okres wahań

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (12.12)$$

Okres wahadła prostego nie zależy od amplitudy i od masy wahadła.

Możesz prześledzić ruch wahadła matematycznego w zależności od jego długości korzystając z programu komputerowego „Drgania tłumione” dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.

Zauważmy, że pomiar okresu  $T$  może być prostą metodą wyznaczenia przyspieszenia  $g$ .




### Ćwiczenie 12.1

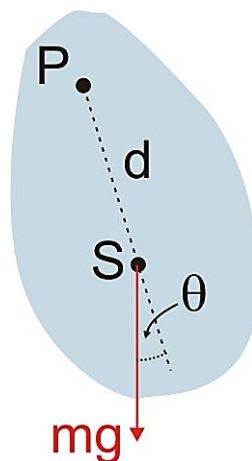
Spróbuj wykonać takie doświadczenie. Na nitce (możliwie długiej np. 1.5 m) zawieś niewielki ciężarek. Następnie wychyl wahadło o niewielki kąt (żeby było spełnione kryterium ruchu harmonicznego) i zmierz okres wahań. Żeby zmniejszyć błąd pomiaru czasu zmierz okres kilku wahań (np. 10) i potem oblicz  $T$ . Ze wzoru (12.12) wylicz przyspieszenie  $g$ .

Wynik zapisz poniżej.

$g =$

### 12.2.2 Wahadło fizyczne

*Wahadłem fizycznym*  nazywamy ciało sztywne zawieszone tak, że może się wahać wokół pewnej osi przechodzącej przez to ciało. Ciało jest zawieszone w punkcie  $P$ , a punkt  $S$ , znajdujący się w odległości  $d$  od punktu  $P$ , jest środkiem masy ciała (rysunek 12.4).



Rys. 12.4. Wahadło fizyczne

Moment siły  $\tau$  działający na ciało wynosi

$$\tau = -mgd \sin \theta \quad (12.13)$$

co w połączeniu ze wzorem (11.17) daje

$$I\alpha = -mgd \sin \theta \quad (12.14)$$

Dla małych wychyleń, dla których  $\sin \theta \approx \theta$  dostajemy równanie

$$I\alpha = -mgd\theta \quad (12.15)$$

Otrzymaliśmy równanie, które ma postać równania (12.3) dla ruchu harmonicznego przy czym  $\theta$  odpowiada  $x$ . Możemy więc teraz napisać wyrażenie na częstość i okres drgań

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad (12.16)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad (12.17)$$

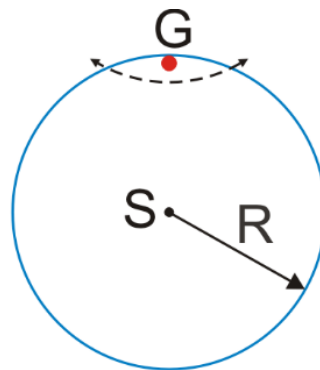
Jako przypadek szczególny rozpatrzmy masę punktową zawieszoną na nici o długości  $l$  (wahadło proste). Wówczas moment bezwładności  $I = ml^2$ , oraz  $d = l$  i otrzymujemy znany wzór dla wahadła prostego

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (12.18)$$



### Ćwiczenie 12.2

Spróbuj teraz samodzielnie obliczyć okres wahań cienkiej obręczy o masie  $m$  i promieniu  $R$  zwieszanej na gwoździu  $G$ , jak na rysunku. Wynik zapisz poniżej.



$T =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

### 12.3 Energia ruchu harmonicznego prostego

Energię potencjalną sprężyny obliczyliśmy w rozdziale 7.2 przy okazji dyskusji o pracy wykonywanej przez siły zmienne. Pokazaliśmy wtedy, że energia potencjalna sprężyny rozciągniętej o  $x$  wynosi

$$E_p = \frac{kx^2}{2} \quad (12.19)$$

Jeżeli sprężyna zostanie rozciągnięta tak aby masa  $m$  znalazła się w chwili  $t = 0$  w położeniu  $x = A$ , to energia potencjalna układu

$$E_p = \frac{kA^2}{2} \quad (12.20)$$

jest zarazem energią całkowitą (energia kinetyczna  $E_k = 0$ ). Jeżeli puścimy sprężynę to jej energia potencjalna będzie zamieniać się w energię kinetyczną masy  $m$ . Przy założeniu, że nie ma tarcia ani innych sił oporu, zgodnie z zasadą zachowania energii suma energii kinetycznej i potencjalnej równa się energii całkowitej w dowolnej chwili ruchu

$$E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \quad (12.21)$$

Korzystając z wyrażen (12.2) i (12.4) na  $x(t)$  i  $v(t)$  oraz pamiętając, że  $m\omega^2 = k$  otrzymujemy

$$\frac{kA^2 \sin^2 \omega t}{2} + \frac{kA^2 \cos^2 \omega t}{2} = \frac{kA^2}{2} \quad (12.22)$$



### Przykład

Spróbujmy teraz obliczyć jaki jest stosunek energii potencjalnej do energii kinetycznej ciała wykonującego drgania harmoniczne, gdy znajduje się ono w połowie drogi między położeniem początkowym, a położeniem równowagi.

Dla danego wychylenia ciała  $x = A/2$  możemy korzystając ze wzoru (12.19) wyliczyć energię potencjalną

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{8} \quad (12.23)$$

Ponieważ energia całkowita  $E$

$$E = \frac{kA^2}{2} = E_k + E_p \quad (12.24)$$

więc podstawiając obliczoną wartość energii potencjalnej (12.23) otrzymujemy energię kinetyczną

$$E_k = \frac{3kA^2}{8} \quad (12.25)$$

Stąd

$$\frac{E_p}{E_k} = \frac{1}{3} \quad (12.26)$$

Widać, że dla  $x = A/2$  energia kinetyczna jest trzykrotnie większa od potencjalnej.



### Ćwiczenie 12.3

Oblicz, dla jakiego wychylenia  $x$  energie kinetyczna i potencjalna są sobie równe?  
Wynik zapisz poniżej.

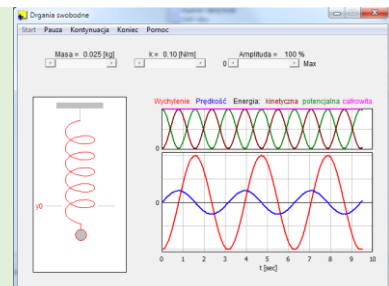
Wskazówka: Dla poszukiwanego wychylenia  $x$  energia potencjalna jest równa energii kinetycznej jest więc zarazem równa połowie energii całkowitej.

$x =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.



Możesz prześledzić energię kinetyczną, potencjalną i całkowitą w ruchu drgającym, korzystając z programu komputerowego „Drgania swobodne” dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.



## 12.4 Oscylator harmoniczny tłumiony

Dotychczas pomijaliśmy fakt ewentualnego tłumienia oscylatora to znaczy strat energii układu oscylatora. W przypadku drgań mechanicznych siłą hamującą ruch cząstki są tak zwane opory ruchu. Przykładem może tu być opór powietrza. Siła oporu ma zwrot przeciwny do prędkości i w najprostszej postaci jest wprost proporcjonalna do prędkości  $F_{op} \sim v$



$$T = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt} \quad (12.27)$$

Jeżeli oprócz siły sprężystości uwzględnimy siłę hamującą to równanie opisujące ruch oscylatora harmonicznego przyjmie teraz postać

$$ma = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} \quad (12.28)$$

lub (na podstawie z równań (3.1))


$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} \quad (12.29)$$

Jeżeli wprowadzimy nową stałą  $\tau = m / \gamma$  (o wymiarze czasu) tak zwaną *stałą czasową*  oraz oznaczmy częstość drgań nietłumionych czyli *częstość własną*   $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  to równanie opisujące ruch (po podzieleniu obustronnie przez  $m$ ) przyjmie postać

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (12.30)$$

Szukamy rozwiązania tego równania w postaci drgań okresowo zmiennych tłumionych na przykład

$$x = Ae^{-\beta t} \cos \omega t \quad (12.31)$$

Proponowane rozwiązanie zawiera czynnik oscylacyjny  $\cos \omega t$  opisujący drgania i czynnik tłumiący  $e^{-\beta t}$  opisujący zmniejszanie się amplitudy drgań. Współczynnik  $\beta = 1/2\tau$  określający wielkość tłumienia nazywamy *współczynnikiem tłumienia* .

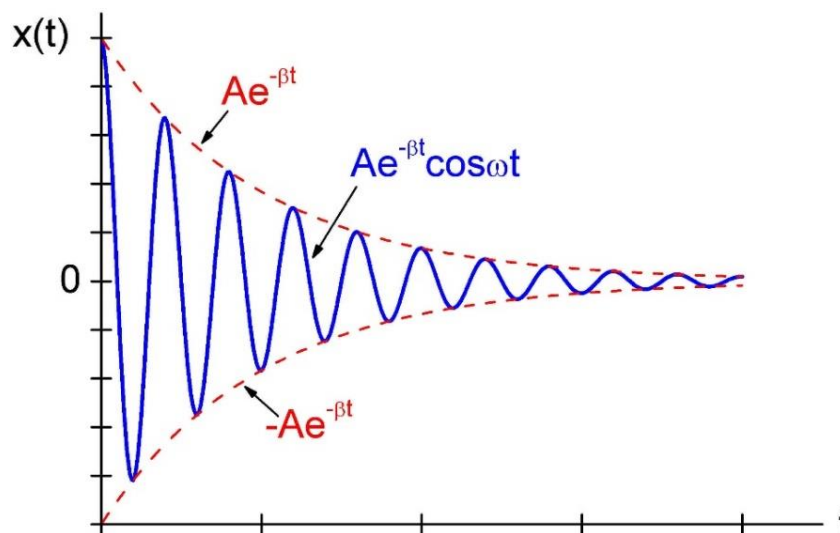


Więcej o wpływie tłumienia na ruch drgający możesz przeczytać w *Dodatku 4*, na końcu modułu III.

Żeby sprawdzić czy zaproponowana funkcja jest rozwiązaniem równania ruchu (12.30) obliczamy odpowiednie pochodne i podstawiamy je do równania ruchu. W wyniku otrzymujemy warunek na częstość drgań tłumionych

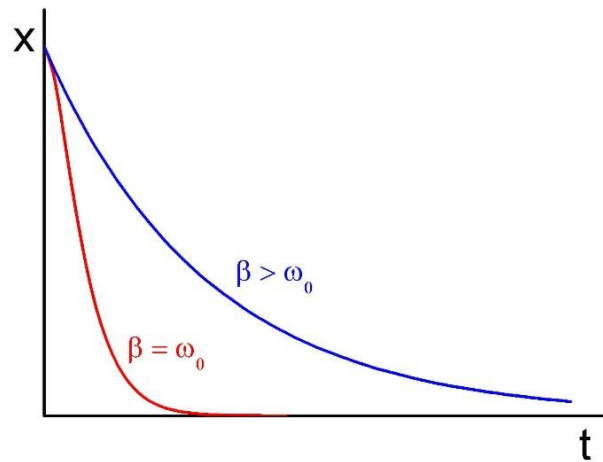
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (12.32)$$

Funkcja (12.31) jest rozwiązaniem równania opisującego ruch harmoniczny tłumiony przy warunku (12.32). Widzimy, że opór zmniejsza zarówno amplitudę jak i częstość drgań, czyli powoduje spowolnienie ruchu. Wielkość tłumienia określa współczynnik tłumienia  $\beta$  (lub stała czasowa  $\tau$ ). Wykres ruchu harmonicznego tłumionego w zależności od czasu jest pokazany na rysunku 12.5.



Rys. 12.5. Zależność przemieszczenia od czasu w ruchu harmonicznym tłumionym. Linie przerywane ilustrują wykładnicze tłumienie amplitudy tego ruchu

Równanie (12.31) opisuje sytuację, w której pomimo strat energii zachowany zostaje oscylacyjny charakter ruchu. Ma to miejsce tylko wtedy gdy spełniony jest warunek  $\beta < \omega_0$  to znaczy dla *slabego tłumienia*. Tylko wtedy równanie (12.32) opisuje częstotliwość drgań. Jednak gdy tłumienie (opór) stanie się dostatecznie duże ruch przestaje być ruchem drgającym, a ciało wychylone z położenia równowagi powraca do niego asymptotycznie tzw. *ruchem pełzającym*  $\text{P}$  (aperiodycznym), a równanie (12.31) nie jest już rozwiązaniem równania ruchu. Odpowiada to warunkowi  $\beta > \omega_0$  co w praktyce oznacza, że siła tłumiąca jest bardzo duża. Dzieje się tak na przykład gdy ruch odbywa się w bardzo gęstym ośrodku. Szczególny przypadek odpowiada sytuacji gdy  $\beta = \omega_0$ . Mówimy wtedy o *tłumieniu krytycznym*  $\text{P}$ . Wykresy ruchu tłumionego krytycznie i ruchu pełzającego są pokazane na rysunku 12.6 poniżej.



Rys. 12.6. Ruch pełzający  $\beta > \omega_0$  i tłumiony krytycznie  $\beta = \omega_0$

Możesz prześledzić drgania tłumione wahadła matematycznego w zależności od współczynnika tłumienia  $\beta$  korzystając z programu komputerowego „Drgania tłumione” dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.

### 12.4.1 Straty mocy, współczynnik dobroci

Straty energii wynikające z tłumienia opisuje się za pomocą tzw. *współczynnika dobroci*  $Q$   $\text{P}$ , który jest definiowany jako



#### Definicja

$$Q = 2\pi \frac{E_{\text{zmagazynowana}}}{E_{\text{stracona w 1 okresie}}} = 2\pi \frac{E}{P/f} = \frac{E}{P/\omega} \quad (12.33)$$

gdzie  $P$  jest średnią stratą mocy,  $f$  częstotliwością drgań.



Kilka typowych wartości  $Q$  zestawiono w tabeli 12.1.

Tab. 12.1. Wybrane wartości współczynnika dobroci  $Q$

Oscylator	$Q$
Ziemia dla fali sejsmicznej	250-400
Struna fortepianu lub skrzypiec	1000
Atom wzbudzony	$10^7$
Jądro wzbudzone	$10^{12}$

### 12.5 Drgania wymuszone oscylatora harmonicznego

W ruchu harmonicznym tłumionym amplituda, a co za tym idzie i energia drgań maleje z czasem do zera. Jeżeli chcemy podtrzymać drgania to musimy działać odpowiednią siłą zewnętrzną  $F(t)$  przyłożoną do oscylatora. Siłę taką nazywamy siłą wymuszającą. W przypadku drgań harmonicznycch zewnętrzną siłą wymuszającą jest *siłą okresowo zmienną* postaci

$$F(t) = F_0 \sin \omega t \quad (12.34)$$

Zwróćmy uwagę na to, że siła wymuszająca działa przez cały czas i nie należy jej mylić z krótkotrwałymi impulsami takimi jak na przykład stosujemy gdy chcemy podtrzymać wahania huśtawki popychając raz na jakiś czas.

Jeżeli uwzględnimy siłę wymuszającą to zgodnie z drugą zasadą dynamiki

$$ma = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F(t) \quad (12.35)$$

lub korzystając z równań (3.1)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F(t) \quad (12.36)$$

Po podstawieniu wyrażenia na siłę wymuszającą (12.34) i wprowadzeniu nowych stałych

$$\tau = \frac{m}{\gamma}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{oraz} \quad \alpha_0 = \frac{F_0}{m} \quad (12.37)$$

otrzymujemy równanie analogiczne do równania (12.30) dla ruchu tłumionego

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \alpha_0 \sin \omega t \quad (12.38)$$

Ponownie  $\omega_0$  jest częstością własną układu, to jest częstością drgań swobodnych gdy nie działa siła zewnętrzna i nie ma tarcia ani innych sił oporu, a  $\tau$  stałą czasową związaną ze

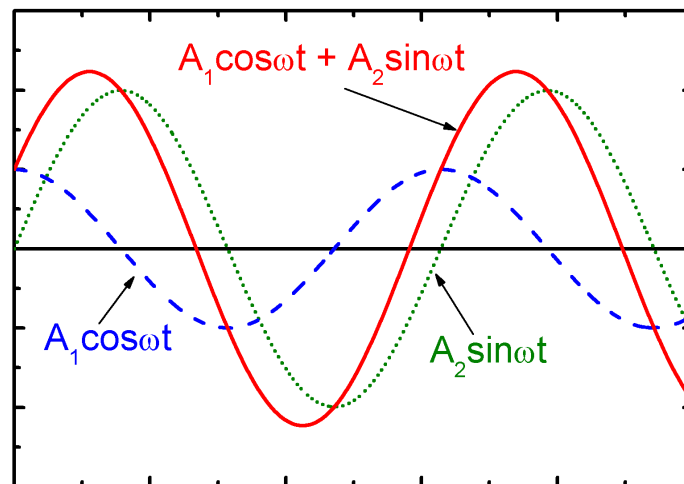
współczynnikiem tłumienia  $\beta$  relacją  $\beta = 1/2\tau$ . Zauważmy ponadto, że układ jest zasilany z częstotliwością  $\omega$  *różną od częstotliwości własnej*  $\omega_0$ . W takiej sytuacji



**Prawo, zasada, twierdzenie**

*Drgania (wymuszone) odbywają się z częstotliwością siły zewnętrznej, a nie z częstotliwością własną.*

W równaniu (12.38) mamy dwie wielkości okresowo zmienne: położenie  $x(t)$  oraz siłę wymuszającą  $F(t)$ . W najogólniejszym przypadku suma (złożenie) dwóch funkcji okresowych daje w wyniku też funkcję okresową (rysunek 12.7).



Rys. 12.7. Złożenie dwóch funkcji okresowych

$$A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (12.39)$$

Szukamy więc rozwiązania równania (12.38) w postaci

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (12.40)$$

Jak widać z porównania równań (12.34) i powyższego równania (12.40) przesunięcie fazowe  $\varphi$  mówi nam o jaki kąt maksimum przemieszczenia wyprzedza maksimum siły, czyli o ile są przesunięte względem siebie funkcje sinus opisujące wychylenie (12.40) i siłę (12.34). Żeby znaleźć rozwiązanie musimy wyznaczyć amplitudę  $A$  oraz przesunięcie fazowe  $\varphi$ . W tym celu obliczamy odpowiednie pochodne funkcji (12.40) i podstawiamy do równania (12.38).



Więcej o wyznaczeniu  $A$  oraz  $\varphi$  możesz przeczytać w *Dodatku 5*, na końcu modułu III.

W wyniku otrzymujemy warunek na przesunięcie fazowe

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega / \tau}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (12.41)$$

i wyznaczamy amplitudę


$$A = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau)^2]^{1/2}} = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{1/2}} \quad (12.42)$$

Łącząc powyższe wzory otrzymujemy rozwiązanie

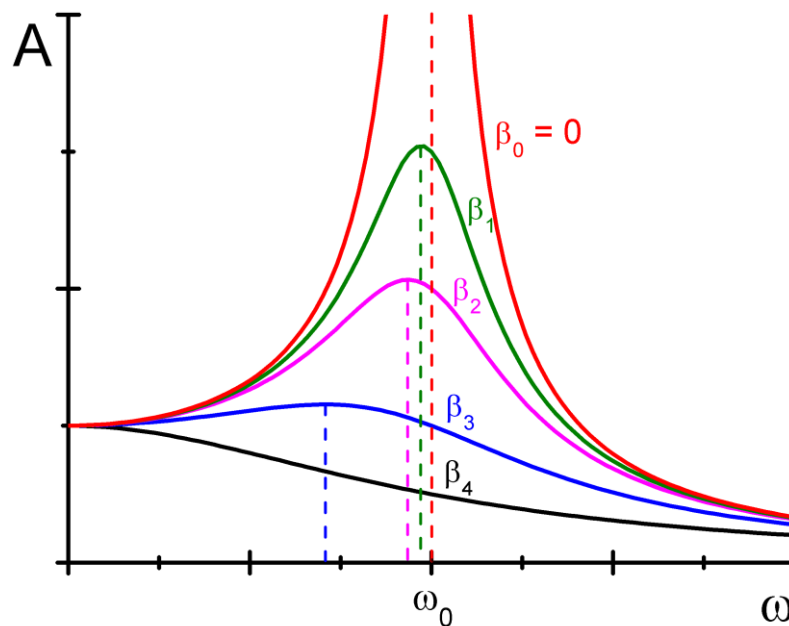
$$x(t) = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{1/2}} \sin\left(\omega t + \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right) \quad (12.43)$$

Równanie wygląda skomplikowanie ale pamiętajmy, że jest to rozwiązanie postaci  $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ .



### 12.5.1 Rezonans

Zauważmy, że chociaż drgania odbywają się z częstotliwością  $\omega$  siły wymuszającej to amplituda i faza zależą od relacji pomiędzy częstotliwością wymuszającą  $\omega$ , a częstotliwością własną  $\omega_0$ . W szczególności gdy siła wymuszająca osiągnie odpowiednią częstotliwość, to amplituda drgań może wzrosnąć gwałtownie nawet przy niewielkiej wartości siły wymuszającej. To zjawisko nazywamy *rezonansem* .

Wykres przedstawiający rezonansowy wzrost amplitudy drgań w funkcji częstotliwości siły wymuszającej pokazany jest na rysunku 12.8 poniżej dla różnych wartości współczynnika tłumienia  $\beta$ .



Rys. 12.8. Krzywe rezonansu dla różnych wartości współczynnika tłumienia  $\beta$  ( $\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4$ )

Liniami przerywanymi zaznaczono *częstości rezonansowe*  to jest wartości częstości siły wymuszającej, dla której amplituda drgań jest maksymalna. Odpowiadająca jej amplituda nazywana jest *amplitudą rezonansową* .

Częstość rezonansową  $\omega_r$  i amplitudę rezonansową  $A_r$  możemy obliczyć z warunku na maksimum amplitudy drgań danej wzorem (12.42). Funkcja  $A(\omega)$  osiąga maksimum dla częstości rezonansowej  $\omega_r$

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (12.44)$$

Podstawiając tę wartość do wzoru na amplitudę otrzymujemy wyrażenie na amplitudę rezonansową  $A_r$

$$A_r = \frac{\alpha_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (12.45)$$

Widzimy, że dla drgań swobodnych, nietłumionych ( $\beta \rightarrow 0$ ) częstość rezonansowa  $\omega_r$  jest równa częstości drgań swobodnych  $\omega_0$ , a amplituda rezonansowa  $A_r \rightarrow \infty$ . W miarę wzrostu tłumienia wartość amplitudy rezonansowej  $A_r$  maleje, a częstość rezonansowa przesuwa się w stronę częstości mniejszych od  $\omega_0$ . Dla bardzo dużego tłumienia rezonans nie występuje, maksymalna amplituda występuje dla częstości bliskiej zeru.

Dla drgań swobodnych, dla których  $\omega_r = \omega_0$  przesunięcie fazowe pomiędzy siłą, a wychyleniem, dane równaniem (12.41) jest równe  $\varphi = \pi/2$ . Oznacza to, że siła wymuszająca nie jest zgodna w fazie z wychyleniem. Zauważmy jednak, że moc pochłaniana przez oscylator zasilany siłą wymuszającą  $F$  zależy od prędkości

$$P = Fv \quad (12.46)$$

Warunek uzyskania rezonansu odpowiada maksimum mocy pochłanianej przez oscylator. Trzeba więc, zgodnie z powyższym wzorem, żeby to prędkość (a nie wychylenie) była zgodna w fazie z siłą, a to oznacza, że siła musi wyprzedzać wychylenie o  $\pi/2$ .



Więcej o mocy absorbowanej przez oscylator możesz przeczytać w *Dodatku 6*, na końcu modułu III.

Skutki rezonansu mogą być zarówno pozytywne jak i negatywne. Z jednej strony staramy się wyeliminować przenoszenie drgań na przykład z silnika na elementy nadwozia w samochodzie, a z drugiej strony działanie odbiorników radiowych i telewizyjnych jest możliwe dzięki wykorzystaniu rezonansu elektrycznego. Dostrajając odbiornik do częstości nadajnika spełniamy właśnie warunek rezonansu. Zjawisko rezonansu jest bardzo rozpowszechnione w przyrodzie.

## 12.6 Składanie drgań harmoniczných


Często spotykamy się z nakładaniem się dwu lub więcej drgań harmoniczných. Poniżej rozpatrzemy kilka przypadków drgań złożonych, powstających w wyniku nakładania się

dwu drgań harmoniczných zachodzących zarówno wzdłuż prostych równoległych jak i prostych prostopadłych.

### 12.6.1 Składanie drgań równoległych

Rozpatrzmy ruch punktu materialnego wynikający ze złożenia dwu drgań harmoniczných równoległych (zachodzących wzdłuż jednej prostej) opisanych równaniami

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \cos \omega t \\x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_0)\end{aligned}\quad (12.47)$$

Drgania te odbywają się z jednakową częstotliwością  $\omega$ , ale są *przesunięte w fazie*  (różnią się fazami) o  $\varphi_0$ . Podobnie jak dla ruchu postępowego czy obrotowego również dla drgań obowiązuje zasada niezależności ruchów.



#### Prawo, zasada, twierdzenie

*To, że drgania odbywają się niezależnie oznacza, że przemieszczenie punktu materialnego jest po prostu sumą przemieszczeń składowych. Ta zasada dodawania przemieszczeń nosi nazwę superpozycji drgań.*

Wychylenie wypadkowe jest więc równe

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (12.48)$$

gdzie

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi_0} \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{A_2 \sin \varphi_0}{A_1 + A_2 \cos \varphi_0}\end{aligned}\quad (12.49)$$

Wyrażenia (12.48) i (12.49) można znaleźć składając drgania metodą wektorową.



Więcej o wektorowym składaniu drgań możesz dowiedzieć się z *Dodatku 7*, na końcu modułu III.

Z powyższych równań wynika, że złożenie drgań harmoniczných równoległych o jednakowej częstotliwości daje w wyniku oscylacje harmoniczne o takiej samej częstotliwości. Sytuacja ta jest pokazana na rysunku 12.9 poniżej. Ze wzoru (12.49) wynika ponadto, że amplituda wypadkowa osiąga maksimum dla drgań składowych o zgodnych fazach (różnica faz  $\varphi_0 = 0$ ), natomiast minimum gdy różnica faz  $\varphi_0 = \pi$  (fazy przeciwne).

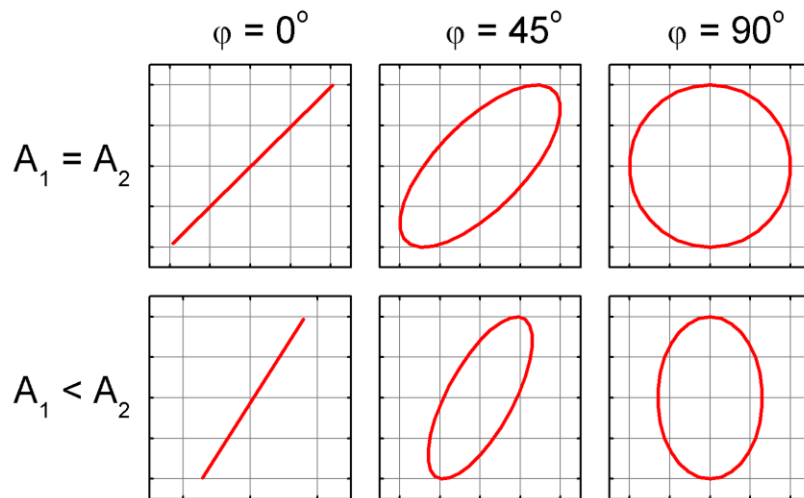
### 12.6.2 Składanie drgań prostopadłych

Rozpatrzmy teraz złożenie dwu drgań harmoniczných zachodzących na płaszczyźnie wzdłuż kierunków prostopadłych względem siebie

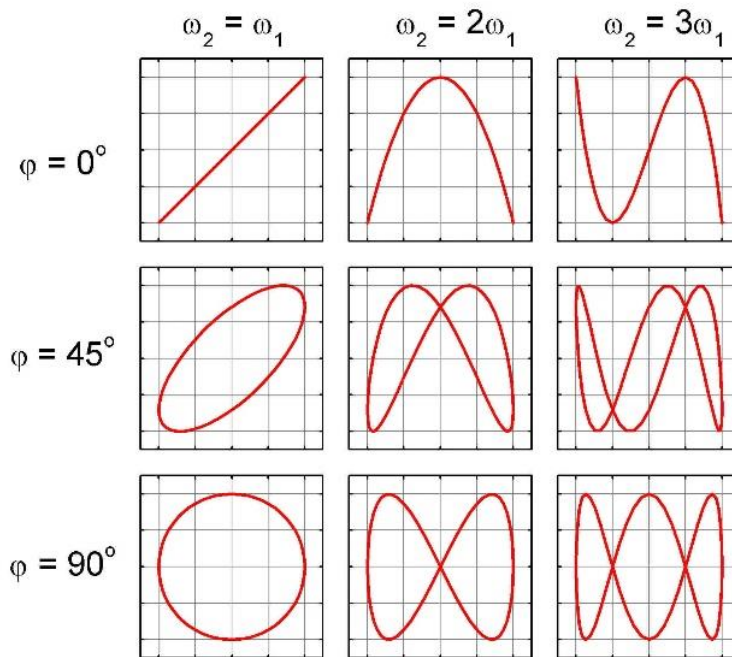
$$\begin{aligned}x &= A_1 \cos \omega_1 t \\y &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi)\end{aligned}\quad (12.50)$$

Punkt materialny wykonujący drgania złożone porusza się po krzywej leżącej na płaszczyźnie  $xy$ , a jego położenie jest dane w dowolnej chwili równaniami (12.50). Przykładowe krzywe odpowiadające drganiom o jednakowych częstościach  $\omega_1 = \omega_2$ , dla różnych wartości amplitud  $A_1$  i  $A_2$  oraz różnych wartości przesunięcia fazowego  $\varphi$  są pokazane na rysunku 12.9a poniżej.

Złożenie drgań prostopadłych o różnych częstościach daje w wyniku bardziej skomplikowany ruch. Na rysunku 12.9b pokazane są przykładowe krzywe (tak zwane krzywe Lissajous) będące wynikiem złożenia takich drgań. Sytuacja pokazana na tym rysunku odpowiada składaniu drgań o jednakowych amplitudach.



Rys. 12.9a. Złożenie drgań prostopadłych o jednakowych częstościach



Rys. 12.9b. Złożenie drgań prostopadłych o różnych częstościach i jednakowych amplitudach. Obraz drgań złożonych można otrzymać w prosty sposób za pomocą oscyloskopu. Wiązki elektronów w lampie oscyloskopowej są odchylane przez dwa zmienne, prostopadłe pola elektryczne. Na ekranie oscyloskopu obserwujemy więc obraz odpowiadający złożeniu drgań wiązki elektronów wywołany przez te zmienne pola elektryczne, których amplitudy, częstości i fazy możemy regulować.

Ten rozdział kończy moduł trzeci; możesz teraz przejść do podsumowania i zadań testowych.

## Podsumowanie

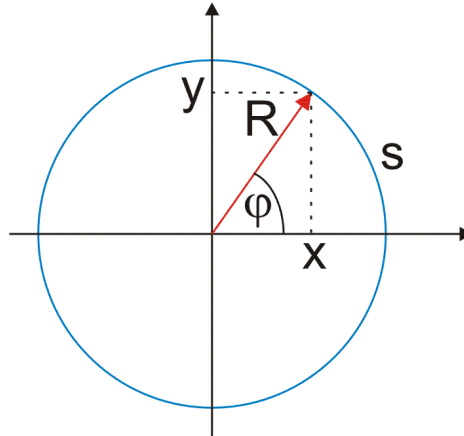
- Prędkość kątowna jest zdefiniowana jako  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ , a przyspieszenie kątowe jako  $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ . W ruchu po okręgu  $v = \omega R$  oraz  $a = \alpha R$ .
- Moment siły jest definiowany jako  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , a moment pędu  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona  $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$ .
- Zasada zachowania momentu pędu.  
 $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$  lub  $\mathbf{L} = \text{const.}$  Jeżeli na układ nie działa zewnętrzny moment siły (lub wypadkowy moment sił zewnętrznych jest równy zeru) to całkowity moment pędu układu pozostaje stały.
- Moment bezwładności  $I$  ciała sztywnego definiujemy jako  $I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i$  lub  $I = \int r^2 dm$ .
- Moment pędu ciała sztywnego  $L = I\omega$ , moment siły  $\tau = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha$ , a energia kinetyczna  $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$ .
- Ruch ciała będący złożeniem ruchu postępowego środka masy i obrotowego względem osi przechodzącej przez środek masy jest równoważny ruchowi obrotowemu wokół osi przechodzącej przez punkt styczności ciała z powierzchnią po której się ono toczy.
- Siła harmoniczna  $F = -kx$  wywołuje ruch oscylacyjny  $x(t) = A \cos \omega t$ , gdzie  $\omega = \sqrt{k/m}$ .
- Okres drgań wahadła matematycznego wynosi  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ , a wahadła fizycznego  $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$ .
- Energia potencjalna w ruchu harmonicznym prostym jest równa  $E_p = \frac{kx^2}{2}$ , a energia całkowita  $E_p = \frac{kA^2}{2}$ .
- Tarcie zmniejsza amplitudę ruchu drgającego  $x = Ae^{-\beta t} \cos \omega t$  i częstość drgań  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ .
- Drgania wymuszone odbywają się z częstością siły zewnętrznej, a nie z częstością własną. Gdy siła wymuszająca działa na ciało z pewną charakterystyczną częstotliwością  $\omega_r$ , to amplituda drgań osiąga wartość maksymalną. Zjawisko to nazywamy *rezonansem*.



## Materiały dodatkowe do Modułu III

### Ruch przyspieszony po okręgu

Współrzędne  $x$ ,  $y$  punktu poruszającego się po okręgu można wyrazić za pomocą promienia  $R$  (o stałej wartości) oraz kąta (rysunek poniżej).



$$\begin{aligned}x(t) &= R \cos \varphi(t) \\y(t) &= R \sin \varphi(t)\end{aligned}\tag{III.1.1}$$

Przy czym związek między drogą liniową  $s$ , a *drogą kątową*  $\varphi$ , jest dany z miary łukowej kąta  $\varphi = s/R$ .

Różniczkując równania (III.1.1), możemy obliczyć zgodnie ze wzorami (3.1), składowe prędkości

$$\begin{aligned}v_x &= -R \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi = -R\omega \sin \varphi \\v_y &= R \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi = R\omega \cos \varphi\end{aligned}\tag{III.1.2}$$

gdzie wprowadzono *prędkość kątową*  $\omega = d\varphi/dt$ .

Różniczkując z kolei równania (III.1.2) otrzymamy zgodnie ze wzorami (3.1) składowe przyspieszenia

$$\begin{aligned}a_x &= -R \frac{d\omega}{dt} \sin \varphi - R\omega \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi = -R\alpha \sin \varphi - R\omega^2 \cos \varphi \\a_y &= R \frac{d\omega}{dt} \cos \varphi - R\omega \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi = R\alpha \cos \varphi - R\omega^2 \sin \varphi\end{aligned}\tag{III.1.3}$$

lub

$$\begin{aligned}a_x &= \frac{\alpha}{\omega} v_x - x\omega^2 \\a_y &= \frac{\alpha}{\omega} v_y - y\omega^2\end{aligned}\tag{III.1.4}$$

gdzie wprowadzono *przyspieszenie kątowe*  $\alpha = d\omega/dt$ .

Na podstawie powyższych zależności możemy obliczyć wektor całkowitego przyspieszenia  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_s + \mathbf{a}_n$

$$\mathbf{a} = \frac{\alpha}{\omega} \mathbf{v} - R\omega^2 \quad (\text{III.1.5})$$

Wektor przyspieszenia całkowitego  $\mathbf{a}$  jest sumą dwóch wektorów: przyspieszenia stycznego  $\mathbf{a}_s$  (równoległego do wektora prędkości  $\mathbf{v}$ )

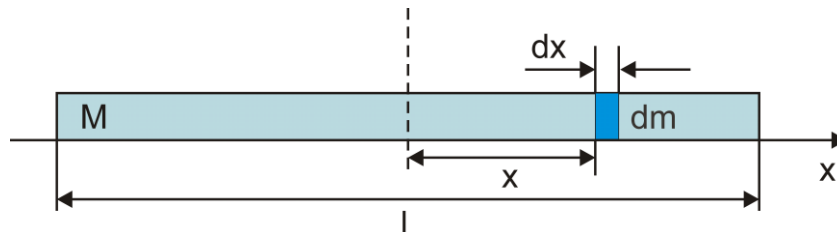
$$\mathbf{a}_s = \frac{\alpha}{\omega} \mathbf{v} \quad (\text{III.1.6})$$

i przyspieszenia normalnego  $\mathbf{a}_n$  (przeciwnego do  $\mathbf{R}$  - skierowanego do środka okręgu)

$$\mathbf{a}_n = -R\omega^2 \quad (\text{III.1.7})$$

### Obliczanie momentu bezwładności - przykład

Jako przykład obliczymy moment bezwładności pręta o masie  $M$  i długości  $l$  pokazanego na rysunku poniżej. Oś obrotu przechodzi przez środek pręta i jest do niego prostopadła (linia przerywana).



Pręt o masie  $M$  i długości  $l$  obracający się względem osi przechodzącej przez środek pręta (linia przerywana)

Najpierw, pręt dzielimy umownie na "nieskończenie małe" elementy o masie  $dm$  i długości  $dx$ , które możemy traktować jak punkty materialne (patrz rysunek). Moment bezwładności takiego elementu wynosi  $x^2 dm$ , a moment bezwładności całego pręta jest, zgodnie z definicją (11.14, 11.15), sumą (całką) momentów bezwładności poszczególnych elementów

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dm \quad (\text{III.2.1})$$

gdzie całkowanie przebiega po całej długości pręta tj. w granicach od  $-l/2$  do  $l/2$ .


Zakładając, że pręt ma stałą gęstość to masę  $dm$  możemy wyrazić z prostej proporcji jako

$$dm = \frac{M}{l} dx$$

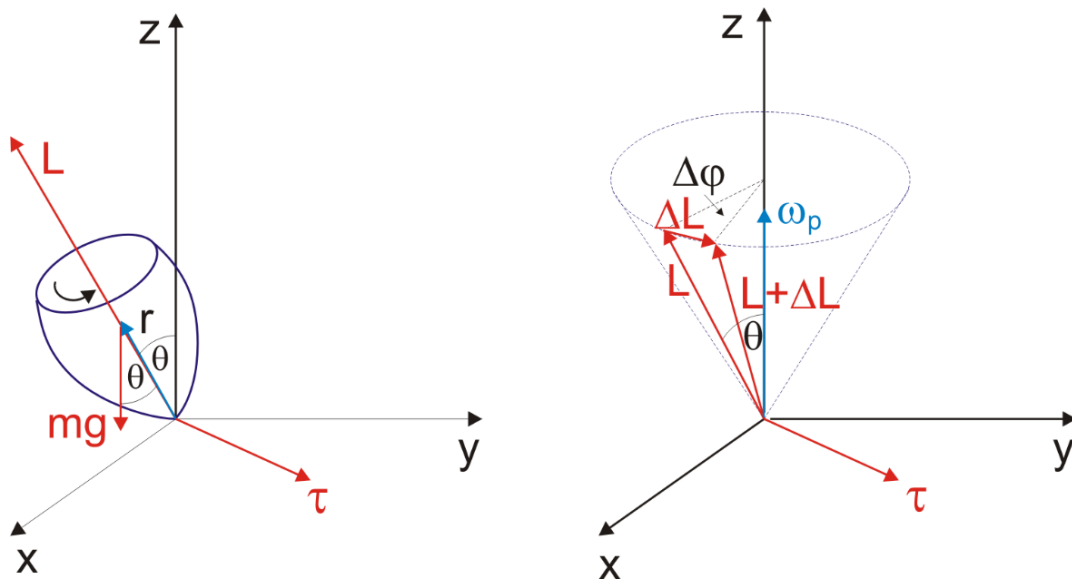
Podstawiając tę zależność do wzoru (III.2.1) i wykonując całkowanie otrzymujemy

$$I = \frac{M}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{M}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{Ml^2}{12} \quad (\text{III.2.2})$$

### Ruch precesyjny (bąk)

Przykładem ruchu obrotowego, w którym oś obrotu nie jest nieruchomą w inercjalnym układzie odniesienia jest bąk wirujący dookoła pewnej osi symetrii. Z doświadczenia wiemy, że oś wirującego bąka porusza się dookoła osi pionowej, zakreślając powierzchnię stożka. Taki ruch nazywamy *precesją* .

W sytuacji przedstawionej na rysunku poniżej bąk ma prędkość kątową  $\omega$  dookoła swej osi. Ma również moment pędu  $L$  względem tej osi, która tworzy kąt  $\theta$  z osią pionową. Punkt podparcia bąka znajduje się w początku inercjalnego układu odniesienia.



Ruch precesyjny bąka

Siła działająca na bąk w punkcie podparcia ma zerowy moment względem punktu podparcia ponieważ ramię siły jest równe zero. Natomiast ciężar  $mg$  wytwarza względem punktu podparcia moment siły

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times m\mathbf{g} \quad (\text{III.3.1})$$

gdzie  $\mathbf{r}$  określa położenie środka masy. Z iloczynu wektorowego wynika, że  $\boldsymbol{\tau}$  jest prostopadłe do  $\mathbf{r}$  i do  $mg$ . Zauważmy, że wektory  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{L}$  i  $\mathbf{r}$  wirują dokoła osi pionowej z częstością precesji  $\omega_p$ . Z rysunku wynika, że

$$\omega_p = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad (\text{III.3.2})$$

Ponieważ  $\Delta L \ll L$ , to możemy napisać

$$\Delta\varphi \cong \frac{\Delta L}{L \sin \theta} \quad (\text{III.3.3})$$

Z drugiej zasady dynamiki ruchu obrotowego równanie (11.11) wynika, że  $\Delta L = \tau \Delta t$  więc

$$\Delta\varphi \cong \frac{\tau \Delta t}{L \sin \theta} \quad (\text{III.3.4})$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\omega_p = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\tau}{L \sin \theta} \quad (\text{III.3.5})$$

Zgodnie z rysunkiem moment siły jest równy

$$\tau = rmg \sin(180^\circ - \theta) = rmg \sin \theta \quad (\text{III.3.6})$$

więc ostatecznie

$$\omega_p = \frac{rmg}{L} \quad (\text{III.3.7})$$

Zwróćmy uwagę, że prędkość precesji nie zależy od kąta  $\theta$  i jest odwrotnie proporcjonalna do wartości momentu pędu.

Spróbujmy teraz podać ogólne wektorowe równanie opisujące precesję. W tym celu najpierw przekształcimy równanie (III.3.6) do postaci

$$\tau = \omega_p L \sin \theta \quad (\text{III.3.8})$$

Widać, że prawa strona równania jest równa wartości iloczynu wektorowego  $\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{L}$ . Tak więc ostatecznie wyrażenie wiążące prędkość kątową precesji z momentem siły i momentem pędu ma postać

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{L} \quad (\text{III.3.9})$$

Zjawisko precesji momentu magnetycznego jest podstawą różnych technik doświadczalnych jak np. magnetyczny rezonans jądrowy (MRJ), które znalazły szerokie zastosowanie w badaniach naukowych, technice i medycynie.

### Równanie ruchu harmonicznego tłumionego

Spróbujemy opisać ruch harmoniczny tłumiony jako złożenie ruchu wywołanego siłą harmoniczną i ruchu, w którym działa wyłącznie siła tłumiąca.

Gdy na ciało o masie  $m$  działała tylko siła harmoniczna to ciało wykonuje drgania swobodne o częstotliwości  $\omega_0$ , które można opisać równaniem

$$x(t) = A \cos \omega_0 t \quad (\text{III.4.1})$$

Teraz rozpatrzmy ruch pod wpływem siły tłumiącej. Przykładem może być pojazd utrzymujący stałą prędkością dzięki sile napędu. Z chwilą wyłączenia napędu pojazd porusza się dalej hamując pod wpływem siły oporu.

Gdy na ciało o masie  $m$  działała tylko siła oporu (proporcjonalna do prędkości) to zgodnie z drugą zasadą dynamiki

$$ma = -\gamma v \quad (\text{III.4.2})$$

lub

$$m \frac{dv}{dt} = -\gamma v \quad (\text{III.4.3})$$

Jeżeli wprowadzimy nową stałą  $\tau = m/\gamma$  (o wymiarze czasu) to powyższe równanie przyjmie postać

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tau} v \quad (\text{III.4.4})$$

lub

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dt}{\tau} \quad (\text{III.4.5})$$

Powyższe równanie różniczkowe zawiera dwie zmienne  $v$  oraz  $t$ . Ponieważ zmienne te są rozdzielone (występują po różnych stronach równania) równanie może być łatwo rozwiązane poprzez obustronne scałkowanie.

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt \quad (\text{III.4.6})$$

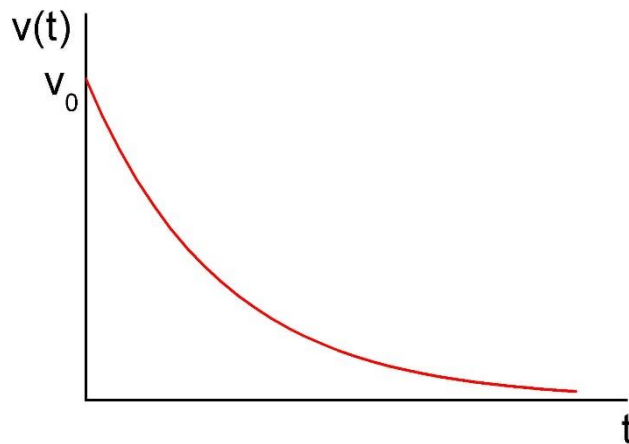
Granice całkowania odpowiadają zmniejszaniu prędkości od wartości początkowej  $v_0$  do  $v$  w czasie  $t$ . Po wykonaniu całkowania otrzymujemy

$$\ln \left( \frac{v}{v_0} \right) = -\frac{t}{\tau} \quad (\text{III.4.7})$$

a po przekształceniu

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{III.4.7})$$

Widać, że prędkość maleje wykładniczo z czasem. Inaczej mówiąc prędkość jest tłumiona ze stałą czasową  $\tau$  (rysunek poniżej).



Zależność prędkości od czasu w ruchu tłumionym

Jeżeli uwzględnimy zarówno siłę harmoniczną jak i siłę tłumienia (oporu) to rozwiązanie równania ruchu będzie zawierać czynnik oscylacyjny (III.4.1) opisujący drgania jak i czynnik tłumiący (III.4.7) opisujący wykładnicze zmniejszanie się amplitudy drgań.

### **Amplituda i faza w ruchu harmonicznym wymuszonym**

Poszukujemy rozwiązania równania różniczkowego

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \alpha_0 \sin \omega t \quad (\text{III.5.1})$$

w postaci

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{III.5.2})$$

W tym celu obliczamy odpowiednie pochodne funkcji (III.5.2)

$$\frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi), \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{III.5.3})$$

i podstawiamy do równania (III.5.1), które przyjmuje postać

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{\omega}{\tau} A \cos(\omega t + \varphi) = \alpha_0 \sin \omega t \quad (\text{III.5.4})$$

Równanie to przekształcamy korzystając ze związków

$$\begin{aligned}\sin(\omega t + \varphi) &= \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi \\ \cos(\omega t + \varphi) &= \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi\end{aligned}$$

Otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned}\left[ (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - \frac{\omega}{\tau} \sin \varphi \right] A \sin \omega t + \left[ (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + \frac{\omega}{\tau} \cos \varphi \right] A \cos \omega t = \\ = \alpha_0 \sin \omega t\end{aligned}\quad (\text{III.5.5})$$

Powyższa równość może być spełniona tylko, gdy czynniki stojące przy funkcji  $\sin \omega t$  i  $\cos \omega t$  po obu stronach równania będą sobie równe. Ten warunek oznacza, że czynnik przy  $\cos \omega t$  ma być równy zero co można zapisać jako

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega / \tau}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (\text{III.5.6})$$

Z tego warunku znamy już  $\varphi$ . Teraz wyznaczamy amplitudę porównując czynniki przy funkcji  $\sin \omega t$  (w równaniu III.5.5) i podstawiając odpowiednie wyrażenia za  $\cos \varphi$  i  $\sin \varphi$ . Otrzymujemy wyrażenie

$$A = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau)^2]^{1/2}} = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]^{1/2}} \quad (\text{III.5.7})$$

### **Moc absorbowana przez oscylator**

Obliczmy średnią moc absorbowaną przez oscylator poruszający się pod wpływem siły wymuszonej. Moc średnia jest dana wyrażeniem

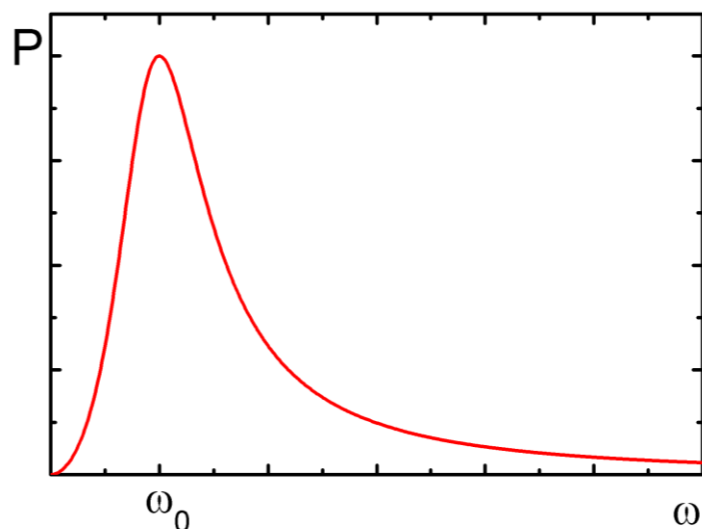
$$\bar{P} = \overline{F \dot{x}} = \overline{F} \frac{d\overline{x}}{dt} \quad (\text{IV.6.1})$$

gdzie kreska górna oznacza średnią czasową.

Korzystając z wyrażeń (12.34) i (12.43) znajdujemy (szczegółowe obliczenia pomijamy)

$$\bar{P} = \frac{1}{2} m \alpha_0^2 \frac{2\beta\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2} \quad (\text{IV.6.2})$$

Zależność mocy absorbowanej od częstości drgań wymuszających, dla przypadku słabego tłumienia, jest przedstawiona na rysunku poniżej. Widać wyraźnie maksimum mocy związane ze zjawiskiem rezonansu.



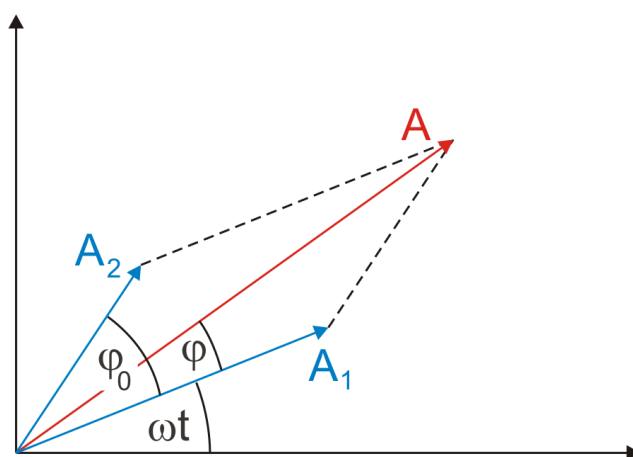
Średnia moc absorbowana dla oscylatora harmonicznego wymuszonego

### Składanie drgań metodą wektorową

Drgania harmoniczne jak i harmoniczne zaburzenie falowe mogą być przedstawione graficznie jako obracający się wektor, którego długość reprezentuje amplitudę drgań. Taki wektor nazywamy *strzałką fazową*  $\vec{P}$  (wskazem).

Oscylacja (zaburzenie falowe)  $x_1 = A_1 \cos \omega t$  w chwili  $t$  przedstawiona jest przez rzut tej „strzałki” (amplitudy) na oś poziomą (odpowiada to pomnożeniu  $A_1$  przez  $\cos \omega t$ ).

Druga oscylacja (zaburzenie falowe)  $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_0)$ , o amplitudzie  $A_2$ , różni się od drgań  $x_1$  o fazę  $\varphi_0$ . Znajdujemy je podobnie jako rzut „strzałki” na oś poziomą. Teraz wystarczy dodać graficznie (wektorowo)  $x_1$  i  $x_2$  żeby otrzymać wypadkowe drgania tak jak to pokazano na rysunku poniżej.



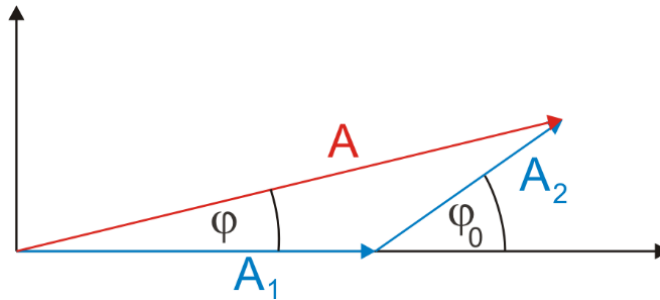
Wektorowe dodawanie drgań o amplitudach  $A_1$  i  $A_2$  przesuniętych w fazie o  $\varphi_0$  daje w wyniku drganie o amplitudzie  $A$  i fazie przesuniętej o  $\varphi$



Wektorowe dodawanie drgań o amplitudach  $A_1$  i  $A_2$  przesuniętych w fazie o  $\varphi_0$  daje w wyniku drganie o amplitudzie  $A$  i fazie przesuniętej o  $\varphi$

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Widać to jeszcze lepiej gdy narysuje się wektory dla fazy  $\omega t = 0$  (lub wielokrotności  $2\pi$ ) i gdy umieści się początek jednej strzałki na końcu poprzedniej zachowując różnicę faz (rysunek poniżej).



Rys. 2. Wektorowe dodawanie drgań o amplitudach  $A_1$  i  $A_2$  przesuniętych w fazie o  $\varphi_0$  daje w wyniku drganie o amplitudzie  $A$  i fazie przesuniętej o  $\varphi$ . Sytuacja odpowiada fazie  $\omega t = 0$

Na podstawie tego rysunku możemy (korzystając z twierdzenia cosinusów) wyznaczyć amplitudę  $A$  drgań wypadkowych

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(180^\circ - \varphi_0)}$$

lub

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi_0}$$

oraz ich przesunięcie fazowe

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_2 \sin \varphi_0}{A_1 + A_2 \cos \varphi_0}$$

Widzimy, że amplituda wypadkowa osiąga maksimum dla równoległych wektorów składowych, co odpowiada zgodnym fazom (różnica faz  $\varphi_0 = 0$ ), natomiast minimum dla wektorów składowych antyrównoległych (różnica faz  $\varphi_0 = \pi$ ).

## Rozwiązania ćwiczeń z modułu III

### Ćwiczenie 11.1

Dane:  $v = 1.25 \text{ m/s}$ ,  $l = 5.55 \text{ km}$ ,  $d_{zew} = 12 \text{ cm}$ ,  $d_{wew} = 2.5 \text{ cm}$ .

Do obliczenia prędkości kątowej korzystamy ze wzoru (11.1)  $\omega = \frac{v}{R}$

Podstawiając dane otrzymujemy:  $\omega_{min} = 20.8 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_{max} = 100 \text{ rad/s}$ .

Przyspieszenie kątowe (średnie) jest zgodnie z równaniem (11.3) dane zależnością

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{t} = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{t}$$

Czas  $t$ , w którym prędkość zmieniła się od minimalnej do maksymalnej obliczamy z zależności dla ruchu jednostajnego

$$t = \frac{l}{v}$$

Łącząc ostatnie dwa równania otrzymujemy  $\alpha = 0.18 \text{ rad/s}^2$ .

### Ćwiczenie 11.2

Dane:  $F_2 = 5 \text{ N}$ ,  $R/r = 10$ .

Ponieważ prędkość kątowa jest stała więc  $dL/dt = 0$  i wypadkowy moment sił jest równy zero

$$\tau_{wyp} = (\tau_1 - \tau_2) = 0$$

czyli

$$\tau_1 = \tau_2$$

skąd

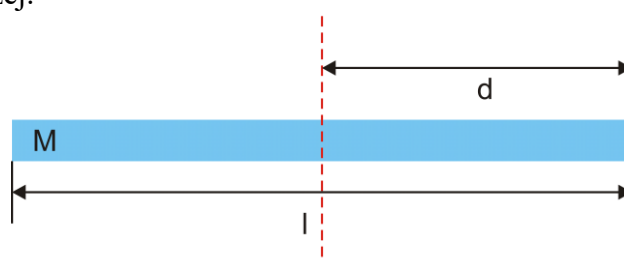
$$rF_1 = RF_2$$

Ostatecznie więc

$$F_1 = \frac{R}{r} F_2 = 50 \text{ N}$$

### Ćwiczenie 11.3

Dane:  $M$ ,  $l$ , oś obrotu jest prostopadła do pręta i przechodzi przez jeden z jego końców tak jak na rysunku poniżej.



Moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez środek pręta (zarazem jego środek masy) wynosi (patrz tabela 11.3)

$$I_{sr.m.} = \frac{1}{12} Ml^2$$

Natomiast moment bezwładności względem osi obrotu przechodzącej przez koniec pręta obliczamy z twierdzenia Steinera

$$I = I_{sr.m.} + Md^2 = \frac{1}{12} Ml^2 + M \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} Ml^2$$

#### Ćwiczenie 11.4

Dane:  $m$ ,  $R$ ,  $h$ .

Oba ciała (walec i kula) mają na wysokości  $h$  taką samą energię potencjalną równą  $E_p = mgh$ , która u podnóża równi zamienia się na energię kinetyczną ciała toczącego się. Jeżeli toczenie potraktujemy jako złożenie ruchu postępowego i obrotowego względem osi przechodzącej przez środka masy to zgodnie z zasadą zachowania energii

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Ponieważ ciała toczą się bez poślizgu więc  $\omega = v/R$  (równanie 11.1). Podstawiając odpowiednie wartości momentu bezwładności  $I_{walca} = \frac{1}{2} MR^2$  oraz  $I_{kuli} = \frac{2}{5} MR^2$  możemy rozwiązując powyższe równanie obliczyć prędkości walca i kuli u dołu równi

$$v_{walca} = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

$$v_{kuli} = \sqrt{\frac{10}{7} gh}$$

Różne wartości prędkości wynikają z różnych wartości momentu bezwładności, a co za tym idzie z różnych wartości energii ruchu obrotowego.

Gdyby te ciała zsuwały się z równi to ich energia potencjalna zamieniałaby się na energię kinetyczną ruchu postępowego, a ponieważ ich masy są jednakowe więc i prędkości u dołu równi też byłyby jednakowe i równe

$$v = \sqrt{2gh}$$

**Ćwiczenie 12.2**Dane:  $m, R$ .

Okres drgań obręczy obliczamy ze wzoru (12.17)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Odległość pomiędzy punktem zawieszenia (osią obrotu), a środkiem masy  $d = R$ . Natomiast moment bezwładności względem osi obrotu (przechodzącej przez punkt  $G$ ) obliczamy z twierdzenia Steinera

$$I_G = I_{sr.m.} + md^2$$

gdzie moment bezwładności obręczy względem osi przechodzącej przez środek masy  $I_{sr.m.} = mR^2$ , a odległość między osiami obrotu  $d = R$ . Podstawiając te wartości otrzymujemy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

**Ćwiczenie 12.3**Dane:  $E_k = E_p$ 

Dla poszukiwanego wychylenia  $x$  energia potencjalna jest równa energii kinetycznej jest więc zarazem równa połowie energii całkowitej

$$E_p = \frac{1}{2} E$$

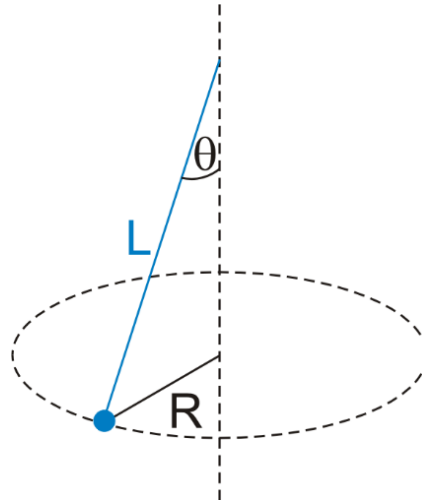
$$\frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{kA^2}{2}$$

Skąd otrzymujemy

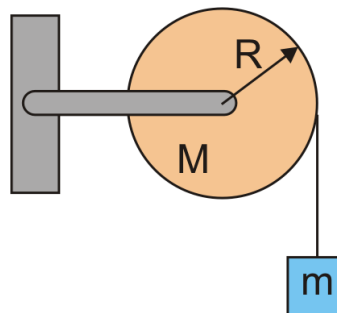
$$x = \frac{A\sqrt{2}}{2}$$

### Test III

1. Na rysunku poniżej pokazano kulkę o masie  $m$  zawieszoną na końcu sznurka o długości  $L$  poruszającą się w płaszczyźnie poziomej, po okręgu ze stałą prędkością  $v$ . Gdy kulka zatacza okrąg, sznurek porusza się po powierzchni stożkowej i dlatego wahadło to nazywamy wahadłem stożkowym. Znajdź czas, w jakim kulka wykonuje jeden pełny obrót.



2. Niewielkie ciało ześlizguje się bez tarcia z powierzchni półkuli o promieniu  $R$ . Na jakiej wysokości ciało oderwie się od niej?
3. Na końcach pręta o długości 0.4 m, zamocowane są małe kule o masie  $m = 0.2$  kg każda. Oblicz moment bezwładności tego układu względem osi prostopadłej do pręta, przechodzącej przez: a) środek pręta, b) przez jego koniec. Masa pręta  $M = 0.4$  kg.
4. Na obwodzie jednorodnego krążka o masie  $M = 1$  kg i promieniu  $R = 10$  cm nawinięta jest lekka nitka. Do końca nitki przymocowane jest ciało o masie  $m = 0.5$  kg. Znajdź przyspieszenie kątowe krążka, i przyspieszenie styczne ciała o masie  $m$ . Jakie jest napięcie nitki? Krążek obraca się bez tarcia.
- 5.



6. Mamy do dyspozycji sprężynę, którą można rozciągnąć o 2cm przykładając do niej siłę 8 N. Sprężynę zamocowano poziomo i do jej końca przyczepiono ciało o masie 1 kg. Następnie rozciągnięto ją o 4 cm od położenia równowagi i puszczono. Ponieważ ciało ślizga się po powierzchni bez tarcia zatem wykonuje ruch harmoniczny prosty. Oblicz


- 
- (a) współczynnik sprężystości sprężyny (b) siłę z jaką działa sprężyna na ciało zaraz po jego puszczeniu? (c) okres drgań, (d) amplitudę ruchu, (e) maksymalną prędkość drgającego ciała, (f) maksymalne przyspieszenie ciała.
7. Ciało znajduje się na poziomej powierzchni, która porusza się poziomo prostym ruchem harmonicznym z częstotliwością dwóch drgań na sekundę. Współczynnik tarcia statycznego między ciałem a tą powierzchnią wynosi 1. Jak duża może być amplituda tego ruchu, aby ciało nie ślizgało się po powierzchni?
  8. W jakiej odległości od środka należy zamocować jednorodny pręt o długości  $l = 1$  m, aby pręt tworzył wahadło fizyczne o najmniejszym okresie?
  9. Oblicz jaki jest współczynnik tłumienia  $\beta$  ruchu harmonicznego jeżeli jego amplituda maleje dwukrotnie w czasie  $t = 1$  min. Ile razy zmalała w tym czasie energia drgań?

# MODUŁ IV

## 13 Fale w ośrodkach sprężystych

Ruch falowy jest bardzo rozpowszechniony w przyrodzie. Na co dzień doświadczamy obecności fal dźwiękowych i fal świetlnych. Powszechnie też wykorzystujemy fale elektromagnetyczne do przekazywania informacji za pomocą radia, telewizji czy przenośnych telefonów.

Fale dźwiękowe czy też fale jakie obserwujemy na powierzchni wody posiadają jednak inną naturę niż fale elektromagnetyczne. Światło będące przykładem fali elektromagnetycznej rozchodzi się nie tylko w ośrodkach materialnych ale również w próżni. Przykładem jest docierające do nas światło słoneczne. Natomiast do rozchodzenia się fal dźwiękowych niezbędny jest ośrodek materialny.

W tym rozdziale poznamy właściwości fal powstających w ośrodkach sprężystych (takich jak fale dźwiękowe), które nazywamy *falami mechanicznymi* .

### 13.1 Fale mechaniczne

Jeżeli wychylimy jakiś fragment ośrodka sprężystego z jego położenia równowagi to w następstwie będzie on wykonywał drgania wokół tego położenia. Te drgania, dzięki właściwościom sprężystym ośrodka, są przekazywane na kolejne części ośrodka, które zaczynają drgać. W ten sposób zaburzenie przechodzi przez cały ośrodek.



#### Definicja

*Ruchem falowym nazywamy rozchodzenie się zaburzenia w ośrodku.*

Zwróćmy uwagę, że sam ośrodek nie przesuwa się, a jedynie jego elementy wykonują drgania. Dobrym przykładem są tu fale na powierzchni wody: przedmioty pływające na powierzchni wody wykonują ruch drgający w rytm fal natomiast same fale rozchodzą się ruchem jednostajnym.

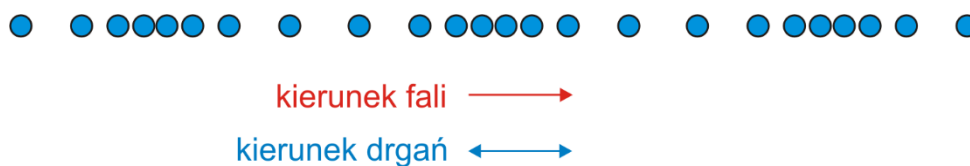
Fala dobiegając do danego punktu ośrodka wprawia go w ruch drgający przekazując mu energię, która jest dostarczana przez źródło drgań. Energia fal to energia kinetyczna i potencjalna cząstek ośrodka. Za pomocą fal można przekazywać energię na duże odległości przy czym cechą charakterystyczną jest to, że fale przenoszą energię poprzez ośrodek dzięki przesuwanemu się zaburzenia w ośrodku, a nie dzięki ruchowi postępowemu samego ośrodka. Jak wynika z powyższego, do rozchodzenia się fal mechanicznych potrzebny jest ośrodek. To właściwości sprężyste ośrodka decydują o prędkości rozchodzenia się fali.

#### 13.1.1 Rodzaje fal

Ze względu na kierunek drgań cząstek ośrodka względem kierunku rozchodzenia się fale dzielimy na *fale podłużne*  i *fale poprzeczne* .

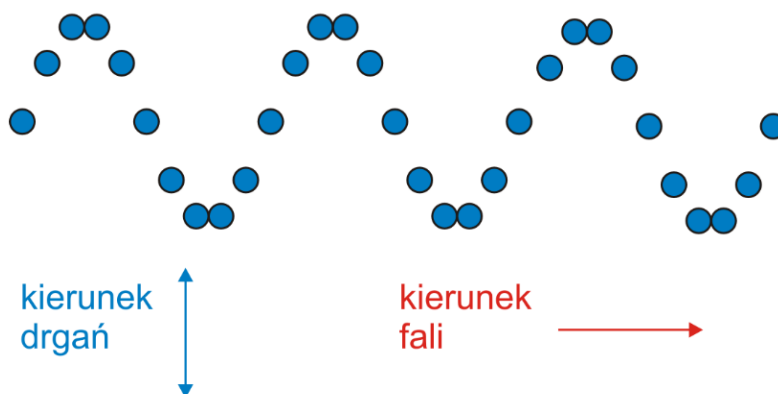
Fala jest podłużna gdy kierunek drgań cząstek ośrodka jest równoległy do kierunku rozchodzenia się fali i zarazem kierunku transportu energii (rysunek 13.1). Przykładem są tu fale dźwiękowe w powietrzu czy też drgania naprzemiennie ściskanej i rozciąganej sprężyny.





Rys. 13.1. Fala podłużna

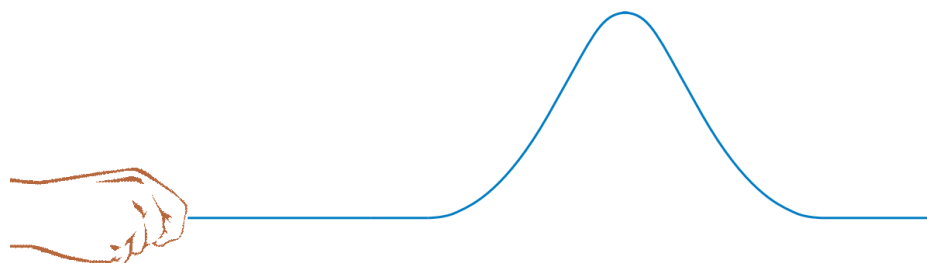
Fala jest poprzeczna gdy kierunek drgań cząstek ośrodka jest prostopadły do kierunku rozchodzenia się fali i zarazem kierunku transportu energii (rysunek 13.2). Przykładem mogą tu być drgania naprężonego sznura, którego końcem poruszamy cyklicznie w górę i w dół.



Rys. 13.2. Fala poprzeczna

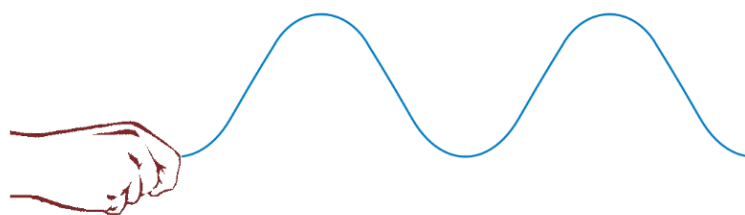
Możemy również dokonać podziału ze względu na rodzaj zaburzenia. Ważnymi przykładami są *impuls falowy* <sup>P</sup> i *fala harmoniczna* <sup>P</sup>.

Impuls falowy powstaje gdy źródłem jest jednorazowe zaburzenie w ośrodku: na przykład gdy wrzucimy kamień do wody lub gdy jednorazowo odchyłimy koniec napiętej liny (rysunek 13.3).







Rys. 13.3. Impuls falowy

Fala harmoniczna powstaje gdy źródło wykonuje drgania harmoniczne: na przykład gdy cyklicznie wychylamy koniec napiętej liny (rysunek 13.4)

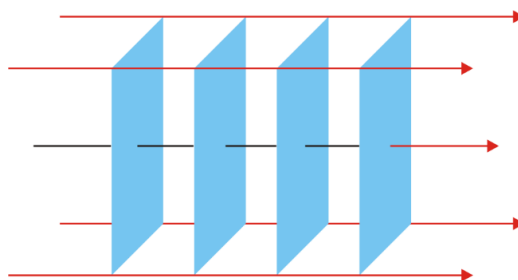


Rys. 13.4. Fala harmoniczna

Wprowadzimy teraz pojęcie *czoła fali*  i *promienia fali* . Jeżeli w przestrzeni rozchodzi się fala to możemy w każdej chwili utworzyć powierzchnię łączącą punkty, do których w tej właśnie chwili dotarła ta fala. Przesuwanie się tej powierzchni obrazuje rozchodzenie się fali. Właśnie taką powierzchnię nazywamy czołem fali (lub powierzchnią falową), a każdą linię prostą, prostopadłą do czoła fali, wskazującą kierunek ruchu fali nazywamy promieniem fali.

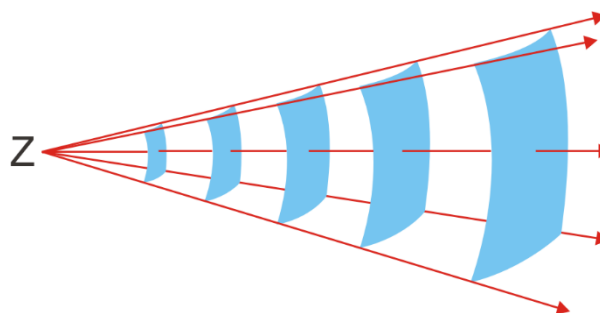
Ze względu na kształt powierzchni falowej możemy wyróżnić *fale płaskie*  i *fale kuliste* .

W przypadku fal płaskich zaburzenie rozchodzi się w jednym kierunku, a powierzchnie falowe są płaszczyznami prostopadłymi do kierunku ruchu fali tak jak na rysunku 13.5 poniżej.



Rys. 13.5. Powierzchnie falowe (płaszczyzny) i promienie fali płaskiej

Dla fal kulistych zaburzenie rozchodzi się ze źródła we wszystkich kierunkach, a powierzchnie falowe są sferami jak na rysunku 13.6 poniżej.



Rys. 13.6. Fala kulista rozchodząca się ze źródła Z; wycinki powłok sferycznych przedstawiają powierzchnie falowe

### 13.2 Rozchodzenie się fal w przestrzeni

Rozważmy rozchodzenie się impulsu falowego (fali) wzdłuż długiego naprężonego sznura w kierunku  $x$  jak na rysunku (13.3).

Przyjmijmy, że w chwili  $t = 0$  kształt sznura jest opisany funkcją

$$y = f(x) \quad (13.1)$$

gdzie  $y$  jest poprzecznym wychyleniem sznura w jego punkcie  $x$ .

W czasie  $t$  impuls falowy (fala) poruszający się z prędkością  $v$  przesuwa się o odcinek równy  $vt$  wzdłuż sznura to jest wzdłuż osi  $x$ , bez zmiany kształtu. Zatem po czasie  $t$  równanie opisujące kształt sznura ma postać

$$y = f(x - vt) \quad (13.2)$$



Równanie (13.2) opisuje falę biegnącą w kierunku dodatnim osi  $x$  (w prawo) o kształcie danym właśnie przez funkcję  $f(x, t)$ . Zauważmy, że kształt jest taki sam w chwili  $t$  w punkcie  $x = vt$  jaki był w chwili  $t = 0$  w punkcie  $x = 0$  (argument funkcji ma tę samą wartość równą zeru). Zatem równanie opisujące falę biegnącą w kierunku ujemnym osi  $x$  (w lewo) będzie miało postać

$$y = f(x + vt) \quad (13.3)$$

Zauważmy, że dla danego  $t$  mamy równanie  $f(x)$  opisujące kształt sznura w danej chwili, a dla danego miejsca sznura  $x$  mamy równanie  $f(t)$  opisujące poprzeczne drgania cząstki sznura w punkcie  $x$ .


Z równań (13.1) i (13.2) wynika, że dowolna funkcja zmiennej  $x - vt$  lub  $x + vt$  opisuje falę biegnącą odpowiednio w prawo lub lewo, jednak do opisanie rzeczywistej sytuacji musimy dokładnie określić postać funkcji  $f$ . Dlatego teraz zajmiemy się falą o *szczególnym kształcie*. Rozważać będziemy poprzeczną falę harmoniczną postaci

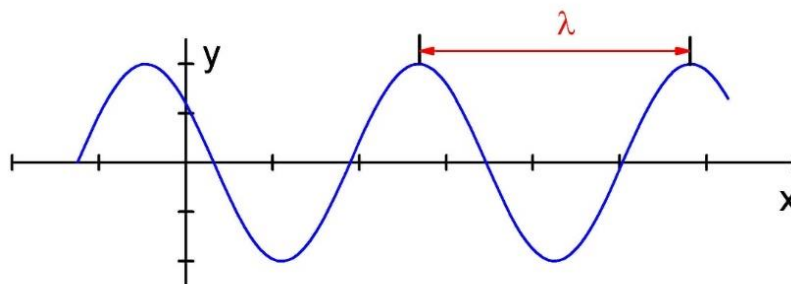
$$y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \quad (13.4)$$

która przedstawia przenoszenie się drgań harmonicznym w kierunku  $x$ , i która pokazana jest na rysunku (13.4). Stała  $A$  (opisująca maksymalne wychylenie) jest *amplitudą fali* , a wyrażenie  $\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt)$  przedstawia *fazę* . (Pamiętaj: gdy mówimy o wybranej części fali

to tym samym mówimy o określonej fazie).

Zauważmy, że wartość wychylenia poprzecznego  $y$  dana wzorem (13.4) jest taka sama w punktach o współrzędnych  $x$ ,  $x + \lambda$ ,  $x + 2\lambda$ ,  $x + 3\lambda$ , itd. Oznacza to, że te punkty mają taką samą fazę.

Wielkość  $\lambda$  nazywamy *długością fali* . Reprezentuje ona odległość między punktami o tej samej fazie na przykład między dwoma grzbietami (maksimami) tak jak na rysunku 13.7.


 Rys. 13.7. Długość fali  $\lambda$ 

Czas, w którym fala przebiega odległość równą  $\lambda$  nazywamy *okresem*  $T$

$$T = \frac{\lambda}{v} \quad (13.5)$$

stąd

$$y = A \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \quad (13.6)$$

Widzimy, że w danej chwili  $t$  taka sama faza jest w punktach  $x, x + \lambda, x + 2\lambda$ , itd., oraz, że w danym miejscu  $x$  faza powtarza się w chwilach  $t, t + T, t + 2T$ , itd.

Często równanie fali bieżącej (13.6) wyraża się poprzez dwie inne wielkości: *liczbę falową*  $k$  i *częstość kołową*  $\omega$  (lub *częstotliwość*  $f$ ), które są zdefiniowane jako

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{oraz} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (13.7)$$

co po podstawieniu do równania (13.6) daje

$$y = A \sin(kx - \omega t) \quad (13.8)$$

Prędkość fali  $v$  możemy wyrazić jako

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{k} \quad (13.9)$$

Bardziej szczegółowo prędkość rozchodzenia się fal jest omówiona w następnym rozdziale.



### Ćwiczenie 13.1

Teraz samodzielnie spróbuj przeanalizować następujące równanie fali poprzecznej

$$y = 20 \sin(\pi x - 2t)$$

gdzie  $x$  i  $y$  są wyrażone w centymetrach, a  $t$  w sekundach.


Porównaj to równanie z ogólnym równaniem (13.8) dla harmonicznego fali poprzecznej i wyznacz następujące wielkości: długość fali  $\lambda$ , częstość  $\omega$ , okres  $T$ , prędkość rozchodzenia się fali (w kierunku  $x$ ), maksymalną prędkość i maksymalne przyspieszenie cząstek ośrodka w ich ruchu drgającym (w kierunku  $y$ ). Wyniki zapisz poniżej.

$$\lambda = \quad \omega = \quad T =$$

$$v_{fali} = \quad v_y = \quad a_y =$$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

### 13.3 Prędkość rozchodzenia się fal, równanie falowe

Jeżeli chcemy zmierzyć prędkość fali  $v$  to śledzimy jak przemieszcza się w czasie wybrana część fali czyli określona faza. Dlatego prędkość fali określa się jako *prędkość fazową* . Dla wybranej fazy fali  $y = f(x - vt)$  poruszającej się w prawo sprowadza się to do warunku

$$x - vt = \text{const.} \quad (13.10)$$


Różniczkując to równanie względem czasu otrzymujemy

$$\frac{dx}{dt} - v = 0 \quad (13.11)$$

czyli

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (13.12)$$

Tak wyraża się prędkość fazowa fali.

W przypadku gdy zaburzenie falowe jest złożeniem fal sinusoidalnych o różnych częstotliwościach to prędkość przenoszenia energii (prędkość fali modulowanej) może być inna niż prędkości fal składowych. Taką prędkość nazywa się *prędkością grupową* .



Więcej o prędkości grupowej możesz przeczytać w *Dodatku 1*, na końcu modułu IV.

W poprzednim rozdziale pokazaliśmy, że dowolna funkcja  $f(x - vt)$  lub  $f(x + vt)$  opisuje falę biegnącą odpowiednio w prawo lub lewo wzdłuż osi  $x$  i jako przykład rozważaliśmy poprzeczną falę harmoniczną. Teraz poznamy, równanie ruchu falowego, które stosuje się do *wszystkich rodzajów fal*: zarówno fal mechanicznych takich jak fale dźwiękowe, fale na wodzie, fale w strunach, w sprężynach, jak i do fal elektromagnetycznych takich jak na przykład światło.

Równanie ruchu falowego możemy wyprowadzić wychodząc od ogólnego równania fali  $y = f(x - vt)$ . W tym celu obliczamy przyspieszenie poprzecznych drgań punktu ośrodka o współrzędnej  $x$ , to znaczy obliczamy drugą pochodną  $y$  względem czasu

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f''(x - vt)v^2 \quad (13.13)$$

gdzie  $v^2$  jest pochodną funkcji wewnętrznej. (Uwaga: w równaniach piszemy pochodne cząstkowe, oznaczane symbolem  $\partial$ , bo wychylenie  $y$  jest funkcją dwóch zmiennych  $y = f(x, t)$ ).

Równocześnie

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(x - vt) \quad (13.14)$$

Łącząc oba powyższe równania otrzymujemy *równanie różniczkowe ruchu falowego*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (13.15)$$

To równanie spełnia każda funkcja  $f(x - vt)$  jak również  $f(x + vt)$ .

Prędkość  $v$  rozchodzenia się fali jest niezależna od amplitudy i częstotliwości, natomiast w przypadku fal mechanicznych zależy od sprężystości ośrodka i jego bezwładności. Na przykład prędkość fali harmonicznego rozchodzącego się wzdłuż naprężonego sznura (struny) jest dana wyrażeniem

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (13.16)$$

gdzie sprężystość sznura jest określona poprzez napinającą go siłę  $F$  (im większa siła tym szybciej wychylone elementy sznura wracają do położenia równowagi), a jego bezwładność zależy od masy  $\mu$  przypadającej na jednostkę długości sznura.

Równanie ruchu falowego można wyprowadzić bezpośrednio z zasad dynamiki Newtona obliczając prędkość fal w naprężonym sznurze.



Z tym wyprowadzeniem możesz się zapoznać w *Dodatku 2*, na końcu modułu IV.

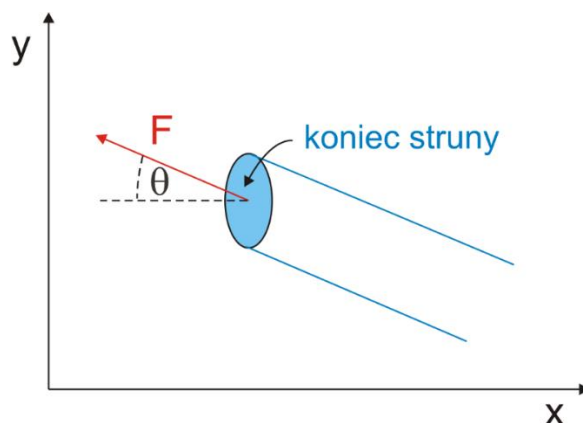
### 13.4 Przenoszenie energii przez fale

Jak już wspominaliśmy fale przenoszą dostarczoną ze źródła energię poprzez ośrodek dzięki przesuwanemu się zaburzeniu w ośrodku. Na przykład wprawiając koniec struny w drgania poprzeczne (rysunek 13.8) źródło wykonuje pracę, która objawia się w postaci energii kinetycznej i potencjalnej punktów struny (ośrodka).

Siła  $F$  jaka działa na koniec struny porusza strunę w górę i w dół wprawiając jej koniec w drgania w kierunku  $y$ .

Do wyznaczenia szybkości przenoszenia energii przez falę posłużymy się wyrażeniem na moc

$$P = F_y v_y \quad (13.17)$$


 Rys. 13.8. Koniec struny wprowadzony w drgania siłą  $F$ 

Jak widać z rysunku 13.8 prędkość poprzeczna jest równa  $v_y = \partial y / \partial t$ , a składowa siły  $F$  w kierunku  $y$  wynosi  $F_y = F \sin \theta$ . Podstawiając otrzymujemy

$$P = F \frac{\partial y}{\partial t} \sin \theta \quad (13.18)$$

Dla małych kątów  $\theta$  możemy przyjąć  $\sin \theta = -\partial y / \partial x$  (znak minus wynika z ujemnego nachylenia struny). Stąd

$$P = -F \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial x} \quad (13.19)$$

Obliczamy teraz pochodne równania fali harmoniczej  $y = A \sin(kx - \omega t)$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \cos(kx - \omega t) \quad (13.20)$$

oraz

$$\frac{\partial y}{\partial x} = Ak \cos(kx - \omega t) \quad (13.21)$$

i podstawiamy do wyrażenia na moc

$$P = FA^2 k \omega \cos^2(kx - \omega t) \quad (13.22)$$

Korzystając z zależności (13.7) oraz (13.16) otrzymujemy ostatecznie

$$P = 4\pi^2 A^2 f^2 \mu v \cos^2(kx - \omega t) \quad (13.23)$$

Zauważmy, że moc czyli szybkość przepływu energii oscyluje w czasie. Widzimy ponadto, że szybkość przepływu energii jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy i kwadratu częstotliwości. Ta zależność jest prawdziwa dla wszystkich typów fal.

### 13.5 Interferencja fal, fale stojące

**Interferencja** fal nazywamy zjawisko nakładania się fal. Rozważmy dwie fale o równych częstotliwościach i amplitudach ale o fazach różniących się o  $\varphi$ . Jeżeli te fale rozchodzą się w kierunku  $x$ , z jednakowymi prędkościami to możemy je opisać równaniami

$$\begin{aligned} y_1 &= A \sin(kx - \omega t) \\ y_2 &= A \sin(kx - \omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (13.24)$$

Podobnie jak w przypadku drgań, również dla fal obowiązuje zasada superpozycji więc wypadkową falę znajdujemy jako sumę fal składowych

$$y = 2A \cos(\varphi/2) \sin(kx - \omega t + \varphi/2) \quad (13.25)$$

To jest ponownie równanie fali sinusoidalnej  $y = A' \sin(kx - \omega t + \varphi/2)$  o amplitudzie

$$A' = 2A \cos(\varphi/2) \quad (13.26)$$

Widzimy, że wynik nakładania się fal (interferencji) zależy wyłącznie od różnicy faz  $\varphi$ . Dla  $\varphi = 0$  fale są zgodne w fazie i wzmacniają się maksymalnie (amplituda  $A'$  osiąga maksimum), a dla  $\varphi = 180^\circ$  fale są przeciwne w fazie i wygaszają się (amplituda  $A' = 0$ ). Oczywiście dla pozostałych wartości  $\varphi$  otrzymujemy pośrednie wyniki nakładania się fal.

Możesz prześledzić interferencję fal w zależności od różnicy faz  $\varphi$  korzystając z programu komputerowego „Składanie ruchów falowych” dostępnego na stronie WWW autora i stronie Open AGH.

#### 13.5.1 Fale stojące

Ponownie zajmiemy się interferencją dwu fal o równych częstotliwościach i amplitudach ale rozchodzących się w przeciwnych kierunkach na przykład  $+x$  i  $-x$ . Z taką sytuacją mamy do czynienia na przykład gdy fala rozchodząca się w danym ośrodku (ciele) odbija się od granicy ośrodka (ciała) i nakłada się na falę padającą. Fale te można opisać równaniami

$$\begin{aligned} y_1 &= A \sin(kx - \omega t) \\ y_2 &= A \sin(kx + \omega t) \end{aligned} \quad (13.27)$$


Falę wypadkową znajdujemy jako sumę tych fal składowych



$$y = y_1 + y_2 = 2A \sin kx \cos \omega t \quad (13.28)$$

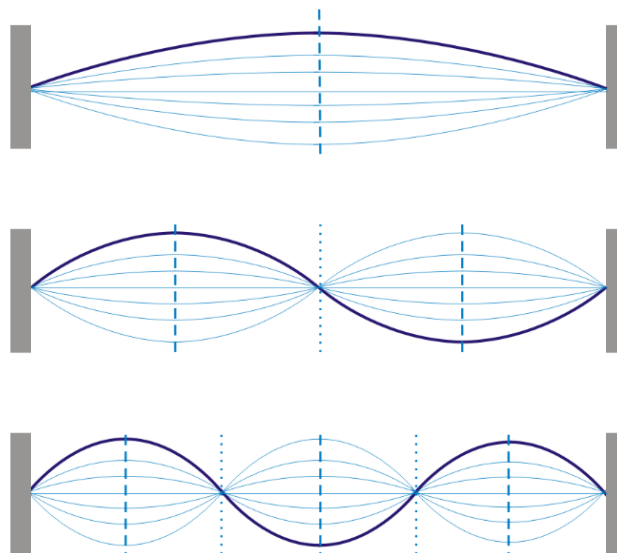


Zauważmy, że jest to równanie ruchu harmonicznego prostego postaci  $y = A' \cos \omega t$  z amplituda równą

$$A' = 2A \sin kx \quad (13.29)$$

Widzimy, że cząstki ośrodka drgają ruchem harmonicznym prostym ale w przeciwieństwie do fali bieżącej różne punkty ośrodka mają różną amplitudę drgań zależną od ich położenia  $x$ . Taką falę nazywamy *falą stojącą* .

Punkty, dla których  $kx = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$ , itd. czyli znajdujące się w położeniach  $x = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4$  itd. mają maksymalną amplitudę. Punkty te nazywamy *strzałkami* , a punkty dla których  $kx = \pi, 2\pi, 3\pi$  itd. tj. takie, że  $x = \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2$  itd. mają zerową amplitudę i nazywane są *węzłami* . Widać, że odległości między kolejnymi węzłami i strzałkami wynoszą pół długości fali. Sytuacja ta jest przedstawiona na rysunku 13.9, gdzie zaznaczonych jest kilka możliwych drgań struny zamocowanej na obu końcach.

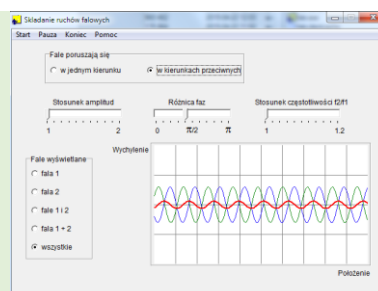


Rys. 13.9. Fale stojące dla struny zamocowanej na obu końcach; węzły są zaznaczone liniami kropkowymi, a strzałki przerywanymi.

Zwróćmy uwagę na jeszcze jedną istotną różnicę pomiędzy falą bieżącą, a falą stojącą. W fali stojącej energia nie jest przenoszona wzdłuż sznura bo nie może ona przepłynąć przez węzły (energia kinetyczna i potencjalna węzłów jest równa zero bo węzły nie drgają). Energia w fali stojącej jest *na stałe zmagazynowana* w poszczególnych elementach ośrodka (np. struny).



Możesz prześledzić powstawanie fali stojącej w wyniku interferencji fal biegnących w przeciwnie strony korzystając z programu komputerowego „Składanie ruchów falowych” dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.



### 13.6 Analiza fal złożonych



Ponownie rozpatrzmy drgania poprzeczne struny. Jeżeli struna zamocowana na obu końcach zostanie najpierw wygięta, a następnie puszczone, to wzdłuż struny rozchodzą się drgania poprzeczne. Zaburzenia te odbijają się od zamocowanych końców i w wyniku interferencji powstaje fala stojąca. Zwróćmy uwagę, że drgania struny wytwarzają w otaczającym strunę powietrzu dźwiękowe fale podłużne (fale akustyczne). Ponieważ jedynym warunkiem, jaki musi być spełniony, jest nieruchomość obu końców struny, czyli istnienie węzłów fali stojącej na tych końcach, to mogą powstać w tej strunie fale stojące o różnej długości. Pierwsze trzy rodzaje drgań jakie powstają w strunie o długości  $L$  zamocowanej na końcach zostały pokazane na rysunku 13.9 (powyżej).

Widzimy, że dla kolejnych drgań  $L = \frac{1}{2} \lambda_1$ ,  $L = \lambda_2$ ,  $L = \frac{3}{2} \lambda_3$ . Możemy więc zapisać ogólny związek na długość fali powstającej w strunie

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (13.30)$$

gdzie  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Korzystając z tego, że prędkość fali  $v = \lambda/T = \lambda f$  oraz z równania (13.16) na prędkość fali harmonicznego rozchodzącej się wzdłuż naprężonego sznura (struny) możemy obliczyć częstotliwość fal stojących w strunie

$$f_n = \frac{n}{2L} v = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (13.31)$$

Najniższą częstotliwość nazywamy *częstotliwością podstawową* , a pozostałe *wyższymi harmonicznymi*  czyli alikwotami.

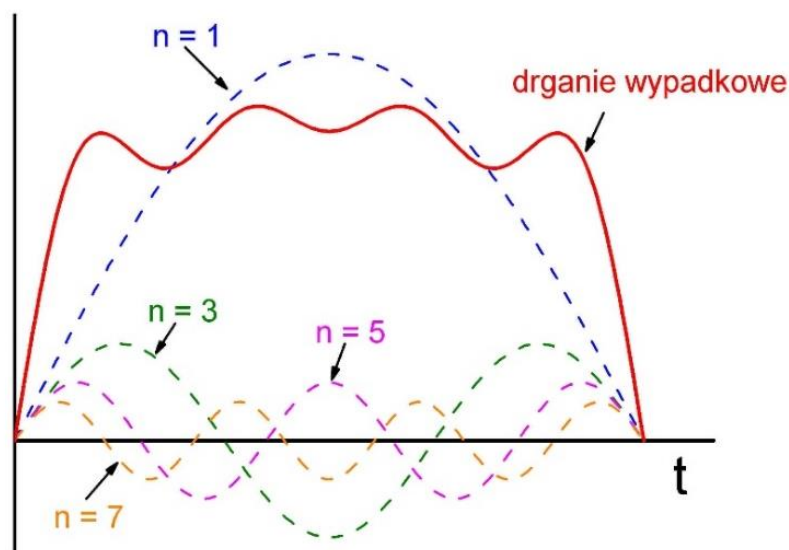
Zazwyczaj w drganiach występują, oprócz drgania podstawowego, również drgania harmoniczne, a dźwięki jakie odbieramy są wynikiem nakładania się tych drgań. O jakości instrumentu (jego barwie) decyduje właśnie to ile alikwotów jest zawarte w dźwięku i jakie są ich natężenia. Przykładowo, drganie wypadkowe struny będące złożeniem tonu podstawowego ( $n = 1$ ) i wyższych harmonicznymi ( $n = 3, 5, 7$ ) o różnych amplitudach jest pokazane na rysunku 13.10. Zwróćmy uwagę, że wypadkowe drganie (choć okresowe) nie jest harmoniczne (nie daje się opisać funkcją sinus lub cosinus).

Zagadnienie przedstawienia dowolnego drgania okresowego jako sumy drgań harmonicznymi ujmuje twierdzenie Fouriera, które mówi, że



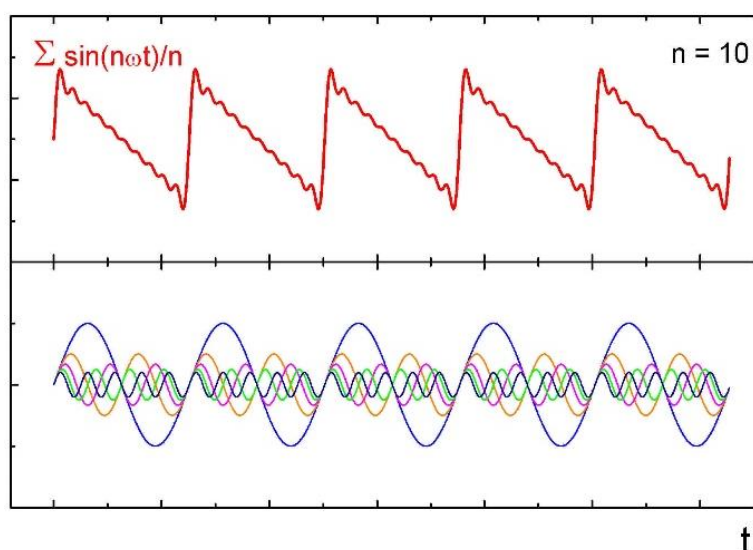
#### **Prawo, zasada, twierdzenie**

*Dowolne drganie okresowe o okresie  $T$  możemy przedstawić jako kombinację liniową (sumę) drgań harmonicznymi o okresach danych wzorem  $T_n = T/n$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną.*



Rys. 13.10. Fala wypadkowa będąca złożeniem czterech fal harmoniczych

Dotyczy to dowolnej funkcji okresowej więc można na przykład skonstruować za pomocą fal sinusoidalnych (które są wszędzie zakrzywione) przebieg piłokształtny, który jest złożony z odcinków prostych (rysunek 13.11).

Rys. 13.11. Złożenie  $n = 10$  drgań harmoniczych postaci  $\sin(n\omega t)/n$  (wykres górny) oraz pięć pierwszych drgań składowych (wykres dolny)

### Ćwiczenie 13.2

Innym przykładem jest piszczałka organowa zamknięta, w której źródłem dźwięku jest drgające powietrze. Jeżeli na krawędź otwartego końca piszczałki skierujemy strumień powietrza to można w niej wytworzyć falę stojącą. Na otwartym końcu piszczałki powstaje strzałka, a na jej końcu zamkniętym węzeł. Spróbuj wykreślić, drżanie podstawowe i trzy

pierwsze drgania harmoniczne jakie powstają w piszczałce zamkniętej. Przyjmując, że długość piszczałki wynosi  $L$ , oblicz długości tych fal. Jaki ogólny związek opisuje długości fal stojących w piszczałce zamkniętej? Zapisz wzór poniżej.

$$\lambda_n =$$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

### 13.7 Dudnienia, modulacja amplitudy

Gdy omawialiśmy fale stojące to mieliśmy do czynienia z sytuacją, w której dodawanie (superpozycja) zaburzeń dało w wyniku falę o amplitudzie stałej w czasie ale zależnej od położenia cząstki drgającej  $x$ . Jest to ilustracja tzw. *interferencji w przestrzeni*. Teraz rozpatrzmy przypadek interferencji w czasie. W tym celu rozpatrzmy, w danym punkcie przestrzeni  $x$ , wynik nakładania się dwóch biegnących w tym samym kierunku fal o jednakowych amplitudach ale nieznacznie różnych częstotliwościach. Drgania harmoniczne danej cząstki ośrodka (w zadanym punkcie  $x$ ) wywołane przez te fale mają postać

$$\begin{aligned} y_1 &= A \sin \omega_1 t = A \sin 2\pi f_1 t \\ y_2 &= A \sin \omega_2 t = A \sin 2\pi f_2 t \end{aligned} \quad (13.32)$$

a drganie wypadkowe

$$y = y_1 + y_2 = A(\sin 2\pi f_1 t + \sin 2\pi f_2 t) \quad (13.33)$$

Ze wzoru na sumę sinusów otrzymujemy

$$y = \left[ 2A \cos \left( 2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t \right) \right] \sin \left( 2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t \right) \quad (13.34)$$

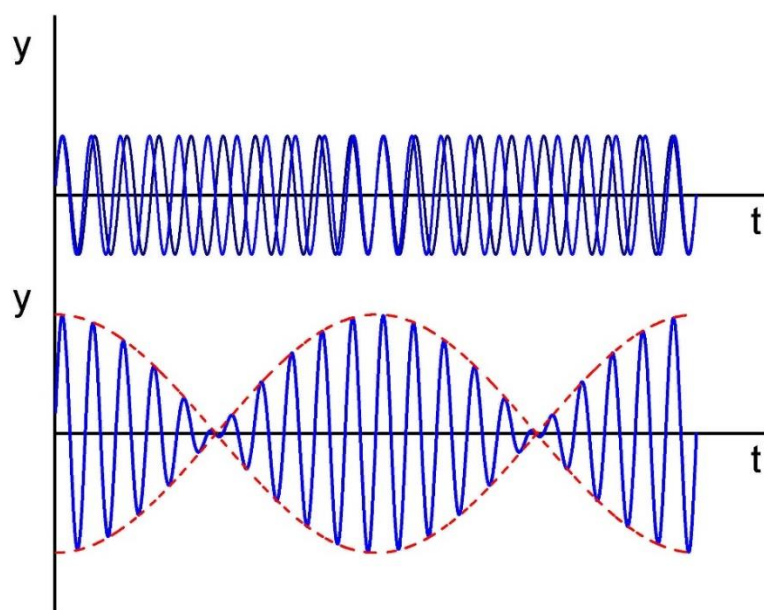
Równanie to ma postać  $y = A' \sin(\omega t) = A' \sin(2\pi f t)$ . Drgania wypadkowe można więc uważać za drgania o częstotliwości

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2} \quad (13.35)$$

(która jest średnią częstotliwości dwóch fal) i o amplitudzie  $A'$  (wyrażenie w nawiasie kwadratowym w równaniu 13.34). Zauważ, że amplituda zmienia się w czasie z częstotliwością

$$f_{amp} = \frac{f_1 - f_2}{2} \quad (13.36)$$

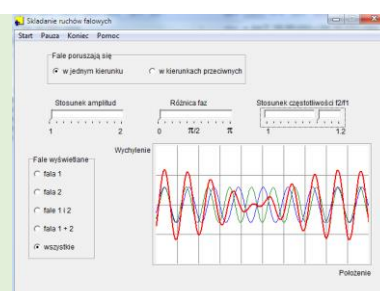
Jeżeli częstotliwości  $f_1$  i  $f_2$  są bliskie sobie to amplituda zmienia się powoli ( $f_{amp}$  jest mała). Mówimy, że mamy do czynienia z *modulacją amplitudy* (AM – amplitude modulation). Naturalną modulację amplitudy dla fal dźwiękowych możemy usłyszeć gdy dwie struny instrumentu są nastrojone na niewiele różniące się tony. Gdy obie te struny wydają równocześnie dźwięk (na przykład uderzono dwa sąsiednie klawisze fortepianu) to usłyszymy tak zwane dudnienia przejawiające się jako zmiana głośności (rysunek 13.12). Zastosowanie modulacji ma na celu wprowadzenie do procesu potrzebnej informacji, która ma być przesłana za pomocą fal. Modulacja amplitudy jest najstarszym i najbardziej rozpowszechnionym (obok modulacji częstotliwości FM) sposobem przesyłania informacji za pomocą fal radiowych.



Rys. 13.12. Nałożenie się drgań harmoniczych pokazanych na górnym wykresie daje w wyniku drganie o zmiennej w czasie amplitudzie (obwiednia dolnego wykresu)



Możesz prześledzić powstawanie dudnień w zależności od stosunku częstotliwości fal składowych  $f_2/f_1$  korzystając z programu komputerowego „Składanie ruchów falowych” dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.



### 13.8 Zjawisko Dopplera



#### Prawo, zasada, twierdzenie

Zjawisko Dopplera polega na pozornej zmianie częstotliwości fali z powodu ruchu obserwatora lub źródła fali.

W pracy z 1842 r., Christian Doppler zwrócił uwagę, że barwa świecącego ciała (częstotliwość wysyłanego promieniowania) musi się zmieniać z powodu ruchu względnego obserwatora lub źródła. Zjawisko Dopplera występuje dla wszystkich fal; my szczegółowo rozważymy je dla fal dźwiękowych. Ograniczymy się do przypadku ruchu źródła i obserwatora wzdłuż łączącej ich prostej.

Rozpatrzmy sytuację gdy źródło dźwięku spoczywa, a obserwator porusza się w kierunku źródła z prędkością  $v_o$  (względem ośrodka). Jeżeli fale o długości  $\lambda$  rozchodzą się z prędkością  $v$  to w czasie  $t$  dociera do nieruchomego obserwatora  $vt/\lambda$  fal. Jeżeli obserwator porusza się w kierunku źródła (wychodzi falom na przeciw) to odbiera jeszcze dodatkowo  $v_o t/\lambda$  fal. W związku z tym częstotliwość  $f'$  słyszana przez obserwatora

$$f' = \frac{\frac{vt}{\lambda} + \frac{v_o t}{\lambda}}{t} = \frac{v + v_o}{\lambda} = \frac{v + v_o}{\frac{v}{f}} \quad (13.37)$$

Ostatecznie

$$f' = f \frac{v + v_o}{v} \quad (13.38)$$

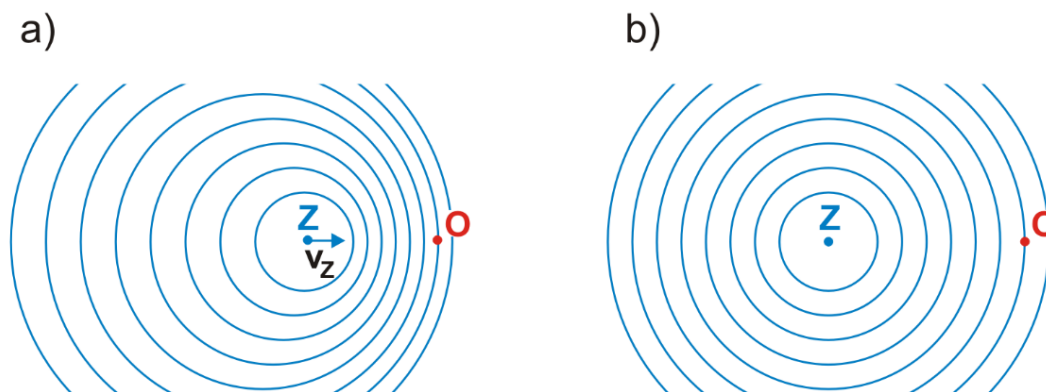
Obserwator rejestruje wyższą częstotliwość niż częstotliwość źródła. Kiedy obserwator oddala się od źródła należy w powyższych wzorach zmienić znak (na minus) prędkości obserwatora  $v_o$ . W tym przypadku częstotliwość zmniejsza się.

Analogicznie możemy przestudiować przypadek źródła poruszającego się z prędkością  $v_z$  względem nieruchomego obserwatora (i względem ośrodka).

Otrzymujemy wtedy zależność

$$f' = f \frac{v}{v - v_z} \quad (13.39)$$

dla przypadku źródła zbliżającego się do obserwatora. Obserwator rejestruje wyższą częstotliwość niż częstotliwość źródła. Gdy źródło oddala się to w powyższym wzorze zmieniamy znak prędkości źródła  $v_z$ . Ta sytuacja jest przedstawiona na rysunku 13.13, gdzie pokazane są powierzchnie falowe dla fal wysłanych ze źródła Z poruszającego się z prędkością  $v_z$  w stronę obserwatora O (rysunek a) w porównaniu do powierzchni falowych dla fal wysłanych z nieruchomego źródła (rysunek b). Widzimy, że w przypadku (a) obserwator rejestruje podwyższoną częstotliwość.



Rys. 13.13. Fale wysyłane przez źródło Z: (a) poruszające się z prędkością  $v_z$  w stronę obserwatora O; (b) przez nieruchome źródło

Zwróćmy uwagę, że zmiany częstotliwości zależą od tego czy porusza się źródło czy obserwator. Wzory (13.38) i (13.39) dają inny wynik dla jednakowych prędkości obserwatora i źródła.

W sytuacji kiedy porusza się zarówno źródło jak i obserwator otrzymujemy zależność będącą połączeniem wzorów (13.39) i (13.40)

$$f' = f \left( \frac{v \pm v_o}{v \mp v_z} \right) \quad (13.40)$$

Znaki "górne" w liczniku i mianowniku odpowiadają zbliżaniu się źródła i obserwatora, a znaki "dolne" ich oddalaniu się. Powyższe wzory są słuszne gdy prędkości źródła i obserwatora są mniejsze od prędkości dźwięku.

Możesz prześledzić zjawisko Dopplera dla źródła i obserwatora poruszających się wzdłuż łączącej ich prostej korzystając z programu komputerowego „Efekt Dopplera” dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.



### Ćwiczenie 13.3

Typowym przykładem efektu Dopplera jest zmiana częstotliwości dźwięku klaksonu samochodu przejeżdżającego koło nas. Słyszymy, że klakson ma wyższy ton gdy samochód zbliża się do nas, a niższy gdy się oddala. Załóżmy, że podczas mijania nas przez samochód rejestrujemy obniżenie częstotliwości klaksonu o 15%. Na podstawie tej informacji sprawdź czy samochód nie przekroczył dozwolonej, poza obszarem zabudowanym, prędkości 90 km/h. Prędkość dźwięku przyjmij równą 340 m/s.

Wynik zapisz poniżej.

$v =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Zjawisko Dopplera obserwujemy również w przypadku fal elektromagnetycznych, a więc i świetlnych. Opis tego zjawiska dla światła jest inny niż dla fal dźwiękowych. Dla fal dźwiękowych otrzymaliśmy dwa wyrażenia (13.38) i (13.39) na zmianę częstotliwości fali w zależności od tego czy to źródło czy też obserwator poruszają się względem ośrodka przenoszącego drgania (powietrza).

Do rozchodzenia się światła nie jest potrzebny ośrodek (światło może rozchodzić się w próżni) ponadto, zgodnie ze szczególną teorią względności Einsteina, prędkość światła nie zależy od układu odniesienia i dlatego częstotliwość fali świetlnej odbieranej przez obserwatora zależy tylko od prędkości względnej źródła światła i obserwatora. Jeżeli źródło i obserwator poruszają się wzdłuż łączącej ich prostej to

$$f' \approx f \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (13.41)$$

gdzie  $\beta = u/c$ . W tej zależności  $u$  jest prędkością względną źródła względem odbiornika, a  $c$  prędkością światła. Dla małych wartości prędkości względnej  $|u| \ll c$  powyższy wzór przyjmuje postać

$$f' \approx f \left( 1 \pm \frac{u}{c} \right) \quad (13.42)$$

Znak "+" odnosi się do wzajemnego zbliżania się źródła i obserwatora, a znak "-" do ich wzajemnego oddalania się. Zbliżaniu towarzyszy więc wzrost częstotliwości (dla światła oznacza to przesunięcie w stronę fioletu), a oddalaniu się obniżenie częstotliwości (dla światła oznacza to przesunięcie w stronę czerwieni).

Zjawisko to ma liczne zastosowania: na przykład w astronomii służy do określenia prędkości odległych świecących ciał niebieskich. Porównujemy długości fal światła wysyłanego przez pierwiastki tych obiektów z długościami fal światła wysyłanego przez takie same pierwiastki znajdujące się na Ziemi. To właśnie szczegółowe badania przesunięć ku czerwieni w widmach odległych galaktyk wykazały, że Wszechświat rozszerza się.



## 14 Statyka i dynamika płynów

Powszechnie przyjęty jest podział materii na ciała stałe i płyny. Pod pojęciem substancji, która może płynąć rozumiemy zarówno ciecze jak i gazy. Płyny, w odróżnieniu od ciał sztywnych, mających określony rozmiar i kształt, łatwo zmieniają swój kształt, a w przypadku gazów przyjmują objętość równą objętości naczynia. Mówimy, że płyny nie mają *sprężystości kształtu*, a mają *sprężystość objętości*. Dlatego rozwiązanie zagadnień z mechaniki płynów wymaga posługiwania się nowymi pojęciami takimi jak *ciśnienie* i *gęstość*.

### 14.1 Ciśnienie i gęstość

Różnica w działaniu siły powierzchniowej na płyn i na ciało stałe jest związana z tym, że w cieczy siły występują tylko przy zmianie objętości, a nie jak w ciałach stałych przy ich deformacji (zmianie kształtu). W związku z tym w cieczy siła powierzchniowa, zwana *siłą parcia*, jest zawsze prostopadła do powierzchni płynu podczas gdy w ciele stałym może mieć dowolny kierunek. Spoczywający płyn nie może równoważyć sił stycznych (warstwy płynu ślizgałyby się po sobie) i dlatego może zmieniać kształt i płynąć. W związku z tym będziemy opisywać siłę działającą na płyn za pomocą ciśnienia  $p$  zdefiniowanego następująco:



#### Definicja

*Ciśnienie definiujemy jako stosunek siły parcia działającej na jednostkę powierzchni do wielkości tej powierzchni.*

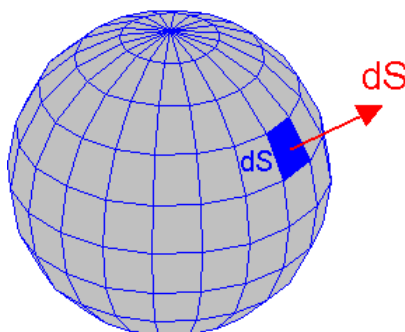
Ciśnienie jest wywierane zarówno na ścianki naczynia jak i na dowolne przekroje płynów zawsze prostopadle do tych ścianek i przekrojów.



#### Jednostki

Ciśnienie jest wielkością skalarną. Jednostką ciśnienia w układzie SI jest *pascal* (Pa);  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ . Inne stosowane jednostki to *bar* ( $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ ), *atmosfera* ( $1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$ ), *milimetr słupka rtęci* ( $760 \text{ mm Hg} = 1 \text{ atm}$ ).

Rozważmy teraz zamkniętą powierzchnię zawierającą płyn (rysunek 14.1). Dowolny element powierzchni  $dS$  jest reprezentowany przez wektor powierzchni  $d\mathbf{S}$ .



Rys. 14.1. Element powierzchni  $dS$  reprezentowany przez wektor powierzchni  $d\mathbf{S}$ .

**Definicja**

Długość wektora  $S$  jest równa polu powierzchni  $S$ , jego kierunek jest prostopadły do powierzchni, a zwrot na zewnątrz powierzchni.

Siła  $F$  wywierana przez płyn na ten element powierzchni wynosi

$$F = pS \quad (14.1)$$

Ponieważ  $F$  i  $S$  mają ten sam kierunek więc ciśnienie  $p$  można zapisać

$$p = \frac{F}{S} \quad (14.2)$$

Do opisu płynów stosujemy również pojęcie gęstości  $\rho$  wyrażonej jako

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (14.3)$$

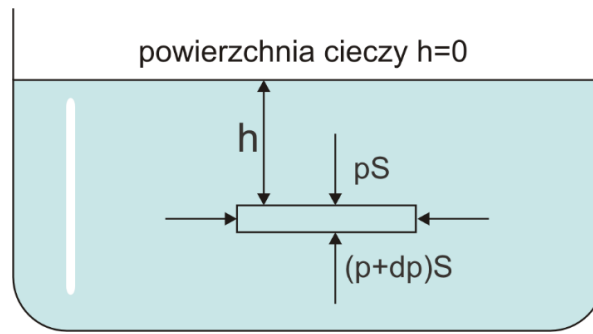
Gęstość płynów zależy od wielu czynników takich jak temperatura, czy ciśnienie. W tabelicy 14.1 przedstawiony jest zakres gęstości spotykanych w przyrodzie.

Tabela 14.1. Gęstości wybranych obiektów

Materiał	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
przestrzeń międzygwiazdowa	$10^{-18} - 10^{-21}$
najlepsza próżnia laboratoryjna	$10^{-17}$
powietrze (1 atm 0°C)	1.3
powietrze (50 atm 0°C)	6.5
Ziemia: wartość średnia	$5.52 \cdot 10^3$
Ziemia: rdzeń	$9.5 \cdot 10^3$
Ziemia: skorupa	$2.8 \cdot 10^3$
białe karły	$10^8 - 10^{15}$
jądro uranu	$10^{17}$

## 14.2 Ciśnienie wewnątrz nieruchomego płynu

Równanie (14.2) opisuje ciśnienie wywierane przez płyn na powierzchnię, która go ogranicza. Możemy także mówić o ciśnieniu wewnętrznym płynu. W tym celu rozpatrzmy element płynu w kształcie cienkiego dysku znajdującego się na głębokości  $h$  pod powierzchnią płynu pokazany na rysunku 14.2. Grubość dysku wynosi  $dh$ , a powierzchnia podstawy wynosi  $S$ . Masa takiego elementu wynosi  $\rho Sdh$  a jego ciężar  $\rho g Sdh$ . Pamiętajmy, że siły działające na element są w każdym punkcie prostopadłe do powierzchni. Siły poziome wywołane jedynie przez ciśnienie płynu równoważą się. Siły pionowe są wywoływane nie tylko przez ciśnienie płynu ale też przez jego ciężar. Ponieważ płyn jest nieruchomy więc wypadkowa siła działająca na element płynu jest równa zero.


 Rys. 14.2. Siły działające na element cieczy znajdujący się na głębokości  $h$ 

Zachowanie równowagi w kierunku pionowym wymaga aby

$$(p + dp)S = pS + \rho g S dh \quad (14.4)$$

a stąd

$$dp = \rho g dh \quad \text{czyli} \quad \frac{dp}{dh} = \rho g \quad (14.5)$$

Powyższe równanie pokazuje, że ciśnienie zmienia się z głębokością płynu. Powodem jest ciężar warstwy płynu leżącej pomiędzy punktami, dla których mierzymy różnicę ciśnień. Wielkość  $\rho g$  nazywamy *ciężarem właściwym* płynu. Dla cieczy zazwyczaj  $\rho$  jest stałe (ciecze są praktycznie nieściśliwe) więc możemy obliczyć ciśnienie cieczy na głębokości  $h$  całkując równanie (14.5)

$$p = p_0 + \rho g h \quad (14.6)$$

gdzie  $p_0$  jest ciśnieniem na powierzchni cieczy ( $h = 0$ ). Zazwyczaj jest to ciśnienie atmosferyczne. Równanie (14.6) nie tylko pokazuje, że ciśnienie rośnie wraz z głębokością ale też, że jest jednakowe dla punktów o tej samej głębokości, a nie zależy od kształtu naczynia (paradoks hydrostatyczny).

Założenie o stałej gęstości  $\rho$  nie jest jednak prawdziwe dla gazów gdy mamy do czynienia ze znaczną zmianą wysokości (np. gdy wznosimy się w atmosferze). Ciśnienie zmienia się wtedy znacznie i zmienia się też  $\rho$ .

### 14.2.1 Pomiar ciśnienia (barometr)

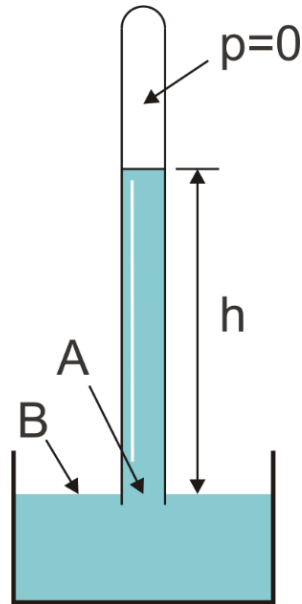
E. Torricelli skonstruował w 1643 r. barometr rtęciowy. Barometr Torricellego składa się z rurki wypełnionej rtęcią ( $\rho_{Hg} = 13.6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ), którą odwracamy nad naczyniem z rtęcią tak jak na rysunku 14.3.

Zgodnie z naszymi poprzednimi rozważaniami

$$p_A = \rho g h \quad (14.7)$$

podczas gdy

$$p_B = p_{atm}. \quad (14.8)$$



Rys. 14.3. Barometr Torricellego

Ciśnienia w punktach *A* i *B* są jednakowe bo punkty te są na jednakowej wysokości więc

$$\rho g h = p_{atm.} \quad (14.9)$$

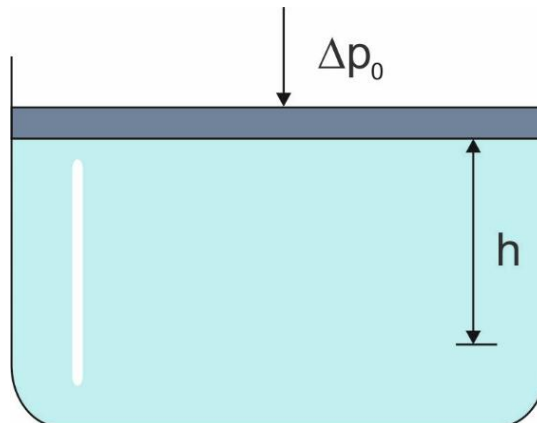
skąd

$$h = \frac{p_{atm.}}{\rho g} \quad (14.10)$$

Mierząc więc wysokość słupa rtęci mierzymy wielkość ciśnienia atmosferycznego.

### 14.3 Prawo Pascala i prawo Archimedesesa

Rozpatrzmy teraz ciecz w naczyniu zamkniętym tłokiem, na który możemy działać zmiennym ciśnieniem zewnętrznym  $p_0$  (rysunek poniżej).



Rys. 14.4. Ciśnienie zewnętrzne wywierane na zamknięty płyn

W każdym punkcie cieczy znajdującym się na głębokości  $h$ , ciśnienie jest dane wyrażeniem (14.6). Możemy teraz powiększyć ciśnienie zewnętrzne o wartość  $\Delta p_0$ . Ponieważ ciecze są nieściśliwe więc gęstość pozostaje praktycznie bez zmian i ciśnienie teraz wynosi


$$p = p_0 + \Delta p_0 + \rho gh \quad (14.11)$$

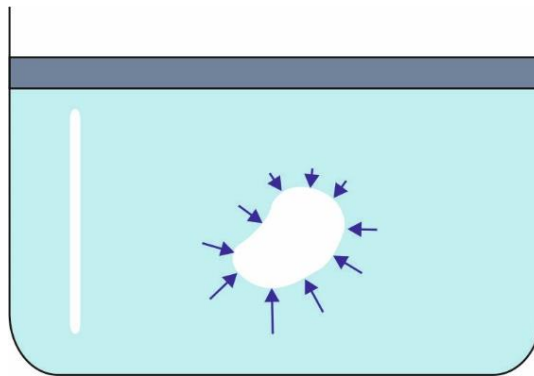
Zjawisko to opisuje *prawo Pascala*, które można następująco sformułować:



**Prawo, zasada, twierdzenie**

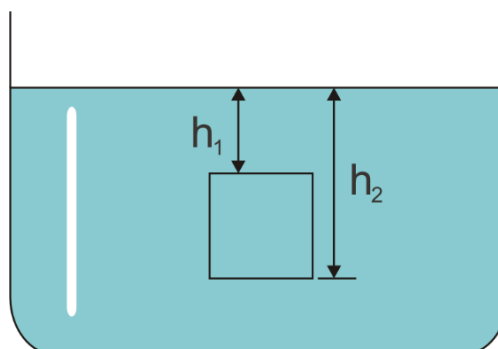
*Ciśnienie zewnętrzne wywierane na zamknięty płyn jest przekazywane niezmiennie na każdą część płynu oraz na ścianki naczynia.*

Prawo to jest konsekwencją praw mechaniki płynów podobnie jak prawo Archimedesesa. Kiedy ciało jest zanurzone w całości lub częściowo w spoczywającym płynie to płyn ten wywiera ciśnienie na każdą, będącą z nim w kontakcie, część powierzchni ciała. Wypadkowa siła jest skierowana ku górze i nazywa się *siłą wyporu* .



Rys. 14.5. Siły wywierane przez płyn na zanurzone w nim ciało

Gdy przyjmimy przykładowo, że w cieczy zostało zanurzone ciało w kształcie walca o powierzchni podstawy równej  $S$  (tak jak na rysunku 14.6) to wypadkowa siła działająca na to ciało jest związana z różnicą ciśnień na głębokościach  $h_1$  i  $h_2$  odpowiednio nad i pod walcem.



Rys. 14.6. Walec o powierzchni podstawy  $S$  zanurzony w płynie

Siła wypadkowa wynosi więc

$$F_{\text{wyp}} = (p_0 + \rho g h_2)S - (p_0 + \rho g h_1)S = \rho g V \quad (14.12)$$

gdzie  $V = S(h_2 - h_1)$  jest objętością walca. Z otrzymanej zależności wynika, że siła działająca na walec jest równa ciężarowi cieczy wypartej przez ten walec. Zauważmy, że ta siła nie zależy od kształtu ciała, a tylko od jego objętości.

Możemy więc sformułować *prawo Archimedesesa*:



#### **Prawo, zasada, twierdzenie**

*Ciało w całości lub częściowo zanurzone w płynie jest wypierane ku górze siłą równą ciężarowi wypartego przez to ciało płynu.*

$$F_{\text{wyporu}} = m_p g = \rho g V \quad (14.13)$$

gdzie  $m_p$  jest masą płynu, a  $\rho$  jego gęstością. Natomiast  $V$  jest objętością części zanurzonej ciała.

Na każde zanurzone w płynie ciało działają siła wyporu i siła ciężkości. Dla ciała o masie  $m$  i objętości  $V$  całkowicie zanurzonego w płynie wypadkowa tych dwóch sił wynosi

$$F = F_{\text{wyporu}} - mg = \rho g V - \rho_1 g V = g V (\rho - \rho_1) \quad (14.14)$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością płynu, a  $\rho_1$  średnią gęstością ciała. Widzimy, że zwrot siły wypadkowej zależy od różnicy gęstości płynu i ciała. Na przykład ciało zanurzone w cieczy o gęstości  $\rho < \rho_1$  tonie, a dla gęstości  $\rho > \rho_1$  pływa częściowo zanurzone.



#### **Ćwiczenie 14.1**

Korzystając z tego prawa spróbuj samodzielnie obliczyć jak duży ciężar można przeprowadzić przez rzekę za pomocą tratwy zbudowanej z 10 okrągłych kłód drewnianych o średnicy 20 cm i długości 3 m każda. Gęstość drewna przyjmij równą  $750 \text{ kg/m}^3$ , a gęstość wody  $1000 \text{ kg/m}^3$ . Wyniki zapisz poniżej.

$Q =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

### **14.4 Ogólny opis przepływu płynów**

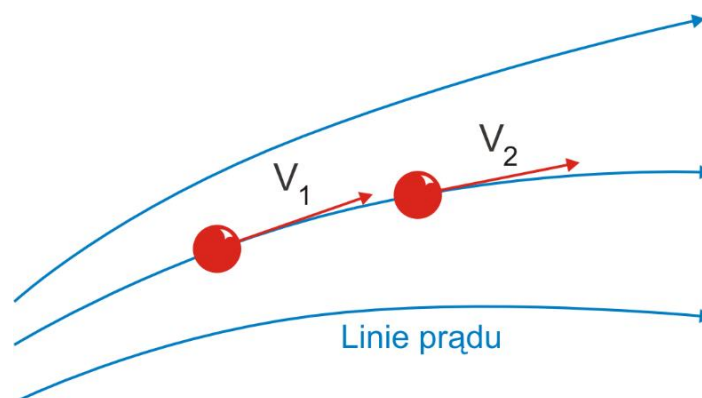
Przejdziemy teraz do opisu ruchu płynu czyli zajmiemy się dynamiką płynów. Znane są dwa podejścia do opisu ruchu płynu. Możemy albo zająć się opisem ruchu poszczególnych cząsteczek płynu albo opisywać gęstość płynu i jego prędkość w każdym punkcie przestrzeni w funkcji czasu. Oznacza to, że koncentrujemy się na wybranym punkcie przestrzeni, w którym definiujemy funkcje  $\rho(x, y, z, t)$  oraz  $v(x, y, z, t)$ .

Na wstępie poznamy ogólne pojęcia charakteryzujące przepływ:

- Przepływ może być *ustalony*  $\text{P}$  (laminarny) lub *nieustalony*  $\text{P}$ . Ruch płynu jest ustalony, gdy prędkość płynu  $\mathbf{v}$  w dowolnie wybranym punkcie jest stała w czasie tzn. każda cząsteczka przechodząca przez dany punkt zachowuje się tak samo. Warunki takie osiąga się przy niskich prędkościach przepływu;
- Przepływ może być *wirowy*  $\text{P}$  lub *bezwirowy*  $\text{P}$ . Przepływ jest bezwirowy, gdy w żadnym punkcie cząsteczka nie ma wypadkowej prędkości kątowej;
- Przepływ może być *ściśliwy*  $\text{P}$  lub *nieściśliwy*  $\text{P}$ . Przepływ jest nieściśliwy gdy gęstość płynu jest stała. Zazwyczaj przepływ cieczy jest nieściśliwy. Również przepływ gazu może być w pewnych warunkach nieściśliwy. Przykładem może tu być ruch powietrza względem skrzydeł samolotu podczas lotu z prędkością mniejszą od prędkości dźwięku.
- Przepływ może być *lepki*  $\text{P}$  lub *nielekki*  $\text{P}$ . Lepkość w ruchu płynów jest odpowiednikiem tarcia w ruchu ciał stałych. Charakteryzuje opór płynów przeciw płynięciu pod działaniem sił zewnętrznych. Lepkość jest istotną cechą wielu produktów na przykład smarów.

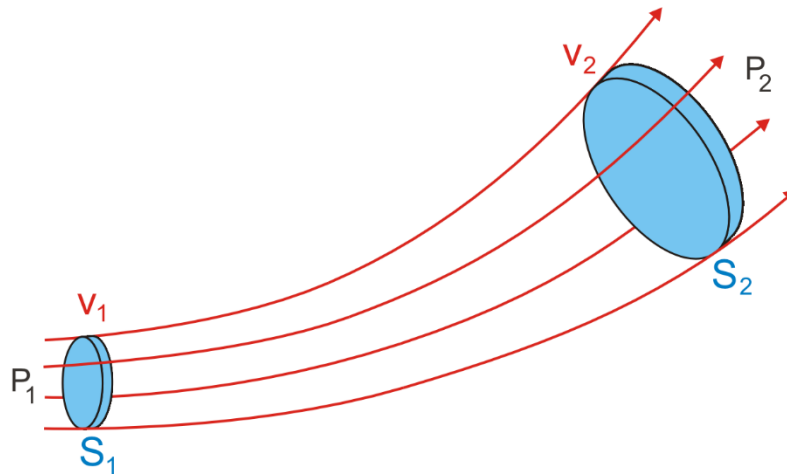
W naszych rozważaniach ograniczymy się do przepływów ustalonych, bezwirowych, nieściśliwych i nielepkich.

W przepływie ustalonym  $\mathbf{v}$  jest stała w czasie w danym punkcie. Oznacza to, że każda cząstka przechodząca przez dowolny punkt ma taką samą prędkość np.  $v_1$ . Tak samo jest w kolejnym punkcie gdzie każda cząstka ma prędkość  $v_2$ . Dotyczy to wszystkich punktów. Oznacza to, że wystarczy prześledzić tor jednej cząstki, a będziemy znali tor każdej cząstki przechodzącej przez dany punkt. Tor tej cząstki nazywamy *linią prądu*  $\text{P}$  (rysunek 14.7). Linia prądu jest równoległa do prędkości płynu. Żadne linie prądu nie mogą się przecinać bo istniałaby niejednoznaczność w wyborze drogi przez cząstkę (przepływ nie byłby ustalony).



Rys. 14.7. Linie prądu

Jeżeli wybierzemy pewną skończoną liczbę linii prądu to taką wiązkę nazywamy *strugą prądu*  $\text{P}$ . Brzegi składają się z linii prądu, a ponieważ linie prądu są równoległe do prędkości więc płyn nie przepływa przez brzegi strugi. Płyn wchodzący jednym końcem strugi musi opuścić ją drugim tak jak w rurce. Na rysunku 14.8 prędkość cząstek w punkcie  $P_1$  wynosi  $v_1$ , a pole przekroju strugi  $S_1$ . W punkcie  $P_2$  mamy odpowiednio prędkość  $v_2$  i pole przekroju  $S_2$ .



Rys. 14.8. Struga prądu.

W czasie  $\Delta t$  cząstka płynu przebywa odległość równą  $v\Delta t$ . Masa płynu przechodzącego przez  $S_1$  w czasie  $\Delta t$  wynosi

$$\Delta m_1 = \rho S_1 v_1 \Delta t \quad (14.15)$$

gdzie  $S_1 v_1 \Delta t$  stanowi objętość elementu płynu. Analogicznie masa płynu przepływającego przez powierzchnię  $S_2$  w czasie  $\Delta t$  jest równa

$$\Delta m_2 = \rho S_2 v_2 \Delta t \quad (14.16)$$

Ponieważ płyn jest nieściśliwy więc jego gęstość jest taka sama w punkcie  $P_1$  i  $P_2$ . Ponadto między tymi punktami płyn nie może opuścić strugi więc strumienie mas przepływające przez obie powierzchnie muszą być sobie równe. Zatem

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad (14.17)$$

lub

$$Sv = \text{const.} \quad (14.18)$$

Otrzymany związek nosi nazwę *równania ciągłości*. Wynika z niego, że



**Prawo, zasada, twierdzenie**

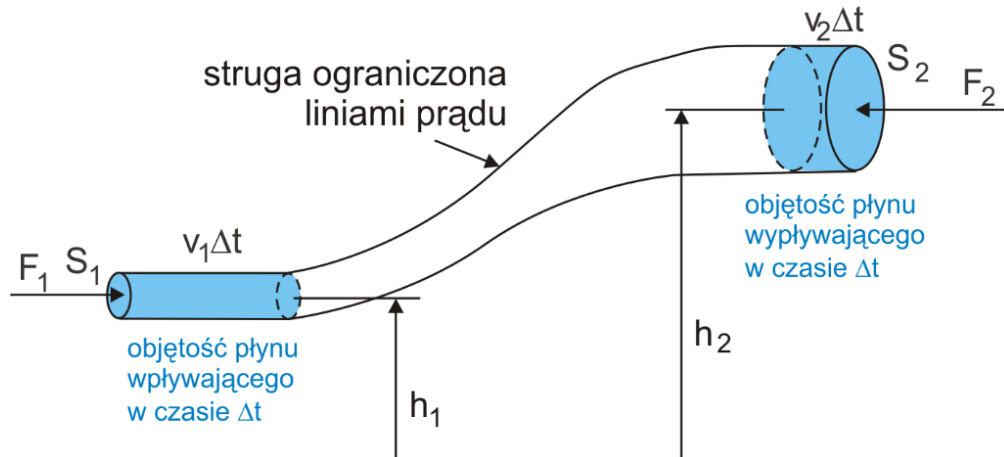
*Prędkość płynu nieściśliwego przy ustalonym przepływie jest odwrotnie proporcjonalna do pola przekroju strugi.*

Linie prądu muszą się zagęszczać w węższej części, a rozrzedzać w szerszej. To znaczy, rzadko rozmieszczone linie oznaczają obszary niskiej prędkości, linie rozmieszczone gęsto obszary wysokiej prędkości.



### 14.5 Równanie Bernoulliego

Rozważmy, pokazany na rysunku 14.9, nielepki, ustalony, nieściśliwy przepływ płynu w strudze. Płyn na rysunku przemieszcza się w stronę prawą. W czasie  $\Delta t$  powierzchnia  $S_1$  przemieszcza się o odcinek  $v_1\Delta t$ . Analogicznie powierzchnia  $S_2$  przemieszcza się o odcinek  $v_2\Delta t$ . Na powierzchnię  $S_1$  działa siła  $F_1 = p_1S_1$ , a na powierzchnię  $S_2$  siła  $F_2 = p_2S_2$ .



Rys. 14.9. Wyprowadzenie równania Bernoulliego

Skorzystamy teraz z twierdzenia o pracy i energii, które mówi, że praca wykonana przez wypadkową siłę jest równa zmianie energii układu. Siłami, które wykonują pracę są  $F_1$  i  $F_2$ . Obliczamy więc całkowitą pracę

$$W = F_1 v_1 \Delta t - F_2 v_2 \Delta t = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t \quad (14.19)$$

Ponieważ w czasie  $\Delta t$  ta sama objętość płynu  $V$  wpływa do strugi i z niej wypływa  $S_2 v_2 \Delta t = S_1 v_1 \Delta t = V$  więc

$$W = (p_1 - p_2)V \quad (14.20)$$

Obliczoną pracę porównujemy ze zmianą energii strugi

$$(p_1 - p_2)V = \left( \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 \right) - \left( \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 \right) \quad (14.21)$$

gdzie  $m$  jest masą przemieszczonej objętości  $V$  płynu. Dzieląc stronami równanie (14.21) przez objętość  $V$ , a następnie wprowadzając gęstość cieczy  $\rho = m/V$  można, grupując odpowiednio wyrazy, przekształcić to równanie do postaci

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 \quad (14.22)$$

Ponieważ nasze rozważania odnosiły się do dowolnych dwóch położen, możemy opuścić wskaźniki i napisać

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = \text{const.} \quad (14.23)$$

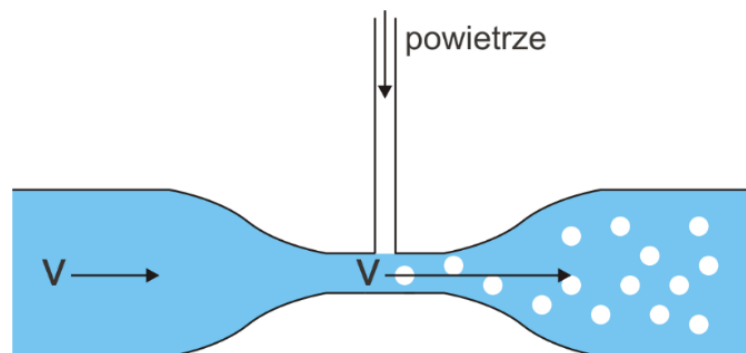
Równanie to nosi nazwę *równania Bernoulliego* dla przepływu ustalonego, nielepkiego i nieściśliwego. Jest to podstawowe równanie mechaniki płynów. Wyraża fakt, że z przepływem płynu związane jest (oprócz ciśnienia statycznego) *ciśnienie dynamiczne*  $\rho v^2 / 2$ .

Wynika z niego, że przepływ cieczy w strudze może być wywołany *różnicą ciśnień* na końcach strugi lub *różnicą poziomów* tych końców.



### Przykład

Zilustrujmy to prostym przykładem pompki wodnej stosowanej na przykład w akwarystyce. W tym urządzeniu woda z akwarium jest przepompowywana przez układ filtrów i odprowadzana z powrotem do akwarium. Po drodze woda jest przepuszczana przez przewężenie w rurce tak jak na rysunku 14.10. Prędkość wody w przewężeniu jest (zgodnie z równaniem ciągłości) większa niż w rurce. Zgodnie z równaniem Bernoulliego, w poziomej rurce ( $h = \text{const.}$ )  $p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const.}$ , więc gdy rośnie prędkość  $v$  i płyn jest nieściśliwy (stała gęstość), to  $p$  maleje i w przewężeniu ciśnienie jest mniejsze niż w pozostałej części rurki. Jeżeli to przewężenie jest dostatecznie małe to ciśnienie może być niższe od atmosferycznego, a to oznacza, że przez otwór w przewężeniu woda nie będzie uciekać tylko z zewnątrz będzie zasysane powietrze. W ten sposób woda będzie nie tylko filtrowana ale jeszcze dodatkowo napowietrzana.



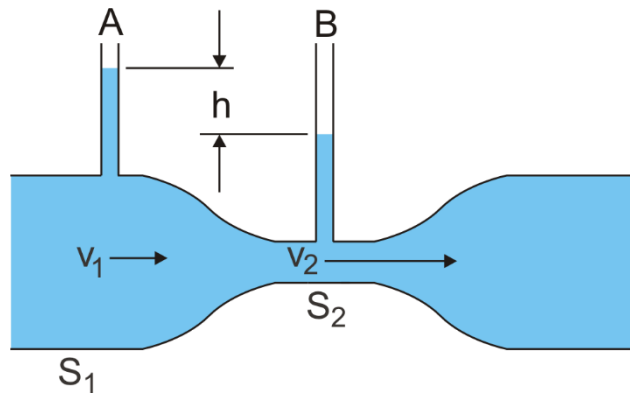
Rys. 14.10. Pompka wodna



### Ćwiczenie 14.2

Spróbuj samodzielnie wykonać bardzo proste doświadczenie. Weź dwie kartki papieru i trzymaj je ustawione równoległe do siebie w niewielkiej odległości (np. 1-2 cm). Następnie dmuchnij między kartki. Okazuje się, że kartki nie rozchylają się, a zbliżają do siebie, skleją się. Spróbuj wyjaśnić przyczynę tego zjawiska.

Równanie Bernoulliego może być wykorzystane do wyznaczenia prędkości płynu na podstawie pomiaru ciśnienia. Ponownie posługujemy się rurką z przewężeniem, do której przymocowano tak jak na rysunku 14.11, dwie pionowe rurki A i B służące do pomiaru ciśnienia.



Rys. 14.11. Pomiar prędkości płynu metodą Venturiego

Stosując równanie Bernoulliego dla punktów, w których prędkość płynu wynosi odpowiednio  $v_1$  i  $v_2$  (przewężenie) otrzymujemy

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \quad (14.24)$$

Ponieważ  $v_1 < v_2$  więc ciśnienie w przewężeniu jest mniejsze niż w rurce  $p_2 < p_1$ . Różnica ciśnień zgodnie z równaniem (14.24) wynosi

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2} \quad (14.25)$$

Z równania ciągłości wynika, że

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 \quad (14.26)$$

Podstawiając tę zależność do równania (14.25) otrzymujemy

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right) \quad (14.27)$$

Równocześnie tę samą różnicę ciśnień można wyznaczyć z różnicy poziomów płynu w rurkach A i B (rysunek 14.9)

$$p_1 - p_2 = \rho g h \quad (14.28)$$

Porównując powyższe dwa wzory możemy wyznaczyć prędkość  $v_1$  w rurce

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{S_1^2/S_2^2 - 1}} \quad (14.29)$$

Metoda pomiaru prędkości płynu oparta na wyznaczeniu różnicy wysokości płynu w dwóch pionowych rurekach nosi nazwę metody Venturiego.



### Ćwiczenie 14.3

W zbiorniku wody na głębokości  $h$  znajduje się otwór przez który wycieka woda. Oblicz prędkość  $v$  z jaką wycieka woda.

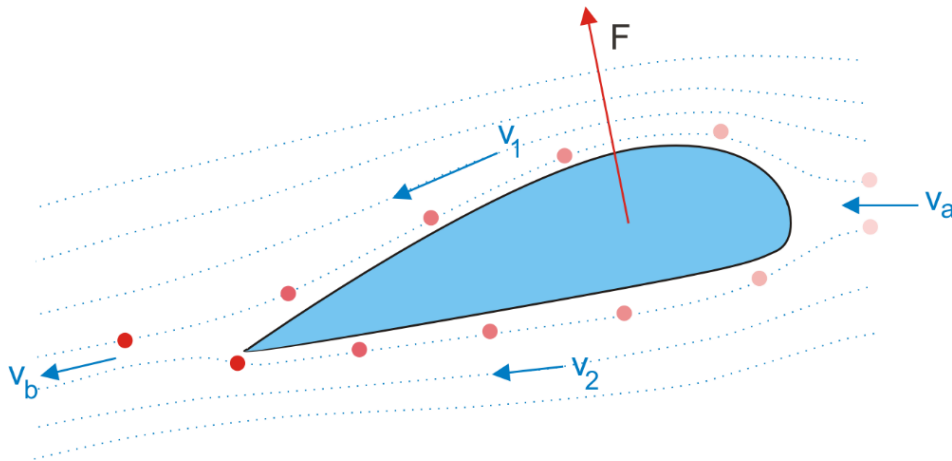
Wskazówka: Zastosuj równanie Bernoulliego dla punktu na powierzchni cieczy i punktu w otworze przez, który wycieka woda. Wyniki zapisz poniżej.

$v =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

## 14.6 Dynamiczna siła nośna

W odróżnieniu od *statycznej siły nośnej*  $\text{P}$ , którą jest siła wyporu działająca zgodnie z prawem Archimedesusa na przykład na balon czy statek, *dynamiczna siła nośna*  $\text{P}$  wywołana jest ruchem ciał w płynie, na przykład na skrzydła samolotu czy śmigła helikoptera. Na rysunku 14.12 poniżej pokazane są schematycznie linie prądu i ruch cząstek powietrza wokół skrzydła samolotu.




Rys. 14.12. Linie prądu wokół skrzydła samolotu

Samolot wybieramy jako układ odniesienia i rozpatrujemy ruch powietrza względem skrzydła.

Analizując linie prądu zauważymy, że ze względu na ustawienie skrzydła (tak zwany *kąt natarcia*  $\text{P}$ ) linie prądu nad skrzydłem są rozmieszczone gęściej niż pod skrzydłem co oznacza, że prędkość  $v_1$  powietrza ponad skrzydłem jest większa niż prędkość  $v_2$  pod

skrzydłem. Prowadzi to do wniosku, zgodnie z prawem Bernoulliego, że ciśnienie nad skrzydłem jest mniejsze od ciśnienia pod skrzydłem i że otrzymujemy wypadkową siłę nośną  $F$  skierowaną ku górze. Wniosek ten wynika wprost z trzeciej zasady dynamiki Newtona. Wektor prędkości  $v_a$  powietrza zbliżającego się do skrzydła jest poziomy podczas gdy powietrze za skrzydłem jest skierowane na ukos w dół (prędkość  $v_b$  ma składową pionową). Oznacza to, że skrzydło pchnęło powietrze w dół więc w reakcji powietrze pchnęło skrzydło do góry.

W naszych rozważaniach pominęliśmy siłę oporu powietrza tak zwaną siłę *oporu czołowego* . W warunkach rzeczywistych siła nośna jest wypadkową przedstawionej powyżej siły parcia wynikającej z asymetrycznej budowy skrzydła i siły oporu czołowego. Przy konstrukcji skrzydeł jak i śmigieł staramy się zminimalizować opór czołowy. Ta sama siła oporu czołowego wpływa znacząco na zużycie paliwa w samochodach. Dlatego tak wielką wagę konstruktorzy przywiązują do optymalizacji kształtu nadwozia samochodów. Ten rozdział kończy moduł czwarty; możesz teraz przejść do podsumowania i zadań testowych.

## Podsumowanie

- Prędkość fali można wyrazić jako  $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{k}$ , gdzie  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  oraz  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .
- Funkcja  $y = A \sin(kx - \omega t)$  opisująca sinusoidalną falę rozchodzącą się w kierunku  $x$  jest przykładem funkcji  $f(x-vt)$  będącej rozwiązaniem równania falowego  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ .
- Prędkość fali biegnącej w strunie wynosi  $v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ , gdzie  $F$  jest naprężeniem struny, a  $\mu$  masą na jednostkę długości.
- Szybkość przenoszenia energii przez fale jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy i kwadratu częstotliwości.
- Interferencja fali biegnącej wzdłuż struny z falą odbitą od końca struny daje falę, której amplituda zależy od położenia  $x$ ;  $A' = 2A \sin kx$ . Strzałki w położeniach  $x = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4, \dots$  mają maksymalną amplitudę, a węzły w położeniach  $x = \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, \dots$  mają zerową amplitudę.
- Przy nałożeniu się drgań harmonicznym o niewiele różniących się częstotliwościami powstaje drganie o wolno zmiennej w czasie amplitudzie zwane dudnieniem.
- Pozorna zmiana częstotliwości fali wysyłanej przez źródło z powodu względnego ruchu obserwatora lub źródła jest dla fal dźwiękowych dana zależnością  $f' = f \left( \frac{v \pm v_o}{v \mp v_z} \right)$ , gdzie  $v_o$  i  $v_z$  są odpowiednio prędkościami obserwatora i źródła, a  $v$  jest prędkością dźwięku. Znaki "górne" w liczniku i mianowniku odpowiadają zbliżaniu się źródła i obserwatora, a znaki "dolne" ich oddalaniu się. Równanie opisuje przypadek ruchu źródła i obserwatora wzdłuż łączącej ich prostej i jest słuszne gdy prędkości źródła i obserwatora są znacznie mniejsze od prędkości dźwięku.
- Ciśnienie wywierane przez siłę  $F$  na powierzchnię  $S$  wynosi  $p = \frac{F}{S}$ .
- Ciśnienie cieczy o stałej gęstości na głębokości  $h$  wynosi  $p = p_0 + \rho gh$ , gdzie  $p_0$  jest ciśnieniem na powierzchni cieczy ( $h = 0$ ).
- Ciśnienie zewnętrzne wywierane na zamknięty płyn jest przekazywane niezmiennie na każdą część płynu oraz na ścianki naczynia (prawo Pascala).
- Ciało w całości lub częściowo zanurzone w płynie jest wypierane ku górze siłą równą ciężarowi wypartego przez to ciało płynu (prawo Archimedesesa)  $F_{wyporu} = \rho g V$ , gdzie  $\rho$  jest gęstością płynu, a  $V$  objętością części zanurzonej ciała.
- Z równania ciągłości wynika, że prędkość płynu nieściśliwego przy ustalonym przepływie jest odwrotnie proporcjonalna do pola przekroju strugi  $Sv = \text{const}$ .
- Przepływ ustalony, nielepki i nieściśliwy jest opisany równaniem *Bernoulliego*  $p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = \text{const}$ . Z dynamicznym ciśnieniem  $\frac{1}{2}\rho v^2$  jest związana dynamiczna siła nośna wywołana ruchem ciał w płynie.

## Materiały dodatkowe do Modułu IV

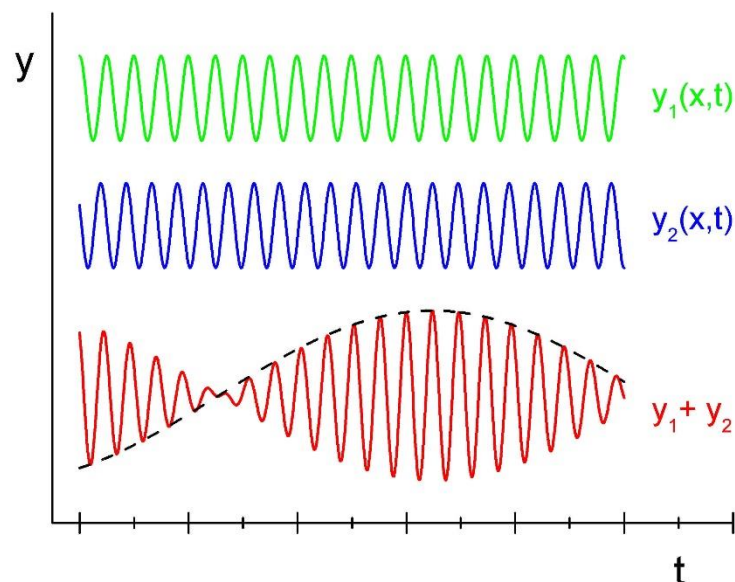
### Prędkość grupowa

Rozważmy, dwie poprzeczne fale sinusoidalne o zbliżonych częstotliwościach i długościach fal (rysunek poniżej) opisane równaniami

$$\begin{aligned} y_1 &= A \sin[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x] \\ y_2 &= A \sin[(\omega - d\omega)t - (k - dk)x] \end{aligned} \quad (\text{IV.1.1})$$

Sumą takich dwóch fal (rysunek) jest fala


$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos[(d\omega)t - (dk)x] \cos(\omega t - kx) \quad (\text{IV.1.2})$$



Dwie fale sinusoidalne  $y_1$  i  $y_2$  o zbliżonych częstotliwościach i długościach fal; obwiednia ich sumy (linia przerywana) rozchodzi się z prędkością grupową

Na rysunku widzimy, że fala sumaryczna  $y_1 + y_2$  jest modulowana, a z równania (IV.1.2) wynika, że funkcja modulująca ma postać

$$A(x, t) = 2A \cos[(d\omega)t - (dk)x] \quad (\text{IV.1.3})$$

Prędkość *paczki fal*  (prędkość ruchu obwiedni) wyznaczamy analizując jak przemieszcza się w czasie wybrany punkt obwiedni (na przykład maksimum). Odpowiada to warunkowi

$$(d\omega)t - (dk)x = \text{const.} \quad (\text{IV.1.4})$$

Różniczkując to równanie względem czasu

$$d\omega - dk \frac{dx}{dt} = 0 \quad (\text{IV.1.5})$$

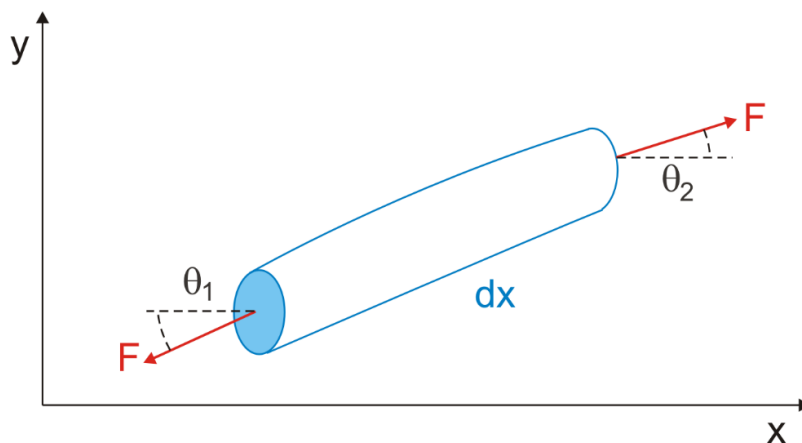
otrzymujemy wyrażenie na prędkość grupową

$$v_{gr} = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} \quad (\text{IV.1.6})$$

Prędkość grupowa jest na ogół różna od prędkości fal składowych.

### Prędkość fal w naprężonym sznurze (strunie)

Spróbujmy wyprowadzić wzór na zależność prędkości  $v$  fali od siły  $F$  naprężającej sznur i od  $\mu = m/l$  tj. masy przypadającej na jednostkę długości sznura. W tym celu rozpatrzmy mały wycinek sznura o długości  $dx$  pokazany na rysunku poniżej.



Element sznura o długości  $dx$

Końce wycinka sznura tworzą z osią  $x$  małe kąty  $\theta_1$  i  $\theta_2$ . Dla małych kątów  $\theta \approx \sin\theta \approx dy/dx$ . Wypadkowa pionowa siła tj. siła wychylająca sznur w kierunku  $y$  wynosi

$$F_{wyp} = F \sin \theta_2 - F \sin \theta_1 = F\theta_2 - F\theta_1 \quad (\text{IV.2.1})$$

Zgodnie z zasadą dynamiki siła wypadkowa jest równa iloczynowi masy wycinka  $dm = \mu dx$  i jego przyspieszenia. Stąd

$$F_{wyp} = F\theta_2 - F\theta_1 = (\mu dx) \frac{\partial v_y}{\partial t} = (\mu dx) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{IV.2.2})$$

lub



$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{IV.2.3})$$

Uwzględniając, że  $\theta = \partial y / \partial x$  otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{IV.2.4})$$

Jest to równanie falowe dla sznura (struny). Podstawmy teraz do tego równania odpowiednie pochodne równania fali harmoniczej  $y = f(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \sin(kx - \omega t) \quad (\text{IV.2.5})$$

oraz

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Ak^2 \sin(kx - \omega t) \quad (\text{IV.2.6})$$

W wyniku podstawienia otrzymujemy

$$k^2 = \frac{\mu}{F} \omega^2 \quad (\text{IV.2.7})$$

Stąd możemy już obliczyć prędkość fali

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (\text{IV.2.8})$$

W ten sposób pokazaliśmy również, że zaproponowana przez nas funkcja (13.8) jest rozwiązaniem równania falowego (IV.2.4) jeżeli spełniona jest zależność (IV.2.7). Zwróćmy ponadto uwagę, że fala harmoniczna jest przenoszona wzdłuż struny z prędkością niezależną od amplitudy i częstotliwości. Przepiszmy teraz równanie falowe z uwzględnieniem zależności (IV.2.8)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{IV.2.9})$$

Równanie falowe w tej postaci, stosuje się do wszystkich rodzajów rozchodzących się fal.

## Rozwiązania ćwiczeń z modułu IV

### Ćwiczenie 13.1

Dane: równanie harmoniczej fali poprzecznej  $y = 20 \sin(\pi x - 2t)$ ,  $x$  i  $y$  są wyrażone w centymetrach, a  $t$  w sekundach.

Porównując to równanie z ogólnym równaniem dla harmoniczej fali poprzecznej  $y = A \sin(kx - \omega t)$  bezpośrednio możemy określić, że: amplituda  $A = 20$  cm, częstość  $\omega = 2$  rad/s, a liczba falowa  $k = \pi$  cm<sup>-1</sup>.

Korzystając z tych informacji obliczamy kolejno:

$$\text{długość fali } \lambda = \frac{2\pi}{k} = 2 \text{ cm, okres drgań } T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \text{ s,}$$

$$\text{prędkość rozchodzenia się fali } v = \frac{\lambda}{T} = 0.318 \text{ cm/s.}$$

Prędkość drgań poprzecznych obliczamy z zależności  $v_y = \frac{dy}{dt} = -A\omega \cos(kx - \omega t)$ .

Maksymalna wartość prędkości poprzecznej wynosi  $v_{y\max} = A\omega = 40$  cm/s.

Przyspieszenie cząstek w ruchu drgającym obliczamy z zależności

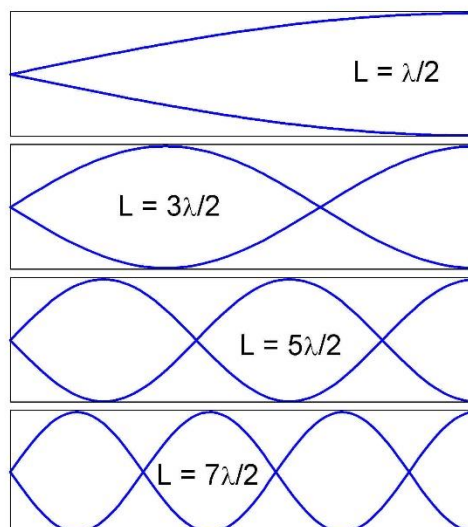
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -A\omega^2 \sin(kx - \omega t).$$

Maksymalna wartość przyspieszenia wynosi  $a_{y\max} = A\omega^2 = 80$  cm/s<sup>2</sup>.

### Ćwiczenie 13.2

Dane:  $L$  długość piszczałki.

Na rysunku poniżej pokazane są: drganie podstawowe i trzy pierwsze drgania harmoniczne jakie powstają w piszczałce zamkniętej. Jedyńm warunkiem, jaki musi być spełniony, jest istnienie strzałki na otwartym końcu piszczałki i węzła na jej końcu zamkniętym.



Na podstawie pokazanych na rysunku czterech drgań możemy napisać ogólny związek na długość fali powstającej w piszczałce zamkniętej

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}$$

gdzie  $n = 1, 2, 3, \dots$

### Ćwiczenie 13.3

Dane: prędkość dźwięku  $v = 340$  m/s, względna zmiana częstotliwości przy mijaniu wynosi 15%.

Podczas zbliżania się samochodu rejestrujemy dźwięk o częstotliwości  $f_1 = f \frac{v}{v - v_z}$ ,

a podczas jego oddalania się o częstotliwości  $f_2 = f \frac{v}{v + v_z}$ , gdzie  $v$  jest prędkością dźwięku, a  $v_z$  prędkością źródła czyli samochodu.

Względna zmiana częstotliwości wynosi 15% więc  $\frac{f_1 - f_2}{f_1} = 0.15$ .

Podstawiając do tego równania podane zależności na  $f_1$  i  $f_2$ , a następnie przekształcając je otrzymujemy

$$\frac{2v_z}{v + v_z} = 0.15$$

Obliczona z tego równania wartość prędkości źródła dźwięku (samochodu) wynosi  $v_z = 27.57$  m/s = 99 km/h

### Ćwiczenie 14.1

Dane:  $n = 10$  kłód drewnianych o średnicy  $d = 20$  cm i długości  $l = 3$  m każda. Gęstość drewna  $\rho_d = 750$  kg/m<sup>3</sup>, gęstość wody  $\rho_w = 1000$  kg/m<sup>3</sup>, przyspieszenie grawitacyjne  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

Siła wyporu działająca na tratwę ma zrównoważyć ciężar tratwy z ładunkiem

$$F_{\text{wyporu}} = Q_{\text{tratwy}} + Q_{\text{ładunku}}$$

Stąd

$$\begin{aligned} Q_{\text{ładunku}} &= F_{\text{wyporu}} - Q_{\text{tratwy}} = \rho_w Vg - \rho_d Vg = \\ &= Vg(\rho_w - \rho_d) = n\pi r^2 l g (\rho_w - \rho_d) \end{aligned}$$

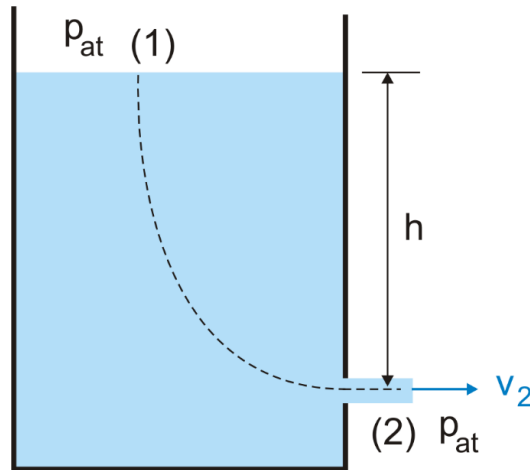
gdzie uwzględniono maksymalną siłę wyporu (gdy tratwa jest cała zanurzona w wodzie).

Po podstawieniu danych otrzymujemy  $Q_{\text{ładunku}} = 2356$  N.

**Ćwiczenie 14.3**

Dane:  $h$ , przyspieszenie grawitacyjne  $g$ .

Na rysunku poniżej pokazana jest linia prądu łącząca dowolny punkt na powierzchni cieczy z otworem, przez który wypływa woda.



Stosujemy równanie Bernoulliego dla punktów (1) i (2) otrzymujemy

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2$$

Ponieważ  $p_1 = p_2 = p_{at}$  i ponadto  $h_1 - h_2 = h$  więc

$$\rho g h = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

skąd

$$v_2 = \sqrt{2gh + v_1^2}$$

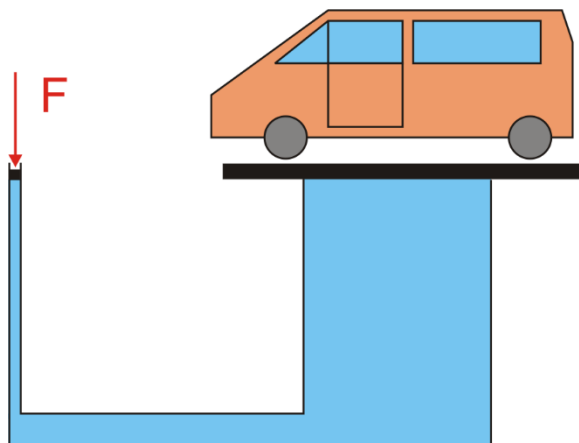
Jeżeli poziom wody w zbiorniku opada wolno możemy przyjąć  $v_1 = 0$ . Wówczas

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Woda wypływa przez otwór z prędkością jaką uzyskalaby spadając swobodnie z wysokości  $h$ .

## Test IV

1. Fala akustyczna o częstotliwości 1000 Hz rozchodzi się z prędkością 330 m/s. O ile są oddalone od siebie punkty, które mają przeciwne fazy? O ile zmienia się faza w danym punkcie przestrzeni w czasie  $t = 2.5 \cdot 10^{-4}$  s ?
2. Napisz równanie fali rozchodzącej się w ujemnym kierunku osi  $x$ , której amplituda wynosi 1 mm, częstotliwości 660 Hz, a prędkość rozchodzenia się 330 m/s.
3. Jaka jest amplituda fali wypadkowej powstałej w wyniku nałożenia się dwóch fal harmonicznnych o takiej samej częstotliwości i amplitudach równych odpowiednio 1 cm i 2 cm jeżeli oscylacje różnią się w fazie o  $\pi/2$ . Fale rozchodzą się w jednym kierunku.
4. Jakie musi być naprężenie struny o długości 50 cm i masie 50 g, żeby dawała ona ton podstawowy o częstotliwości 1000 Hz?
5. Źródło dźwięku o częstotliwości 500 Hz oddala się od obserwatora w stronę pionowej ściany, z prędkością 5 m/s. Oblicz częstotliwość dźwięku odbieranego przez obserwatora bezpośrednio ze źródła i dźwięku odbitego od ściany. Czy obserwator słyszy dudnienia? Prędkość dźwięku w powietrzu wynosi 330 m/s.
6. Podnośnik hydrauliczny składa się z dwóch tłoków połączonych ze sobą tak jak na rysunku poniżej. Duży tłok ma średnicę 1 m, a mały 0.01 m. Jaką siłę trzeba przyłożyć do mniejszego tłoka, żeby podnieść samochód o masie  $m = 1000$  kg?



7. Balon o masie 360 kg i objętości  $600 \text{ m}^3$  jest przymocowany do ziemi za pomocą pionowej liny. Oblicz jaka jest siła napinająca linę? Gęstość powietrza  $\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$ .
8. Siła nośna wywierana na skrzydło samolotu wynosi 10 N na każdy  $\text{cm}^2$  skrzydła. Jaka jest prędkość przepływu powietrza ponad skrzydłem jeżeli pod skrzydłem przepływa ono z prędkością 200 m/s?

# MODUŁ V

## 15 Kinetyczna teoria gazów i termodynamika I

*Termodynamika* zajmuje się właściwościami cieplnymi układów makroskopowych, zaniebując w odróżnieniu od mechaniki statystycznej mikroskopową budowę ciał tworzących układ. Gdybyśmy chcieli ściśle określić stan fizyczny układu zawierającego ogromną liczbę cząsteczek, na przykład porcji gazu, to musielibyśmy znać stan każdej cząsteczki oddzielnie to znaczy musielibyśmy podać położenie każdej cząsteczki, jej prędkość oraz siły nań działające. Takie obliczenia ze względu na dużą liczbę cząsteczek są niemożliwe. Okazuje się jednak, że posługując się metodami statystycznymi (rachunkiem prawdopodobieństwa) możemy znaleźć związki między wielkościami mikroskopowymi (dotyczącymi poszczególnych cząsteczek), a wielkościami makroskopowymi opisującymi cały układ. Chcąc opisać gaz jako całość możemy więc badać jedynie wielkości makroskopowe takie jak ciśnienie, temperatura czy objętość bez wdawania się w zachowanie poszczególnych cząsteczek.

### 15.1 Ciśnienie gazu doskonałego

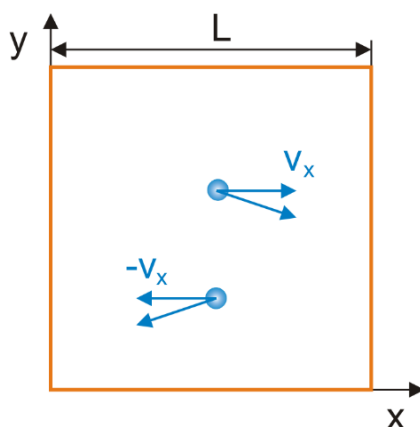
Rozpocznijmy nasze rozważania od definicji *gazu doskonałego*. Zrobimy to podając następujące założenia dotyczące cząsteczek gazów:



#### Definicja

*Cząsteczki gazu doskonałego traktujemy jako punkty materialne (objętość cząsteczek gazu jest o wiele mniejsza niż objętość zajmowana przez gaz i dlatego z dobrym przybliżeniem przyjmujemy, że ich objętość jest równa zero). W gazie doskonałym zderzenia z innymi cząsteczkami oraz ze ściankami naczynia są sprężyste i dlatego całkowita energia cząsteczek jest równa ich energii kinetycznej; energia potencjalna jest stale równa zero (nie ma przyciągania ani odpychania pomiędzy cząsteczkami).*

Wyprowadzimy teraz prawo gazów doskonałych. Cząsteczki gazu będziemy traktować jako  $N$  małych, twardych kulek, każda o masie  $m$  zamkniętych w sześciennym pudełku o objętości  $V$ . Kulki są twarde to znaczy będą zderzały się sprężysto ze ściankami naczynia, a to oznacza, że ich energia kinetyczna będzie stała. Na początek rozważmy jedną cząsteczkę, która zderza się ze ścianką naczynia (rysunek 15.1).



Rys. 15.1. Cząsteczka gazu odbija się sprężysto od ścianki naczynia

Siła jaką cząsteczka wywiera na ściankę w czasie  $\Delta t$  wynosi zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona

$$F_1 = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} \quad (15.1)$$

Zmiana składowej  $x$  pędu cząsteczki spowodowana zderzeniem wynosi

$$\Delta p_x = mv_x - (-mv_x) = 2mv_x \quad (15.2)$$

Cząsteczka po odbiciu dociera do ścianki przeciwnej i powraca. Jeżeli po drodze nie zderza się z innymi cząsteczkami to czas pomiędzy kolejnymi zderzeniami z wybraną ścianką jest równy czasowi przelotu przez cały sześciąt i z powrotem

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x} \quad (15.3)$$

gdzie  $L$  jest odległością między ściankami. Stąd siła wywierana na ściankę (przez jedną cząsteczkę) wynosi

$$F_1 = \frac{(2mv_x)}{\frac{2L}{v_x}} = \frac{mv_x^2}{L} \quad (15.4)$$

Dla  $N$  cząstek całkowita siła wynosi

$$F = N \frac{\overline{mv_x^2}}{L} \quad (15.5)$$

gdzie  $\overline{v_x^2}$  jest to  $v_x^2$  uśrednione po wszystkich cząsteczkach. Dzieląc obie strony równania przez pole powierzchni ścianki  $S = L^2$  otrzymujemy ciśnienie

$$p = N \frac{\overline{mv_x^2}}{SL} = N \frac{\overline{mv_x^2}}{V} \quad (15.6)$$

lub zależność

$$pV = Nm\overline{v_x^2} \quad (15.7)$$

Jak widać iloczyn  $pV$  jest stały tak długo jak długo jest stała energia kinetyczna cząstek.

*Prędkość średnią kwadratową*  $\overline{v}$  cząsteczki możemy zapisać jako

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \quad (15.8)$$



Zauważmy ponadto, że cząsteczki gazu wykonują ruch chaotyczny więc poruszają się we wszystkich kierunkach, a żaden nie jest wyróżniony. Dlatego zachodzi równość


$$\begin{aligned} \overline{v_x^2} &= \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} \\ \overline{v^2} &= 3\overline{v_x^2} \quad \text{czyli} \quad \overline{v_x^2} = \frac{\overline{v^2}}{3} \end{aligned} \quad (15.9)$$

Podstawiamy to wyrażenie do równania (15.7) i otrzymujemy

$$pV = Nm \frac{\overline{v^2}}{3} \quad (15.10)$$

Ponieważ iloczyn  $Nm$  jest równy masie gazu  $M$ , to korzystając z wyrażenia na gęstość  $\rho = M/V$  można przepisać powyższe równanie w postaci

$$p = \rho \frac{\overline{v^2}}{3} \quad (15.11)$$

Z równania (15.11) możemy wyznaczyć tzw. **prędkością średnią kwadratową** , która jest pierwiastkiem kwadratowym z  $\overline{v^2}$

$$v_{\text{śr.kw.}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} \quad (15.12)$$

Powyższe równania (15.11) i (15.12) są przykładem związku o jakim mówiliśmy we wstępie. Opisują one relację pomiędzy wielkością makroskopową jaką jest ciśnienie gazu i kwadratem prędkości cząstek gazu to jest wielkością mikroskopową.



### Ćwiczenie 15.1

Prędkość średnia kwadratowa jest pewnego rodzaju miarą przeciętnej prędkości cząsteczek. Spróbuj obliczyć jej wartość dla powietrza w temperaturze  $0^\circ \text{C}$  przy ciśnieniu 1 atm. Gęstość powietrza w tych warunkach wynosi  $1.3 \text{ kg/m}^3$ . Porównaj ten wynik z prędkością rozchodzenia się fal dźwiękowych w powietrzu równą 340 m/s. Czy obliczona prędkość jest tego samego rzędu wielkości?

Wyniki zapisz poniżej.

$v_{\text{śr.kw.}} =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

## 15.2 Temperatura, równanie stanu gazu doskonałego

### 15.2.1 Zerowa zasada termodynamiki

Potocznie temperaturę rozumiemy jako miarę ciepłoty układu. Za pomocą dotyku, możemy np. stwierdzić, które z dwóch ciał jest cieplejsze. Mówimy o nim, że ma wyższą temperaturę. Możemy również stwierdzić, że gdy dwa ciała o różnych temperaturach zetkniemy ze sobą (i odizolujemy od innych) to po dostatecznie długim czasie ich temperatury wyrównają się. Mówimy wtedy, że te ciała są w równowadze termicznej ze sobą. Formułujemy teraz postulat nazywany *zerową zasadą termodynamiki*.



#### Prawo, zasada, twierdzenie

*Jeżeli ciała 1 i 3 są w równowadze termicznej, a także ciała 2 i 3 są w równowadze termicznej to ciała 1 i 2 są w tej samej równowadze termicznej.*

Jako kryterium równowagi cieplnej między ciałami wprowadzamy pojęcie *temperatury*. Umawiamy się, że układom fizycznym, które mogą być jednocześnie ze sobą w stanie równowagi cieplnej, przypisujemy tę samą temperaturę.

### 15.2.2 Kinetyczna interpretacja temperatury

Teraz gdy zapoznaliśmy się z pojęciem temperatury poznamy jej definicję na gruncie teorii kinetycznej, czyli przy podejściu mikroskopowym.



#### Definicja

*Temperaturę bezwzględną definiujemy jako wielkość wprost proporcjonalną do średniej energii kinetycznej cząsteczek.*

$$T = \left( \frac{2}{3k} \right) \frac{\overline{mv^2}}{2} \quad (15.13)$$

Czynnik  $(2/3k)$  jest współczynnikiem proporcjonalności. Wartość stałej  $k$ , zwanej stałą Boltzmana, wynosi  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  J/K. Z tej definicji wynika, że średnie energie kinetyczne ruchu postępowego (na cząsteczkę) dla dwu kontaktujących się gazów są równe.

### 15.2.3 Równanie stanu gazu doskonałego

Jeżeli obliczymy  $\overline{v^2}$  z zależności (15.13) i podstawimy do równania (15.10) to otrzymamy *równanie stanu gazu doskonałego* w postaci

$$pV = NkT \quad (15.14)$$

Ponieważ przy opisie własności gazów wygodnie jest posługiwać się liczbą moli  $n$  to równanie stanu gazu często przedstawia się w postaci

$$pV = nRT \quad (15.15)$$

gdzie stała  $R = 8.314 \cdot \text{J/mol K}$  jest uniwersalną stałą gazową związaną ze stałą Boltzmana i liczbą Avogadra  $N_{Av}$  relacją  $R = kN_{Av}$ . Stała Avogadra  $N_{Av} = 6.023 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$ , określa liczbę cząsteczek w jednym molu. Przypomnijmy, że mol jest ilością materii układu zawierającego liczbę cząsteczek równą liczbie atomów zawartych w 0.012 kg węgla  $^{12}\text{C}$  (równą  $N_{Av}$ ).

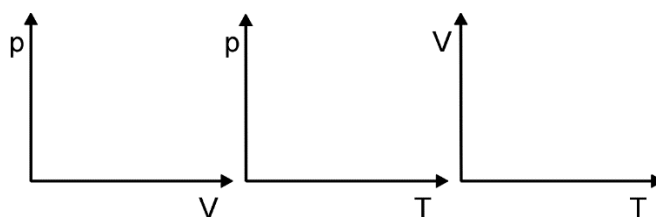
Równanie stanu gazu doskonałego zostało sformułowane w XIX w. przez Clapeyrona na podstawie trzech praw empirycznych odkrytych wcześniej przez innych badaczy:

- Prawo Boyle'a-Mariotte'a stwierdza, że w stałej temperaturze iloczyn ciśnienia i objętości danej masy gazu jest stały  $pV = \text{const.}$ ;
- Prawo Charlesa mówi, że przy stałej objętości gazu stosunek ciśnienia i temperatury danej masy gazu jest stały  $p/T = \text{const.}$ ;
- Prawo Gay-Lussaca stwierdza, że dla stałego ciśnienia stosunek objętości do temperatury danej masy gazu jest stały  $V/T = \text{const.}$



### Ćwiczenie 15.2

Spróbuj przedstawić graficznie te trzy zależności wykreślając je w różnych układach współrzędnych zamieszczonych poniżej.



Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Clapeyron podsumował te wyniki podając zależność

$$\frac{pV}{T} = \text{const.} \quad (15.16)$$

zgodną z równaniem stanu gazu doskonałego (15.15).

#### 15.2.4 Pomiar temperatury, skale temperatur

Żeby wyznaczyć temperaturę na podstawie definicji (15.13) musielibyśmy wyznaczyć energię kinetyczną cząsteczek gazu co jest bardzo trudne. Ale możemy się posłużyć równaniem stanu gazu doskonałego (15.15). Łatwo bowiem jest zmierzyć iloczyn  $pV$  na przykład dla gazu pod stałym ciśnieniem lub przy stałej objętości. Termometr gazowy służył przez wiele lat jako wzorzec temperatury. Za jego pomocą określono doświadczalnie punkty odniesienia, takie jak na przykład punkt wrzenia wody, dla praktycznych pomiarów temperatur. W praktyce w powszechnym użyciu jest *skala Celsjusza* . W tej skali temperatura równowagi wody i lodu wynosi  $0^\circ \text{C}$ , a temperatura równowagi wody i pary wodnej wynosi  $100^\circ \text{C}$ . Natomiast w fizyce stosujemy *bezwzględną termodynamiczną skalę temperatur* nazywaną *skalą Kelvina* .

**Jednostki**

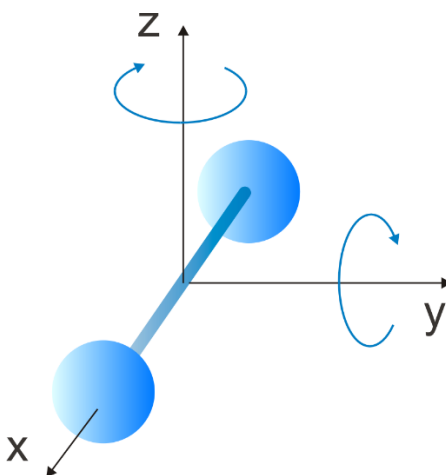
Jednostką temperatury bezwzględnej jest *kelwin* (K). Ponieważ w obu skalach Kelvina i Celsjusza różnica pomiędzy temperaturą zamarzania i wrzenia wody wynosi 100 stopni więc wielkość stopnia jest taka sama w obu skalach.

Między temperaturą w skali Celsjusza  $t_C$  a temperaturą w skali bezwzględnej  $T$  zachodzi związek

$$t_C = T - 273.15 \quad (15.17)$$

**15.3 Ekwipartycja energii**

Wiemy już na podstawie równania (15.13), że w równowadze termodynamicznej średnie energie kinetyczne ruchu postępowego wszystkich cząsteczek są równe. Powstaje pytanie czy cząsteczka może *gromadzić energię w innej postaci* niż energia ruchu postępowego? Odpowiedź jest twierdząca: jeżeli tylko cząsteczka nie ma kształtu kulki (cząsteczka jednoatomowa), a ma pewną strukturę wewnętrzną to może wirować i drgać. Przykładowo, dwuatomowa cząsteczka w kształcie hantli (rysunek 15.2) będzie się obracać po zderzeniu z inną cząsteczką.




Rys. 15.2. Dwuatomowa cząstka w kształcie hantli o dwóch rotacyjnych stopniach swobody

Na podstawie mechaniki statystycznej można pokazać, że gdy liczba punktów materialnych jest bardzo duża i obowiązuje mechanika Newtonowska to:

**Prawo, zasada, twierdzenie**

*Dostępna energia rozkłada się w równych porcjach na wszystkie niezależne sposoby, w jakie cząsteczka może ją absorbować.*

Twierdzenie to nosi nazwę zasady *ekwipartycji energii*.

Każdy z tych sposobów absorpcji energii nazywa się *stopniem swobody*  i jest równy liczbie niezależnych współrzędnych potrzebnych do określenia położenia ciała w przestrzeni. Możemy więc zasadę ekwipartycji energii wyrazić innymi słowami:

**Prawo, zasada, twierdzenie**

*Średnia energia kinetyczna na każdy stopień swobody jest taka sama dla wszystkich cząsteczek.*

Na podstawie równania (15.13) średnia energia kinetyczna ruchu postępowego cząsteczki wynosi

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT \quad (15.18)$$

Odpowiada to trzem stopniom swobody ponieważ potrzebujemy trzech współrzędnych ( $x, y, z$ ) do określenia położenia środka masy cząsteczki. Stąd średnia energia przypadająca na jeden stopień swobody wynosi  $\frac{1}{2} kT$  na cząsteczkę.

Dla cząsteczek obracających się potrzeba dodatkowych współrzędnych do opisanie ich obrotu więc mamy dodatkowe stopnie swobody. O ile dla  $N$  cząsteczek nie obracających się całkowita energia wewnętrzna  $U$  jest energią kinetyczną ruchu postępowego

$$U = \frac{3}{2} NkT \quad (15.19)$$

to dla cząstek wieloatomowych, które mogą obracać się swobodnie we wszystkich trzech kierunkach (wokół osi  $x, y, z$ )

$$U = E_{k,post.} + E_{k,obr.} = \frac{3}{2} NkT + \frac{3}{2} NkT = 3NkT \quad (15.20)$$

Natomiast dla cząstki dwuatomowej (hantli pokazanej na rysunku 15.2)

$$U = E_{k,post.} + E_{k,obr.} = \frac{3}{2} NkT + \frac{2}{2} NkT = \frac{5}{2} NkT \quad (15.21)$$

W tym przypadku mamy tylko dwa rotacyjne stopnie swobody bo moment bezwładności względem osi hantli (oś  $x$ ) jest znikomo mały.

Zwróćmy uwagę, że mówimy tu o energii "ukrytej" (wewnętrznej) cząstek, a nie o energii makroskopowej (związanej z przemieszczaniem masy). O energii wewnętrznej mówiliśmy przy zasadzie zachowania energii (energia indywidualnych cząstek nie zawarta w energii kinetycznej czy potencjalnej ciała jako całości). Energię wewnętrzną oznacza się zazwyczaj przez  $U$  i takie oznaczenie będziemy dalej stosować.

### 15.4 Pierwsza zasada termodynamiki

W mechanice rozważaliśmy zmiany energii mechanicznej układu będące wynikiem pracy wykonanej przez siły zewnętrzne. W przemianach termodynamicznych możliwy jest inny (nie mechaniczny) sposób przekazywania energii. Gdy dwa układy o różnych

temperaturach zetknemy ze sobą to ciepło  $Q$  przepływa z ciała cieplejszego do chłodniejszego.

Zgodnie z zasadą zachowania energii



**Prawo, zasada, twierdzenie**

*Ciepło pobrane przez układ jest równe wzrostowi energii wewnętrznej układu plus pracy wykonanej przez układ nad otoczeniem zewnętrznym.*

czyli

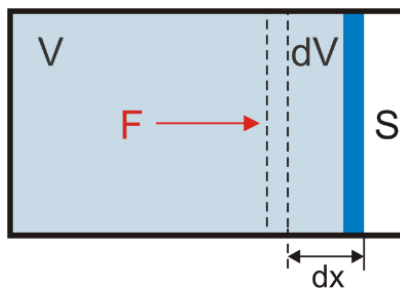
$$\begin{aligned} Q &= \Delta U + W \\ \Delta U &= Q - W \end{aligned} \quad (15.22)$$

To jest sformułowanie *pierwszej zasady termodynamiki*. W tym zapisie mamy rozdzieloną energię ciała na część makroskopową (energię mechaniczną) i mikroskopową (energię wewnętrzną). Zasada ta działa również w "drugą stronę" to znaczy, gdy nad układem zostanie wykonana praca to układ może oddawać ciepło. To równanie często piszemy w postaci różniczkowej

$$dU = dQ - dW \quad (15.23)$$

Widzimy, że zmiana energii wewnętrznej związana jest z ciepłem pobieranym ( $dQ > 0$ ) lub oddawanym ( $dQ < 0$ ) przez układ oraz z pracą wykonaną przez układ ( $dW > 0$ ) lub nad układem ( $dW < 0$ ).

Rozpatrzmy teraz gaz działający siłą  $F$  na tłok o powierzchni  $S$ , jak na rysunku 15.3



Rys. 15.3. Gaz wykonuje pracę przesuując tłok na odcinku  $dx$

Praca wykonana przez gaz wynosi

$$dW = F dx = \frac{F}{S} S dx = p dV \quad (15.24)$$

i wtedy

$$dU = dQ - p dV \quad (15.25)$$

Pamiętamy, że w mechanice praca sił zachowawczych wykonana nad punktem materialnym poruszającym się między dwoma punktami zależała tylko od tych punktów, a nie od łączącej je drogi. W termodynamice stwierdzamy, że


**Prawo, zasada, twierdzenie**

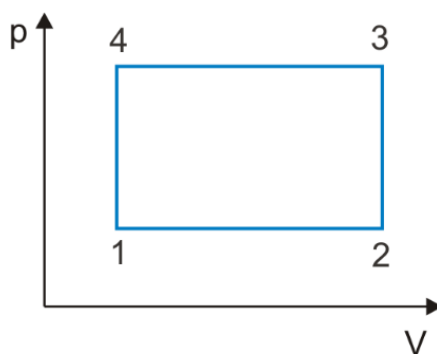
Zmiana energii wewnętrznej układu, przy przejściu pomiędzy dwoma stanami, zależy wyłącznie od tego jaki jest stan początkowy i końcowy przejścia.

Oznacza to, że chociaż  $dQ$  i  $dW$  z osobna zależą od drogi przejścia to  $dU$  ma określoną wartość niezależną od sposobu przejścia układu do stanu końcowego. Taką wielkość fizyczną (funkcją tego typu), która charakteryzuje stan układu, i której wartości nie zależą od sposobu w jaki układ został do danego stanu doprowadzony nazywamy *funkcją stanu*  $\mathcal{P}$ .


**Ćwiczenie 15.3**

Teraz korzystając z pierwszej zasady termodynamiki określ jaki znak mają zmiana energii wewnętrznej  $\Delta U$  oraz praca  $W$  dla cyklu przemian  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$  pokazanych na rysunku poniżej (wykres  $p(V)$ ). Wyniki zapisz w zamieszczonej tabeli. Zauważ, że obliczanie pracy  $W = p\Delta V$  sprowadza się do obliczenia pola pod wykresem  $p(V)$ .

Przemiana	znak (+/0/-)	
	$W$	$\Delta U$
1→2		
2→3		
3→4		
4→1		
1→2→3→4→1		



Przyjmując wartości  $V_1 = V_4 = 1 \text{ dm}^3$ ,  $V_2 = V_3 = 2 \text{ dm}^3$ ,  $p_1 = p_2 = 1 \text{ atm}$ . oraz  $p_3 = p_4 = 1.01 \text{ atm}$ . Oblicz pracę wykonaną w cyklu zamkniętym  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ .

$W =$



Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

## 15.5 Ciepło właściwe



### Definicja

Ciepło właściwe substancji definiujemy jako  $dQ/dT$  czyli ilość ciepła, którą trzeba dostarczyć do jednostki masy, żeby spowodować jednostkową zmianę jej temperatury.

Gdy masę wyrażamy w kilogramach to mówimy o *cieple właściwym wagowym* , a gdy wyrażamy ją w molach to mamy do czynienia z *molowym ciepłem właściwym* .

### 15.5.1 Ciepło właściwe przy stałej objętości

Ciepło właściwe jednego mola gazu utrzymywanego w stałej objętości oznaczamy  $c_v$ . Ponieważ  $dV = 0$  więc zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki  $dU = dQ$ , a stąd

$$c_v = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU}{dT} \quad (15.26)$$

Dla gazu jednoatomowego (dla jednego mola) mamy na podstawie równania (15.19)

$$U = \frac{3}{2} N_{Av} kT = \frac{3}{2} RT. \text{ Zatem}$$

$$c_v = \frac{3}{2} R \quad (15.27)$$

Dla jednego mola gazu dwuatomowego na podstawie równania (15.21)

$$c_v = \frac{5}{2} R \quad (15.28)$$

a dla jednego mola cząsteczek wieloatomowych z równania (15.20)

$$c_v = 3R \quad (15.29)$$

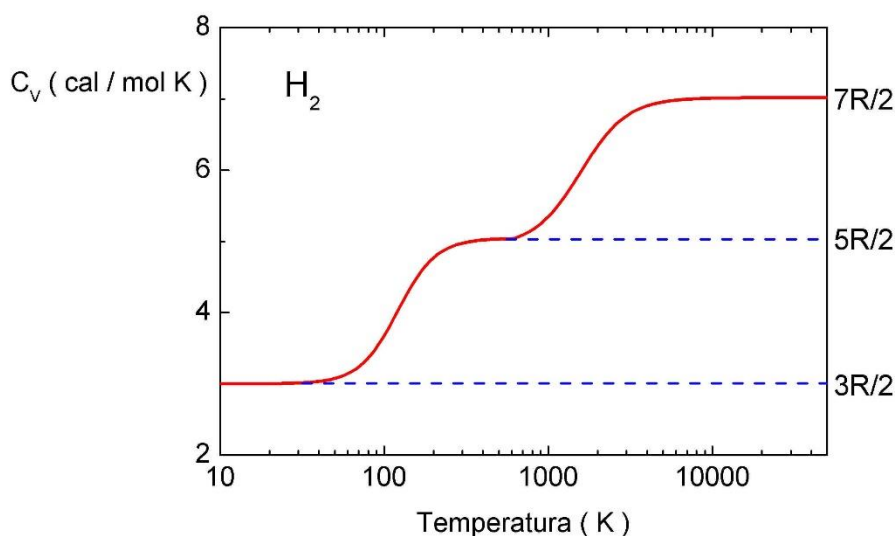
Jak wynika z powyższych obliczeń mechanika klasyczna przewiduje ciepło właściwe *niezależne od temperatury*. Tymczasem badania pokazują, że jest to prawdziwe tylko dla gazów jednoatomowych. Dla pozostałych  $c_v$  rośnie z temperaturą.

Przykład takiej zależności jest pokazany na rysunku 15.4 gdzie przedstawiono ciepło właściwe  $c_v$  dla wodoru (cząsteczka dwuatomowa  $H_2$ ) w funkcji temperatury (w skali logarytmicznej).

Zauważmy, że w temperaturach niższych od 100 K,  $c_v = \frac{3}{2} R$  co wskazuje, że w tak niskich temperaturach cząsteczka porusza się tylko ruchem postępowym i nie wiruje. Rotacja staje się możliwa dopiero w temperaturach powyżej 100 K; i dopiero wtedy  $c_v = \frac{5}{2} R$ .



Ponadto, w temperaturach powyżej 2000 K ciepło właściwe  $c_v$  rośnie do wartości  $c_v = \frac{7}{2}R$  co oznacza, że przybyły jeszcze dwa stopnie swobody



Rys. 15.4. Zależność molowego ciepła właściwego wodoru od temperatury

Ten wynik doświadczalny wiążemy z drganiami atomów w cząsteczkach. W tak wysokich temperaturach cząsteczka przestaje się zachowywać jak ciało sztywne i zderzenia między cząsteczkami powodują, że dwa atomy wodoru (w cząsteczce) będą drgały.

Wy tłumaczenie tych zjawisk nie jest możliwe na gruncie mechaniki klasycznej. Dopiero mechanika kwantowa daje wyjaśnienie tych zmian ciepła właściwego. Na jej gruncie można pokazać, że do wzbudzenia rotacji potrzeba pewnej minimalnej energii. Podobnie jest dla ruchu drgającego, który może być wywołany dopiero dla dostatecznie wysokiej energii.



Więcej o rotacyjnych i wibracyjnych stopniach swobody cząsteczki wodoru możesz dowiedzieć się w *Dodatku 1*, na końcu modułu V.

Zatem w wysokich temperaturach oprócz energii kinetycznej ruchu postępowego i obrotowego istnieje jeszcze energia kinetyczna i potencjalna drgań. Wobec tego średnia energia wewnętrzna na cząsteczkę wodoru wynosi

$$U = E_{k.post.} + E_{k.obr.} + E_{k.drg.} + E_{pot.drg.} = \frac{3}{2}kT + \frac{2}{2}kT + \frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT = \frac{7}{2}kT \quad (15.30)$$

a dla 1 mola

$$U = \frac{7}{2}RT \quad (15.31)$$

Stąd otrzymujemy molowe ciepło właściwe przy stałej objętości

$$c_v = \frac{7}{2}R \quad (15.32)$$

### 15.5.2 Ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu

Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki

$$dQ = dU + p dV \quad (15.33)$$

a na podstawie równania (15.26)  $dU = c_v dT$  więc

$$dQ = c_v dT + p dV \quad (15.34)$$

Z równania stanu gazu doskonałego (15.15) wynika, że dla jednego mola gazu  $p dV = R dT$  więc

$$dQ = c_v dT + R dT \quad (15.35)$$

Dzieląc stronami przez  $dT$  otrzymujemy

$$\frac{dQ}{dT} = c_v + R \quad (15.36)$$

a to z definicji jest równe ciepłu właściwemu przy stałym ciśnieniu  $c_p$ , więc

$$c_p = c_v + R \quad (15.37)$$

Widzimy, że ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu jest większe od ciepła właściwego przy stałej objętości  $c_p > c_v$ . Dzieje się tak dlatego, że w przemianie izobarycznej trzeba dostarczać ciepła nie tylko na zmianę energii wewnętrznej, związaną ze zmianą temperatury, ale i na wykonanie pracy związanej ze zmianą objętości podczas gdy w przemianie izochorycznej praca jest równa zero.



#### Ćwiczenie 15.4

Korzystając z powyższej zależności (15.37) i pamiętając, że średnia energia przypadająca na jeden stopień swobody wynosi  $\frac{1}{2}RT$  dla jednego mola, spróbuj uzupełnić poniższą tabelę i wpisać teoretyczne wartości molowego ciepła właściwego różnych rodzajów gazów doskonałych.

Typ gazu	$c_p$	$c_v$	$c_p/c_v$
Jednoatomowy			
Dwuatomowy + rotacja			
Dwuatomowy + rotacja + drgania			
Wieloatomowy + rotacja			
Wieloatomowy + rotacja + drgania			

## 15.6 Rozprężanie izotermiczne i adiabatyczne

Rozprężanie się gazu zamkniętego w cylindrze z ruchomym tłokiem zostało szeroko wykorzystane w konstrukcji silników. Rozpatrzmy teraz dwa zwykle występujące procesy to jest rozprężanie izotermiczne i rozprężanie adiabatyczne.

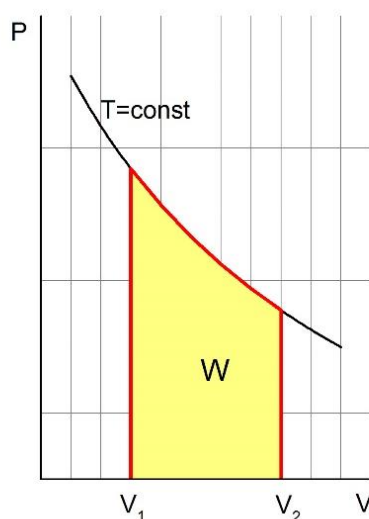
### 15.6.1 Rozprężanie izotermiczne

Przy rozprężaniu izotermicznym trzeba utrzymywać stałą temperaturę ścian cylindra; więc tłok musi poruszać się wolno, żeby gaz mógł pozostawać w równowadze termicznej ze ściankami cylindra. Ponieważ  $T = \text{const.}$ , więc  $dU = 0$ . Stąd, na podstawie pierwszej zasady termodynamiki, otrzymujemy warunek  $dQ = dW = pdV$ , a dalej

$$\Delta Q = \Delta W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \left( \frac{NkT}{V} \right) dV = NkT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = NkT \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) \quad (15.38)$$


gdzie, na podstawie równania stanu gazu doskonałego, podstawiono  $p = \frac{NkT}{V}$ .

Izoterma gazu doskonałego, z zaznaczonym obszarem odpowiadającym wykonanej pracy jest pokazana narysunku poniżej.



Rys. 15.5. Praca  $W$  jaką wykonuje gaz rozszerzając się izotermicznie od objętości  $V_1$  do  $V_2$

### 15.6.2 Rozprężanie adiabatyczne

Często w silnikach nie są spełnione warunki rozprężania izotermicznego bo tłok porusza się bardzo szybko i nie ma dość czasu na przepływ ciepła pomiędzy gazem a ściankami cylindra. Taką przemianę zachodzącą bez wymiany ciepła z otoczeniem nazywamy *przemianą adiabatyczną* . Oznacza to, że  $dQ = 0$  i pierwsza zasada termodynamiki przyjmuje postać  $dU + pdV = 0$ . Równanie to można przekształcić do postaci

$$pV^\kappa = \text{const.} \quad (15.39)$$

gdzie  $\kappa = c_p / c_v$ . Równanie to nosi nazwę równania Poissona dla przemiany adiabatycznej.



Z wyprowadzeniem równania Poissona dla przemiany adiabatycznej możesz zapoznać się w *Dodatku 2*, na końcu modułu V.

Z tego równania i równania stanu gazu doskonałego wynika, że w przemianie adiabatycznej zmieniają się wszystkie parametry stanu gazu:  $p$ ,  $V$  i  $T$ .



### Ćwiczenie 15.5

Adiabatyczne rozprężanie wykorzystuje się w chłodnictwie (chłodziarka sprężarkowa), a przede wszystkim w silniku spalinowym. Korzystając z naszych obliczeń spróbuj teraz rozwiązać następujące zadanie. Silnik benzynowy ma stopień sprężania 9 tzn. stosunek objętości końcowej do początkowej gazu w cylindrze wynosi  $V_2/V_1 = 9$ . Oblicz jaki jest stosunek temperatury gazów wydechowych do temperatury spalania? Przy doborze wartości  $\kappa$  uwzględnij, że powietrze jest w przeważającej mierze mieszaniną gazów dwuatomowych.

Wskazówka: Skorzystaj z równania Poissona (15.39) i z równania stanu gazu doskonałego.

$$T_2/T_1 =$$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

## 16 Kinetyczna teoria gazów i termodynamika II

### 16.1 Średnia droga swobodna


Nasze dotychczasowe rozważania dotyczyły gazu doskonałego. Takie uniwersalne podejście jest wygodne, ale musimy mieć świadomość, że daje tylko przybliżony opis rzeczywistych gazów. Teraz spróbujemy omówić niektóre istotne właściwości gazu rzeczywistego. Zwróćmy na przykład uwagę na to, że gdyby cząsteczki były punktowe to nie zderzałyby się w ogóle ze sobą. Tak więc w opisie zderzeń musimy uwzględnić skończone wymiary cząsteczek. Będziemy teraz traktować cząsteczki jako kuleczki o średnicy  $d$ . Oznacza to, że zderzenie pomiędzy cząsteczkami będzie miało miejsce gdy odległość między ich środkami będzie mniejsza niż  $d$ . Inaczej mówiąc cząsteczka zachowuje się jak tarcza o efektywnej powierzchni

$$\sigma = \pi d^2 \quad (16.1)$$

Ta powierzchnia nosi nazwę *całkowitego przekroju czynnego* .

W czasie  $t$  cząsteczka poruszająca się z prędkością  $v$  przemiata objętość walca równą  $v t \sigma$ . Jeżeli  $n$  jest liczbą cząsteczek w jednostce objętości to na swej drodze (w tym walcu) nasza cząstka napotka  $n_z$  innych cząsteczek

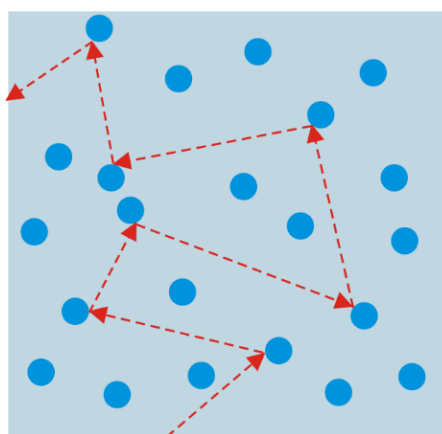
$$n_z = v t \sigma n \quad (16.2)$$

Tym samym otrzymaliśmy liczbę zderzeń, których doznaje cząsteczka w czasie  $t$ . Widać, że zależy ona od rozmiarów cząsteczek i od ich liczby w jednostce objętości. Wprowadzimy teraz pojęcie *średniej drogi swobodnej*  $\bar{\lambda}$  .



#### Definicja

Średnią drogę swobodną definiujemy jako średnią odległość przebywaną przez cząsteczkę pomiędzy kolejnymi zderzeniami.



Rys. 16.1. Przykładowa droga, po której porusza się cząsteczka gazu zderzająca się z innymi cząsteczkami; wszystkie pozostałe cząsteczki poruszają się w taki sposób

Średnia droga swobodna jest równa całkowitej odległości przebywanej przez cząstkę podzielonej przez liczbę zderzeń (rysunek 16.1).

$$\bar{\lambda} = \frac{vt}{vt\sigma n} = \frac{1}{\sigma n} = \frac{1}{\pi d^2 n} \quad (16.3)$$

Równanie (16.3) wyprowadziliśmy przy założeniu, że cząstka zderza się z innymi nieruchomymi cząsteczkami. W rzeczywistości cząsteczki uderzają w inne też poruszające się cząsteczki. Rzeczywista częstość zderzeń jest więc większa, a średnia droga swobodna mniejsza

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \quad (16.4)$$

Ta różnica we wzorach wynika z tego, że w poprzednim równaniu (16.3) występujące tam dwie prędkości są różne: prędkość w liczniku to prędkość średnia cząsteczek  $\bar{v}$  względem naczynia, a prędkość w mianowniku to średnia prędkość względna w stosunku do *innych cząsteczek*. Można się przekonać jakościowo, że te prędkości są różne. Na przykład, gdy cząstki biegną naprzeciw siebie to mają względną prędkość równą  $2\bar{v}$ , gdy pod kątem prostym to równą  $\bar{v}\sqrt{2}$ , a gdy w tę samą stronę to względną prędkość jest równa zeru. Uwzględniając rzeczywisty rozkład prędkości otrzymujemy  $v_{wzgl.} = \bar{v}\sqrt{2}$ .



### Przykład

Spróbujmy teraz oszacować jaka jest typowa średnia droga swobodna i jak często cząstki zderzają się ze sobą. W tym celu rozpatrzmy cząstki powietrza w temperaturze 300 K (27 °C) i pod ciśnieniem 1 atm. Przyjmijmy średnicę cząsteczek równą  $d = 2 \cdot 10^{-8}$  cm. W tych warunkach jeden mol powietrza zajmuje około 22.4 dm<sup>3</sup>, a ponieważ w molu znajduje się  $N_{Av} = 6.023 \cdot 10^{23}$  cząsteczek to ich koncentracja wynosi  $n = 2.7 \cdot 10^{19}/\text{cm}^3$ . Korzystając z równania (16.4) otrzymujemy średnią drogę swobodną równą  $\bar{\lambda} = 2.1 \cdot 10^{-5}$  cm, co stanowi około tysiąca średnic cząsteczkowych ( $1000d$ ). Częstość zderzeń obliczamy dzieląc średnią prędkość cząsteczek przez średnią drogę swobodną

$$f = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} \quad (16.5)$$

Do naszych celów posłużymy się wartością prędkości średniej kwadratowej ( $v_{sr.kw.} = 483$  m/s) obliczonej w ćwiczeniu w ćwiczeniu 15.1. Odpowiednia częstość zderzeń wynosi  $f = 2.3 \cdot 10^9$  1/s. Średnio każda cząstka zderza się w ciągu sekundy ponad 2 miliardy razy! Właśnie dzięki tak dużej liczbie zderzeń ogólny rozkład prędkości nie zmienia się.

## 16.2 Rozkład Maxwella prędkości cząsteczek

W przykładzie, w poprzednim rozdziale posługiwaliśmy się pojęciem prędkości średniej cząsteczek gazu. Jednak każdy gaz ma charakterystyczny rozkład prędkości, który zależy od temperatury. Cząstki nie mogą mieć takich samych prędkości bo przecież ich prędkości

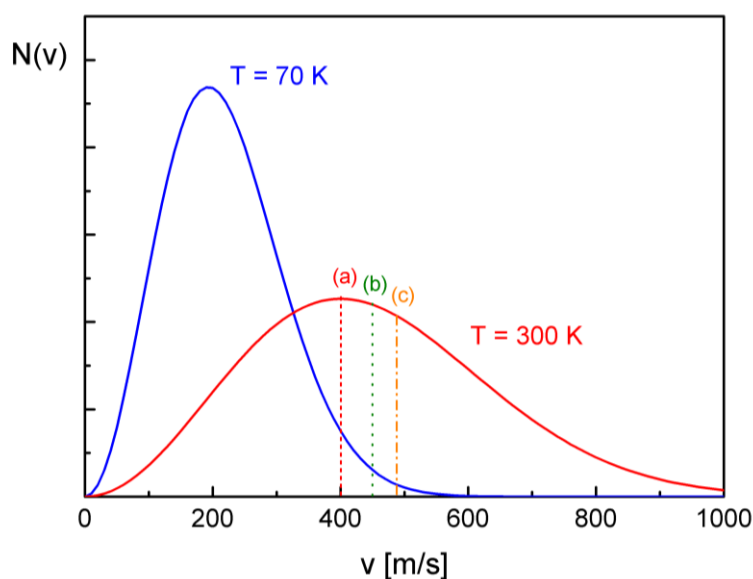
zmieniają się w wyniku zderzeń. Clerk Maxwell podał prawo rozkładu prędkości cząsteczek, które dla gazu zawierającego  $N$  cząsteczek ma postać

$$N(v) = 4\pi N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (16.6)$$

Funkcja  $N(v)$  określa prawdopodobieństwo, że w temperaturze  $T$ ,  $dN$  spośród wszystkich  $N$  cząsteczek ma prędkości zawarte w przedziale od  $v$  do  $v + dv$ ;  $k$  jest stałą Boltzmana, a  $m$  masą cząsteczki. Całkowitą liczbę cząsteczek można zatem obliczyć dodając (tj. całkując) liczby cząstek dla poszczególnych różniczkowych przedziałów prędkości  $dv$

$$N = \int_0^{\infty} N(v) dv \quad (16.7)$$

Na rysunku 16.2 pokazany jest rozkład Maxwella prędkości dla dwóch różnych temperatur; gdzie zaznaczono prędkość średnią, prędkość średnią kwadratową i prędkość najbardziej prawdopodobną.



Rys. 16.2. Rozkład prędkości dla temperatur 70 K i 300 K. Pionowymi, liniami zaznaczono prędkości: (a) najbardziej prawdopodobną; (b) średnią; (c) średnią kwadratową.

Zauważmy, że krzywa rozkładu nie jest symetryczna, bo dolny limit (najmniejsza prędkość) równy jest zero, podczas gdy górny nieskończoności. Ze wzrostem temperatury rośnie prędkość średnia kwadratowa. Obszar prędkości jest teraz większy. Ponieważ liczba cząstek (pole pod krzywą) jest stała więc rozkład się "rozpląszcza". Wzrost, wraz z temperaturą, liczby cząstek o prędkościach większych od danej tłumaczy wiele zjawisk takich jak np. wzrost szybkości reakcji chemicznych towarzyszących zwiększeniu temperatury. Ponadto rozkład prędkości zależy od masy cząsteczek. Im mniejsza masa tym więcej szybkich cząsteczek (w danej temperaturze). Dlatego na przykład wodór łatwiej ucieka z górnych warstw atmosfery niż tlen czy azot.

Możesz prześledzić zależność rozkładu prędkości cząstek gazu od korzystając z programu komputerowego „Rozkład Maxwella prędkości cząsteczek” dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.

### 16.3 Równanie stanu Van der Waalsa

Przypomnijmy, że równanie stanu gazu doskonałego  $pV = nRT$  dobrze opisuje gazy rzeczywiste ale przy małych gęstościach. Przy większych gęstościach nie można pominąć faktu, że cząstki zajmują część objętości dostępnej dla gazu oraz że działają na siebie siłami przyciągania lub odpychania w zależności od odległości między nimi.

Van der Waals zmodyfikował równanie stanu gazu doskonałego, tak aby uwzględnić te czynniki.

Jeżeli cząstki posiadają skończoną objętość to rzeczywista objętość dostępna dla cząstek jest mniejsza od objętości naczynia. "Objętość swobodna" jest mniejsza od objętości naczynia o "objętość własną" cząsteczek  $b$ . Jeżeli oznaczymy przez  $v$  objętość przypadającą na jeden mol  $v = V/n$  to otrzymamy zmodyfikowane równanie stanu gazu

$$p(v - b) = RT \quad (16.8)$$

Można również prosto uwzględnić efekt sił międzycząsteczkowych. W dowolnym miejscu w naczyniu siła przyciągania pomiędzy  $n$  cząsteczkami (na jednostkę objętości) z sąsiednimi  $n$  cząsteczkami (na jednostkę objętości) jest proporcjonalna do  $n^2$  czyli proporcjonalna do  $1/v^2$ . Siła przyciągająca wywołuje dodatkowe ciśnienie. Stąd otrzymujemy równanie Van der Waalsa

$$\left( p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT \quad (16.9)$$

Stałe  $a$  i  $b$ , różne dla różnych gazów, wyznaczamy doświadczalnie.

Na rysunku 16.3 porównano zachowanie się gazu doskonałego (a) z gazem Van der Waalsa (b). Skala obu rysunków jest jednakowa.

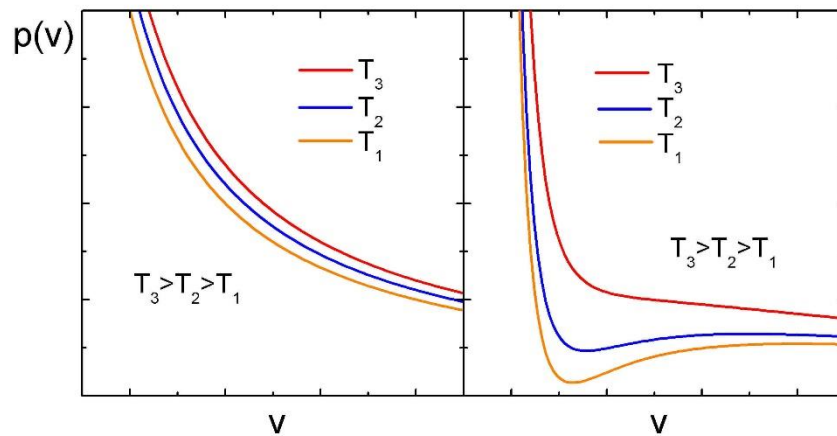
Izotermie gazu doskonałego są hiperbolami danymi równaniem  $pV = \text{const}$ . Natomiast dla gazu Van der Waalsa ciśnienie zmienia się zgodnie z zależnością

$$p = \frac{RT}{(v - b)} - \frac{a}{v^2} \quad (16.10)$$

Widzimy, że dla wysokich temperatur izotermie gazu Van der Waalsa zbliżają się do izoterm dla gazu idealnego.



Natomiast poniżej pewnej temperatury, tak zwanej *temperatury krytycznej*  $T_c$ , obserwujemy charakterystyczne minima i maksima w zależności  $p(v)$ .



Rys. 16.3. Porównanie izoterm gazu doskonałego (a) z izotermami gazu Van der Waalsa (b)

Temperatura krytyczna jest ważnym parametrem charakteryzującym dany gaz. Poniżej temperatury krytycznej gaz rzeczywisty może ulec *skropleniu*, a powyżej niej może występować wyłącznie w *stanie gazowym*.

Temperatury krytyczne większości gazów są niskie i dlatego nie jest łatwo je skroplić. Na przykład temperatura krytyczna dwutlenku węgla wynosi 304 K, ale wodoru już 33 K, a helu 5.3 K. Pionierami badań nad uzyskiwaniem niskich temperatur byli Karol Olszewski i Zygmunt Wróblewski, którzy w 1883 roku jako pierwsi dokonali skroplenia powietrza (azot, tlen).

Chociaż, równanie Van der Waalsa daje dobry opis jakościowy to bywa czasami zawodne przy opisie ilościowym. Jednak nie jest znana prosta formuła, która stosowałaby się do różnych gazów w różnych warunkach.

## 16.4 Procesy odwracalne i nieodwracalne, cykl Carnota

### 16.4.1 Procesy odwracalne i nieodwracalne

Rozpatrzmy dwa przypadki izotermicznego sprężania gazu. W pierwszym, tłok przesuwamy bardzo szybko i czekamy aż ustali się równowaga z otoczeniem. W czasie takiego procesu ciśnienie i temperatura gazu nie są dobrze określone bo nie są jednakowe w całej objętości.

W drugim tłok przesuwamy bardzo powoli tak, że ciśnienie i temperatura gazu są w każdej chwili dobrze określone. Ponieważ zmiana jest niewielka to gaz szybko osiąga nowy stan równowagi. Możemy złożyć cały proces z ciągu takich małych przesunięć tłoka i wtedy podczas całego procesu gaz jest bardzo blisko równowagi. Jeżeli będziemy zmniejszać nasze zmiany to w granicy dojdziemy do procesu idealnego, w którym wszystkie stany pośrednie (pomiędzy początkowym i końcowym) są stanami równowagi.

Pierwszy proces nazywamy *procesem nieodwracalnym*  $P$ , a proces drugi *procesem odwracalnym*  $P$ .

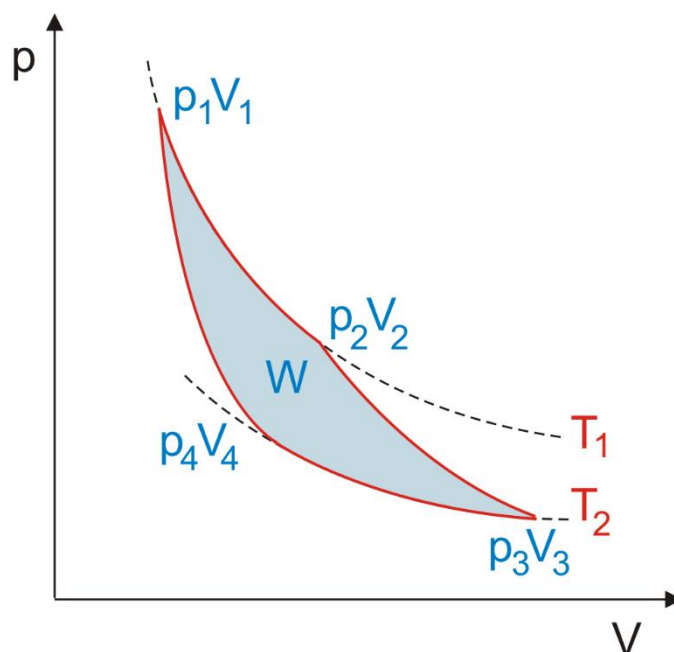
**Definicja**

Proces nazywamy odwracalnym gdy za pomocą bardzo małej (różniczkowej) zmiany otoczenia można wywołać proces odwrotny do niego tzn. przebiegający po tej samej drodze w przeciwnym kierunku.

**16.4.2 Cykl Carnota**

Przykładem cyklu odwracalnego jest cykl Carnota. Jest to bardzo ważny cykl odwracalny ponieważ *wyznacza granicę naszych możliwości zamiany ciepła na pracę*. Cykl Carnota, pokazany na rysunku 16.4 przebiega czterostopniowo:

1. Gaz znajduje się w stanie równowagi  $p_1, V_1, T_1$ . Cylinder stawiamy na zbiorniku ciepła ( $T_1$ ) i pozwalamy, żeby gaz rozprężył się izotermicznie do stanu  $p_2, V_2, T_1$ . W tym procesie gaz pobiera ciepło  $Q_1$  i jego kosztem wykonuje pracę podnosząc tłok.
2. Cylinder stawiamy na izolującej podstawie i pozwalamy na dalsze rozprężanie (adiabaticzne) gazu do stanu  $p_3, V_3, T_2$ . Gaz wykonuje pracę przy podnosząc tłok kosztem własnej energii i jego temperatura spada do  $T_2$ .
3. Cylinder stawiamy na zimniejszym zbiorniku ( $T_2$ ) i sprężamy gaz izotermicznie do stanu  $p_4, V_4, T_2$ . Pracę wykonuje siła zewnętrzna pchająca tłok, a z gazu do zbiornika przechodzi ciepło  $Q_2$ .
4. Cylinder stawiamy na izolującej podstawie i sprężamy adiabatycznie do stanu początkowego  $p_1, V_1, T_1$ . Siły zewnętrzne wykonują pracę i temperatura gazu podnosi się do  $T_1$ .



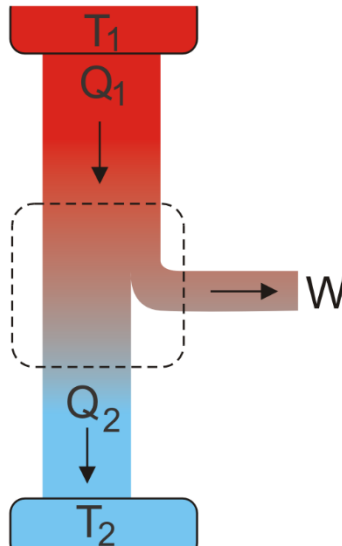
Rys. 16.4. Cykl Carnota

Praca wykonywana przez gaz lub siłę zewnętrzną jest równa każdorazowo polu pod wykresem  $p(V)$  odpowiadającym danej przemianie (rysunek 16.4). Stąd wypadkowa praca  $W$  wykonana przez układ w czasie pełnego cyklu jest opisana przez powierzchnię zawartą wewnątrz zamkniętej krzywej opisującej cały cykl.

Wypadkowa ilość ciepła pobrana przez układ podczas jednego cyklu wynosi  $Q_1 - Q_2$ . Natomiast wypadkowa zmiana energii wewnętrznej wynosi zero bo stan końcowy pokrywa się z początkowym, więc na podstawie pierwszej zasady termodynamiki otrzymujemy

$$W = Q_1 - Q_2 \quad (16.11)$$

Schematycznie jest to przedstawione na rysunku 16.5. poniżej.



Rys. 16.5. Część pobranego ciepła  $Q_1$  jest w silniku zamieniana na pracę  $W$ , a część oddawana jako ciepło  $Q_2$ .

Widzimy, że pewna ilość ciepła została zamieniona na pracę. Możemy powtarzać ten cykl uzyskując potrzebną ilość pracy. Takie urządzenie nazywamy *silnikiem cieplnym*  $\mathcal{P}$ . **Sprawność  $\eta$**   $\mathcal{P}$  silnika cieplnego definiujemy jako

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad (16.12)$$

Korzystając z równania stanu gazu doskonałego i z pierwszej zasady termodynamiki można pokazać, że sprawność silnika Carnota (dla gazu doskonałego) wynosi

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (16.13)$$



Więcej o obliczaniu sprawności silnika Carnota możesz dowiedzieć się w *Dodatku 3*, na końcu modułu V.

Cykl Carnota można prowadzić w kierunku przeciwnym i wtedy urządzenie działa jako *maszyna chłodząca*.

**Ćwiczenie 16.1**

Spróbuj teraz, korzystając z powyższego wzoru obliczyć maksymalną sprawność maszyny parowej, która pobiera z kotła parę o temperaturze 227 °C, a oddaje do otoczenia parę o temperaturze 127 °C. Porównaj tę sprawność ze sprawnością zwykłego silnika samochodowego (około 25%). Jaki wpływ na sprawność miałyby podniesienie temperatury pary w kotle? Wyniki zapisz poniżej.

$\eta =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

**16.5 Entropia i druga zasada termodynamiki**

Zwróćmy jeszcze raz uwagę na to, że w trakcie pracy (cyklu) silnika cieplnego część pobieranego ciepła była oddawana do zbiornika o niższej temperaturze i w konsekwencji ta ilość ciepła nie była zamieniana na pracę. Powstaje pytanie, czy można skonstruować urządzenie, które pobierałoby ciepło i w całości zamieniałoby je na pracę? Moglibyśmy wtedy wykorzystać ogromne (z naszego punktu widzenia nieskończone) ilości ciepła zgromadzone w oceanach, które byłyby stale uzupełniane poprzez promieniowanie słoneczne.

Negatywna, niestety, odpowiedź na to pytanie jest zawarta w *drugiej zasadzie termodynamiki*. Poniżej podane zostały równoważne sformułowania tej zasady:

**Prawo, zasada, twierdzenie**

*Niemożliwa jest przemiana, której jedynym wynikiem byłaby zamiana na pracę ciepła pobranego ze źródła mającego wszędzie jednakową temperaturę.*

Oznacza to, że nie możemy zbudować doskonałego silnika cieplnego, bo nie możemy wytwarzać pracy pobierając jedynie ciepło z jednego zbiornika bez oddawania pewnej ilości ciepła do zbiornika zimniejszego.

**Prawo, zasada, twierdzenie**

*Żadna cyklicznie pracująca maszyna nie może bez zmian w otoczeniu przenosić w sposób ciągły ciepła z jednego ciała do drugiego o wyższej temperaturze.*

Wiemy, z doświadczenia, że ciepło przepływa od ciała cieplejszego do ciała zimniejszego. Żeby zmienić ten kierunek musi zostać wykonana praca przez *czynnik zewnętrzny*. Nie można więc zbudować doskonałej maszyny chłodzącej, która bez dodatkowych efektów (wydatkowania pracy z zewnątrz) przenosiłaby w sposób ciągły ciepło z ciała zimniejszego do cieplejszego.

**Prawo, zasada, twierdzenie**

*Żadna cykliczna maszyna cieplna pracująca pomiędzy temperaturami  $T_1$  i  $T_2$  nie może mieć sprawności większej niż  $(T_1 - T_2)/T_1$ .*

Oznacza to, że żadna maszyna cieplna *nie może* mieć sprawności większej od sprawności silnika Carnota.




Więcej o sprawność silników cieplnych możesz przeczytać w *Dodatku 4*, na końcu modułu V.



### 16.5.1 Termodynamiczna skala temperatur


Przypomnijmy, że sprawność silnika Carnota jest równa  $\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ . Wynika stąd, że

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \quad (16.14)$$

Możemy więc wyznaczyć stosunek temperatur dowolnych zbiorników ciepła mierząc ilość ciepła przeniesioną podczas jednego cyklu Carnota. Wzór (16.14) stanowi definicję tak zwanej *termodynamicznej skali temperatur* .

### 16.5.2 Entropia

Zerowa zasada termodynamiki wiąże się z pojęciem *temperatury* . Pierwsza zasada termodynamiki wiąże się z pojęciem *energii wewnętrznej* .

Natomiast drugą zasadę termodynamiki wiążemy z pojęciem *entropii* .



#### Prawo, zasada, twierdzenie

*Druga zasada termodynamiki mówi, że w układzie zamkniętym entropia  $S$  nie może maleć to znaczy  $dS \geq 0$ .*

Entropia  $S$  jest termodynamiczną funkcją stanu, zależy tylko od początkowego i końcowego stanu układu, a nie od drogi przejścia pomiędzy tymi stanami. Entropia jest funkcją określoną dla stanu równowagi, taką że dla procesu odwracalnego



#### Definicja

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (16.15)$$

lub

$$S = \int \frac{dQ}{T} \quad (16.16)$$

gdzie  $dQ$  jest ciepłem dostarczanym do układu w procesie odwracalnym.

Z tego punktu widzenia szczególnie interesujące są procesy adiabatyczne nie związane z przepływem ciepła pomiędzy układem i otoczeniem. W procesie adiabatycznym  $dQ = 0$ , więc dla procesu odwracalnego  $dS = 0$  na podstawie równania (16.15). Oznacza to, że

#### Prawo, zasada, twierdzenie



*Entropia układu izolowanego adiabatycznie, w którym zachodzą procesy odwracalne, jest stała. Jednocześnie można pokazać, że dla procesu adiabatycznego nieodwracalnego, entropia układu rośnie.*

Można uogólnić zasadę wzrostu entropii na układy nie izolowane adiabatycznie to znaczy takie, które wymieniają ciepło z otoczeniem. Traktujemy wtedy nasz układ i otoczenie razem jako jeden "większy" układ ponownie izolowany adiabatycznie. Wtedy

$$dS + dS_o \geq 0 \quad (16.17)$$

gdzie  $dS_o$  jest zmianą entropii otoczenia. Zmienia się więc entropia naszego układu i otoczenia. Jeżeli proces jest odwracalny to podczas przenoszenia ciepła  $dQ$  z otoczenia do naszego układu entropia otoczenia maleje o  $dQ/T$ , a entropia układu rośnie o tę samą wartość  $dQ/T$ , więc całkowita zmiana entropii jest równa zero.

Zatem posługując się entropią (zgodnie z drugą zasadą termodynamiki) możemy stwierdzić czy dany proces może *zachodzić w przyrodzie*.



### Przykład

Przykładem może być zmiana entropii w gazie doskonałym podczas odwracalnego izotermicznego rozprężania gazu od objętości  $V_1$  do objętości  $V_2$ . Na podstawie pierwszej zasady termodynamiki możemy napisać

$$dU = dQ - pdV \quad (16.18)$$

a ponieważ dla przemiany izotermicznej  $dU = 0$  więc

$$dQ = pdV \quad (16.19)$$

Możemy teraz obliczyć entropię na podstawie równania (16.15)

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{pdV}{T} \quad (16.20)$$

Z równania stanu gazu doskonałego  $pV = nRT$  obliczamy  $T$  i podstawiając do powyższego wzoru otrzymujemy

$$dS = nR \frac{dV}{V} \quad (16.21)$$

a stąd

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{V_1}^{V_2} nR \frac{dV}{V} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (16.22)$$


Ponieważ gaz się rozpręża to  $V_2 > V_1$  więc również  $S_2 > S_1$ , czyli entropia rośnie. Aby móc zrealizować ten proces nasz układ musi być w kontakcie ze zbiornikiem o temperaturze  $T$ ,

Ponieważ gaz się rozpręża to  $V_2 > V_1$  więc również  $S_2 > S_1$ , czyli entropia rośnie. Aby móc zrealizować ten proces nasz układ musi być w kontakcie ze zbiornikiem o temperaturze  $T$ , który dostarcza ciepło i tym samym zapewnia stałą temperaturę rozprężającego się gazu. Entropia tego zbiornika maleje tak, że suma entropii układu i zbiornika nie zmienia się co jest charakterystyczne dla procesu odwracalnego.



Posługując się pojęciem entropii można również pokazać, że ciepło przepływa z ciała gorącego do zimnego, a nie odwrotnie. Więcej na ten temat przeczytasz w *Dodatku 5*, na końcu modułu V.

### 16.5.3 Entropia a nieuporządkowanie

Entropię układu można opisać na gruncie mechaniki statystycznej. W takim podejściu entropia jest *miarą nieuporządkowania*  układu cząstek. Zgodnie z drugą zasadą termodynamiki dla procesów zachodzących w przyrodzie entropia układu (wraz z otoczeniem) rośnie to znaczy, że rośnie również nieuporządkowanie (układu wraz z otoczeniem). Oznacza to, że im większy jest stan nieporządku (położeń i prędkości cząstek) w układzie tym większe jest prawdopodobieństwo, że układ będzie w tym stanie. Z definicji entropia układu jest równa



#### Definicja

$$S = k \ln \omega \quad (16.23)$$

gdzie,  $k$  jest stałą Boltzmana, a  $\omega$  liczbą stanów mikroskopowych realizujących stan makroskopowy którego entropię liczymy.

Pokażmy teraz, że to sformułowanie jest równoważne definicji termodynamicznej entropii. W tym celu rozpatrzmy swobodne rozprężanie gazu od objętości  $V_1$  do objętości końcowej  $V_2$ .

Względne prawdopodobieństwo znalezienia jednej cząstki w objętości  $V_1$  w porównaniu do  $V_2$  jest równe

$$\left( \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)_1 = \frac{V_1}{V_2} \quad (16.24)$$

a dla  $N$  cząstek

$$\left( \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)_N = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^N \quad (16.25)$$

Obliczamy teraz zmianę entropii układu

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \ln \omega_2 - k \ln \omega_1 = k \ln \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \quad (16.26)$$

Podstawiając zależność (16.25) otrzymujemy

$$\Delta S = Nk \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) \quad (16.27)$$

Równanie to można, dzieląc je i mnożąc przez  $T$ , przekształcić do postaci

$$\Delta S = \frac{NkT \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)}{T} \quad (16.28)$$

gdzie wyrażenie w liczniku jest równe ilości ciepła dostarczonego do układu, aby ten przeszedł do stanu końcowego w sposób odwracalny rozprężając się izotermicznie (punkt 15.6).

Ostatecznie więc


$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} \quad \text{lub} \quad dS = \frac{dQ}{T} \quad (16.29)$$

gdzie  $dQ$  jest ciepłem dostarczanym do układu w procesie odwracalnym.

Podsumowując, w ujęciu termodynamicznym stan równowagi odpowiada stanowi o największej entropii, a w ujęciu statystycznym jest stanem najbardziej prawdopodobnym.

## 16.6 Stany równowagi, zjawiska transportu

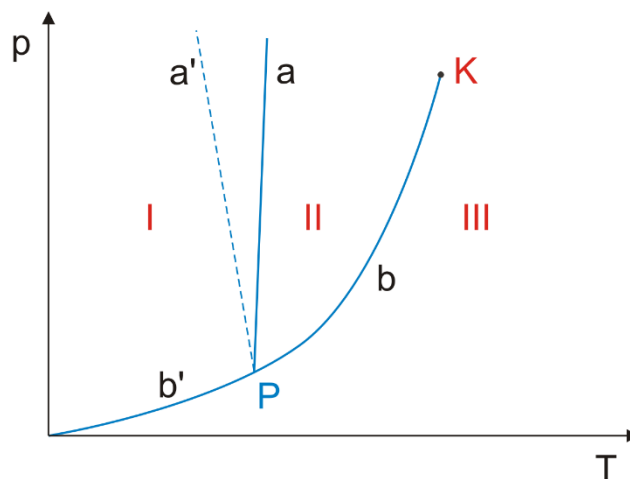
### 16.6.1 Stany równowagi

W dotychczasowych naszych rozważaniach posługiwaliśmy się pojęciem *stanu równowagi układu* , czyli stanu, w którym żaden z parametrów potrzebnych do makroskopowego opisu układu *nie zależy od czasu*. Zajmowaliśmy się procesami, które zaczynały się jednym stanem równowagi, a kończyły innym stanem równowagi.

Dla układu jednorodnego (przykładowo gazu) w stanie równowagi do jego opisu wystarcza znajomość dwu podstawowych parametrów stanu na przykład ciśnienia i objętości. Opis komplikuje się gdy mamy układ niejednorodny na przykład ciecz w równowadze z parą. Dla danej temperatury stan równowagi tego układu jest możliwy przy różnych objętościach układu (od objętości zależy ilość fazy ciekłej i gazowej). Natomiast temperatura i ciśnienie przestają być niezależne. W każdej temperaturze równowaga jest możliwa tylko przy określonym ciśnieniu (pary nasyconej). Przy wyższym istnieje tylko ciecz, przy niższym para. Podobnie ciecz i ciało stałe mogą istnieć w równowadze tylko w temperaturze topnienia, która jest funkcją ciśnienia. Wreszcie ciało stałe współistnieje w równowadze z parą nasyconą, której ciśnienie jest funkcją temperatury. Krzywe równowagi pokazane na rysunku 16.6.

Literą  $a$  oznaczona jest krzywa równowagi ciało stałe - ciecz (związek temperatury topnienia z ciśnieniem). Krzywa  $a'$  przedstawia tę zależność dla kilku nietypowych substancji, które przy topnieniu zmniejszają objętość na przykład dla lodu. Krzywe  $b + b'$  pokazują zależność ciśnienia pary nasyconej od temperatury.





Rys. 16.6. Krzywe równowagi dla układu niejednorodnego.  
Obszar I - ciało stałe, obszar II - ciecz, obszar III - gaz

Odcinek  $b'$  to krzywa równowagi ciało stałe - para, a odcinek  $b$  to krzywa równowagi ciecz - para. Krzywa równowagi ciecz - para kończy się w punkcie krytycznym  $K$ . Dla temperatury wyższej od temperatury punktu krytycznego  $K$  zanika różnica pomiędzy fazą ciekłą i gazową. Dlatego warunkiem skroplenia gazu jest ochłodzenie go poniżej jego temperatury krytycznej. Punkt  $P$ , w którym łączą się krzywe nazywamy punktem potrójnym. W tym punkcie mogą znajdować się w równowadze wszystkie trzy stany skupienia. Dla wody odpowiada to ciśnieniu  $p = 610.6 \text{ Pa}$  i  $T = 273.16 \text{ K}$  ( $0.01 \text{ }^\circ\text{C}$ ). Punkt potrójny wody posłużył do definicji jednostki temperatury - *kelwina*.

### 16.6.2 Zjawiska transportu

Znajomość dochodzenie układów do stanów równowagi jest równie ważna jak znajomość ich własności w stanach równowagi, a *każdy układ pozostawiony samemu sobie przez dostatecznie długi czas dochodzi do stanu równowagi*.

Teraz zapoznamy się z bardzo uproszczonym opisem zjawisk, które zachodzą gdy układy dążą do stanów równowagi. W zjawiskach tych mamy zawsze do czynienia z przenoszeniem (transportem) materii, energii, pędu lub ładunku elektrycznego. Wszystkie te zjawiska transportu opisujemy w pierwszym przybliżeniu za pomocą *takiego samego równania różniczkowego*, które przedstawia propagację (rozprzestrzenianie się) pewnej wielkości fizycznej  $\varphi$  mającą na celu osiągnięcie równowagi

$$j = -K \frac{d\varphi}{dx} \quad (16.30)$$

W tym równaniu  $j$  jest gęstością strumienia (gęstość prądu) wielkości fizycznej  $\varphi$ , a  $K$  jest stałą charakteryzującą daną sytuację fizyczną. Stałą  $K$  wiążemy z właściwościami mikroskopowymi rozpatrywanego układu statystycznego. Jest to tak zwany *współczynnik transportu*  $\mathcal{P}$ .

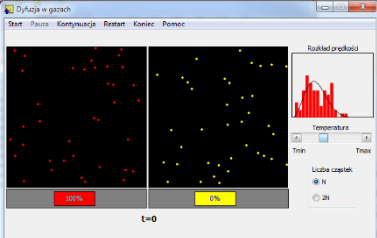
Omówimy teraz krótko wybrane zjawiska transportu.

*Dyfuzja w gazie* czyli przenoszenie cząstek w kierunku obszarów o mniejszej koncentracji  $n$  (dążenie do wyrównania koncentracji). Równanie (16.30) nosi teraz nazwę *równania dyfuzji* i ma postać

$$j_D = -D \frac{dn}{dx} \quad (16.31)$$

gdzie  $j_D$  jest gęstością strumienia cząstek,  $dn/dx$  jest różnicą stężeń występującą na odległości  $dx$ , a  $D$  współczynnikiem dyfuzji. Równanie to znane jest pod nazwą *prawa Ficka*. Ponieważ dyfuzja jest przenoszeniem cząstek (z miejsc o większym stężeniu do miejsc o mniejszym stężeniu) więc mamy do czynienia z *transportem masy*.

Możesz prześledzić szybkość mieszania się dwóch gazów (znajdujących się początkowo w oddzielnych zbiornikach) w zależności od temperatury korzystając z programu komputerowego „Dyfuzja” dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.



*Przewodnictwo cieplne* czyli transport energii wskutek ruchu cząstek w kierunku obszaru o niższej  $T$  (dążenie do wyrównania temperatury). Równanie transportu ciepła ma postać

$$j_Q = -\kappa \frac{dT}{dx} \quad (16.32)$$

gdzie  $j_Q$  jest gęstością strumienia ciepła,  $dT/dx$  jest różnicą temperatur w warstwie ciała o grubości  $dx$ , a  $\kappa$  jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego. Równanie to znane jest pod nazwą *prawa Fouriera*.

*Przewodnictwo elektryczne* czyli przenoszenie ładunku elektrycznego w wyniku ruchu elektronów (dążenie do wyrównania potencjałów elektrycznych). Równanie, zwane *prawem Ohma*, ma postać

$$\mathbf{j} = -\sigma \frac{dV}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dV}{dx} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{E} \quad (16.33)$$

gdzie  $dV/dx$  jest różnicą potencjałów (napięciem) pomiędzy punktami przewodnika odległymi o  $dx$ ,  $\sigma$  przewodnością elektryczną,  $\rho$  opornością właściwą, a  $E$  natężeniem pola elektrycznego.

Uwaga: wszystkie współczynniki transportu zależą od temperatury.

Ten rozdział kończy moduł piąty; możesz teraz przejść do podsumowania i zadań testowych.

## Podsumowanie

- Ciśnienie gazu doskonałego złożonego z  $N$  cząsteczek o masie  $m$  jest dane zależnością  $pV = Nm \frac{\overline{v^2}}{3}$ , gdzie  $V$  jest objętością naczynia z gazem.
- Temperaturę bezwzględną definiujemy jako wielkość wprost proporcjonalną do średniej energii kinetycznej cząsteczek  $T = \left(\frac{2}{3k}\right) \frac{m\overline{v^2}}{2}$ ; stała Boltzmana  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  J/K.
- Równanie stanu gazu doskonałego można zapisać w postaci  $pV = NkT$  lub  $pV = nRT$ , gdzie  $n$  jest liczbą moli, a  $R = 8.314 \cdot \text{J/mol K}$  uniwersalną stałą gazową.
- Z zasady ekwipartycji energii wynika, że dostępna energia rozkłada się w równych porcjach na wszystkie niezależne sposoby, w jakie cząsteczka może ją absorbować, co jest równoważne stwierdzeniu, że średnia energia kinetyczna na każdy stopień swobody jest taka sama dla wszystkich cząsteczek.
- Pierwsza zasada termodynamiki mówi, że ciepło pobrane przez układ jest równe wzrostowi energii wewnętrznej układu plus pracy wykonanej przez układ nad otoczeniem zewnętrznym  $Q = \Delta U + W$ . Dla gazu działającego na tłok  $dW = pdV$ .
- Ciepło właściwe jednego mola gazu obliczamy jako  $c = \frac{dQ}{dT}$ . Dla jednego mola gazu ciepło właściwe przy stałej objętości wynosi  $c_v = \frac{3}{2}R$ , a dla cząsteczki dwuatomowej  $c_v = \frac{5}{2}R$ ;  $c_v$  jest związane z ciepłem właściwym przy stałym ciśnieniu  $c_p$  relacją  $c_p = c_v + R$ .
- Przy rozprężaniu izotermicznym ciepło pobrane przez gaz wynosi  $\Delta Q = NkT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$
- Gdy gaz rozpręża się adiabatycznie (bez wymiany ciepła z otoczeniem) to  $pV^\kappa = \text{const.}$ , gdzie  $\kappa = c_p/c_v$ .
- Rozkładu prędkości cząsteczek w gazie (rozkład Maxwella) ma postać 
$$N(v) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$
.
- Silnik Carnota pracujący między dwoma zbiornikami ciepła o temperaturach  $T_1$  i  $T_2$  ma sprawność  $\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ , gdzie  $Q_1$  jest ciepłem pobranym ze zbiornika, a  $Q_2$  ciepłem oddanym do zbiornika o temperaturze  $T_2$ .
- Jedno z równoważnych sformułowań drugiej zasady termodynamiki mówi, że żadna cykliczna maszyna cieplna pracująca pomiędzy temperaturami  $T_1$  i  $T_2$  nie może mieć sprawności większej niż  $(T_1 - T_2)/T_1$ . Oznacza to, że żadna maszyna cieplna nie może mieć sprawności większej od sprawności silnika Carnota.
- Druga zasada termodynamiki wiąże się z pojęciem entropii. Wynika z niej, że w układzie zamkniętym entropia nie może maleć.

- Zjawiska transportu opisujemy w pierwszym przybliżeniu za pomocą takiego samego równania różniczkowego,  $j = -K \frac{d\varphi}{dx}$  które przedstawia propagację (rozprzestrzenianie się) pewnej wielkości fizycznej  $\varphi$  mającą na celu osiągnięcie równowagi

## Materiały dodatkowe do Modułu V

### Rotacyjne i wibracyjne stopnie swobody cząsteczki wodoru

Na gruncie mechaniki kwantowej można pokazać, że moment pędu obracającej się cząsteczki jest skwantowany i jego wartość wynosi co najmniej  $L = h / 2\pi$ , gdzie  $h$  jest stałą Plancka. Wartość  $L_{min} = 10^{-34}$  kg m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>. Energia kinetyczna ruchu obrotowego jest dana wyrażeniem  $E_{obr.} = I\omega^2 / 2 = L^2 / (2I)$ , gdzie  $I$  jest momentem bezwładności.

Dla cząsteczki H<sub>2</sub>  $m = 1.67 \cdot 10^{-27}$  kg, a  $R \approx 5 \cdot 10^{-11}$  m, więc  $I = 2mR^2 \approx 8.3 \cdot 10^{-48}$  kg m<sup>2</sup>. Ponieważ na jeden stopień swobody przypada energia  $kT/2$  więc

$$\frac{kT}{2} = \frac{L^2}{2I} \quad (\text{V.1.1})$$

skąd

$$T = \frac{L^2}{kI} \quad (\text{V.1.2})$$

Stąd dla  $L_{min.} = h / 2\pi$  otrzymujemy  $T_{min} \approx 90$  K.

Podobnie jest dla ruchu drgającego, który także jest skwantowany i minimalna energia drgań  $E_{drg.} = hf$ , gdzie  $f$  jest częstotliwością drgań. Dla cząsteczek typowe częstotliwości drgań są rzędu 10<sup>14</sup> Hz (zakres podczerwieni i widzialny) i dla takiej częstotliwości otrzymujemy energię drgań  $\approx 6 \cdot 10^{-20}$  J co odpowiada temperaturze około 4000 K.

### Równanie Poissona dla przemiany adiabatycznej

W przemianie adiabatycznej nie zachodzi wymiana ciepła z otoczeniem. Oznacza to, że  $dQ = 0$  i pierwsza zasada termodynamiki przyjmuje postać  $dU + pdV = 0$ . Równanie to możemy przepisać w postaci

$$c_v dT + pdV = 0 \quad (\text{V.2.1})$$

Różniczkując równanie stanu gazu doskonałego (15.15) otrzymujemy (dla jednego mola gazu)

$$pdV + V dp = R dT \quad (\text{V.2.2})$$

Łącząc oba powyższe równania (eliminując  $dT$ ) otrzymujemy

$$c_v \left( \frac{pdV}{R} + \frac{V dp}{R} \right) + pdV = 0 \quad (\text{V.2.3})$$

lub

$$\left( \frac{c_v + R}{R} \right) pdV + \frac{c_v V}{R} dp = 0 \quad (\text{V.2.4})$$

Podstawiając  $c_p = c_v + R$  otrzymujemy

$$\kappa \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 \quad (\text{V.2.5})$$

gdzie  $\kappa = c_p / c_v$ . Możemy teraz scałkować to równanie

$$\kappa \int \frac{dV}{V} + \int \frac{dp}{p} = 0 \quad (\text{V.2.6})$$

Skąd

$$\kappa \ln V + \ln p = \text{const. (stała całkowania)} \quad (\text{V.2.7})$$

Zapisując inaczej otrzymany wynik

$$\ln(pV^\kappa) = \text{const.} \quad (\text{V.2.8})$$

lub

$$pV^\kappa = \text{const.} \quad (\text{V.2.9})$$

### **Sprawność silnika Carnota**

Cykl Carnota, przebiega czterostopniowo:

Gaz znajduje się w stanie równowagi  $p_1, V_1, T_1$ . Cylinder stawiamy na zbiorniku ciepła ( $T_1$ ) i pozwalamy, żeby gaz rozprężył się izotermicznie do stanu  $p_2, V_2, T_1$ . W tym procesie gaz pobiera ciepło  $Q_1$  i jego kosztem wykonuje pracę podnosząc tłok.

Cylinder stawiamy na izolującej podstawie i pozwalamy na dalsze rozprężanie (adiabaticzne) gazu do stanu  $p_3, V_3, T_2$ . Gaz wykonuje pracę podnosząc tłok kosztem własnej energii i jego temperatura spada do  $T_2$ .

Cylinder stawiamy na zimniejszym zbiorniku ( $T_2$ ) i sprężamy gaz izotermicznie do stanu  $p_4, V_4, T_2$ . Pracę wykonuje siła zewnętrzna pchająca tłok, a z gazu do zbiornika przechodzi ciepło  $Q_2$ .

Cylinder stawiamy na izolującej podstawie i sprężamy adiabaticznie do stanu początkowego  $p_1, V_1, T_1$ . Siły zewnętrzne wykonują pracę i temperatura gazu podnosi się do  $T_1$ .

Podczas przemiany (I) gaz pobiera ciepło  $Q_1$  i jego kosztem wykonuje  $W_1$

$$Q_1 = W_1 = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (\text{V.3.1})$$

Analogicznie podczas przemiany (III) siła zewnętrzna wykonuje pracę  $W_2$ , a z gazu do zbiornika przechodzi ciepło  $Q_2$

$$Q_2 = W_2 = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \quad (\text{V.3.2})$$

Dzieląc te równania stronami otrzymujemy

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}{T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}} \quad (\text{V.3.3})$$

Z równania stanu gazu doskonałego (15.15) dla przemian izotermicznych (I) i (III) wynika, że

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= p_2 V_2 \\ p_3 V_3 &= p_4 V_4 \end{aligned} \quad (\text{V.3.4})$$

Natomiast dla przemian adiabatycznych (II) i (IV) z równania Poissona (15.39) wynika, że

$$\begin{aligned} p_2 V_2^\kappa &= p_3 V_3^\kappa \\ p_4 V_4^\kappa &= p_1 V_1^\kappa \end{aligned} \quad (\text{V.3.5})$$

Z powyższych czterech równań wynika, że

$$(V_2 V_4)^{\kappa-1} = (V_1 V_3)^{\kappa-1} \quad (\text{V.3.6})$$

skąd

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \quad (\text{V.3.7})$$

Podstawiając to wyrażenie do równania (V.3.3) otrzymujemy

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (\text{V.3.8})$$

i możemy teraz zapisać sprawność silnika Carnota (dla gazu doskonałego) jako

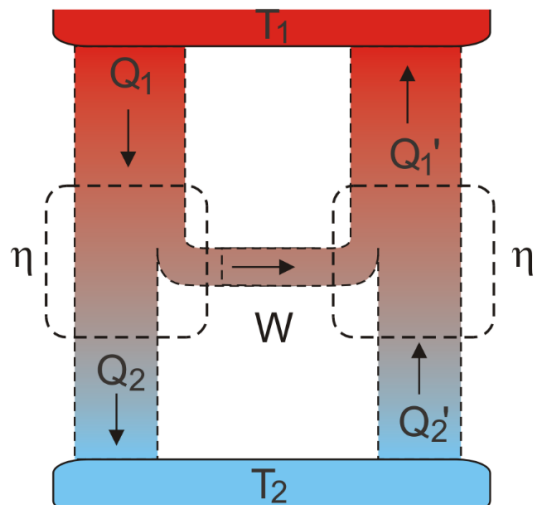
$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (\text{V.3.9})$$

### **Sprawność silników cieplnych**

Rozpatrzmy następujący schemat (pokazany na rysunku poniżej), w którym silnik o sprawności *hipotetycznie większej* od silnika Carnota napędza taki silnik Carnota pracujący jako chłodziwa między tymi samymi zbiornikami ciepła.

Silnik o sprawności  $\eta$  pobiera ze źródła o temperaturze  $T_1$  ciepło  $Q_1$  i zamienia ją na energię mechaniczną  $W$  równą

$$W = \eta Q_1 \quad (\text{V.4.1})$$



Silnik o hipotetycznej sprawności  $\eta$  napędza silnik Carnota o sprawności  $\eta' < \eta$

Jeżeli układ napędowy tej maszyny jest połączony z układem napędowym silnika Carnota to energia  $W$  zostanie zużyta na napędzanie chłodni Carnota. W wyniku tego do źródła ciepła zostanie dostarczone ciepło  $Q_1'$  równe

$$Q_1' = \frac{W}{\eta'} \quad (\text{V.4.2})$$

Ponieważ założyliśmy, że sprawność silnika jest większa od sprawności silnika Carnota  $\eta > \eta'$  to ciepło dostarczone do źródła ciepła jest większe niż ciepło pobrane  $Q_1' > Q_1$  co oznacza, że w końcowym efekcie ciepło jest przenoszone z chłodnicy do źródła ciepła. Wnioskujemy więc, że jeśli istniałby silnik o sprawności większej od sprawności silnika Carnota to naruszona zostałaby druga zasada termodynamiki w sformułowaniu: *żadna cyklicznie pracująca maszyna nie może bez zmian w otoczeniu przenosić w sposób ciągły ciepła z jednego ciała do drugiego o wyższej temperaturze.*

### Przepływ ciepła

Rozważmy dwa identyczne ciała o temperaturach  $T_1$  i  $T_2$ , które kontaktujemy ze sobą termicznie. Po chwili, temperatury ciał wynoszą odpowiednio  $T_1 - dT_1$  oraz  $T_2 + dT_2$  w wyniku przepływu następujących ilości ciepła

$$\begin{aligned} dQ_1 &= mc_w dT_1 \\ dQ_2 &= mc_w dT_2 \end{aligned} \quad (\text{V.5.1})$$

gdzie,  $m$  jest masą każdego z ciał, a  $c_w$  ciepłem właściwym. Ponieważ ilość ciepła pobranego jest równa ilości ciepła oddanego  $dQ_1 = -dQ_2$  więc również zmiany temperatur są równe  $dT_1 = -dT_2 = dT$



Obliczamy teraz zmiany entropii każdego z ciał

$$\begin{aligned}dS_1 &= \frac{dQ_1}{T_1} = \frac{mc_w dT_1}{T_1} \\dS_2 &= \frac{dQ_2}{T_2} = \frac{mc_w dT_2}{T_2}\end{aligned}\tag{V.5.2}$$

Wypadkowa zmiana entropii wynosi więc

$$dS = \frac{mc_w dT}{T_1} \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)\tag{V.5.3}$$

a zmiana temperatury

$$dT = \frac{T_1 T_2}{mc_w} \left( \frac{dS}{T_1 - T_2} \right)\tag{V.5.4}$$

Ponieważ, zgodnie z drugą zasadą termodynamiki zmiana entropii układu jest dodatnia  $dS > 0$  więc gdy  $T_1 > T_2$  to zmiana temperatury  $dT$  też jest dodatnia, a to oznacza że ciepło przepływa od ciała o temperaturze  $T_1$  do ciała o temperaturze  $T_2$ .

## Rozwiązania ćwiczeń z modułu V

### Ćwiczenie 15.1

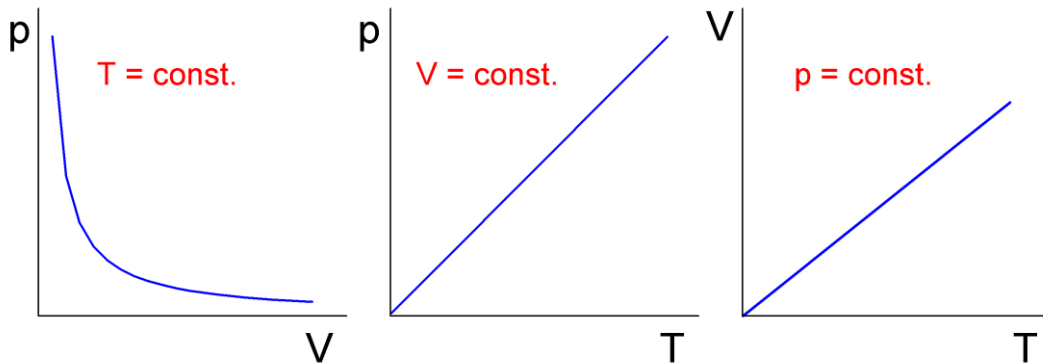
Dane: ciśnienie  $p = 1 \text{ atm.} = 101325 \text{ Pa}$ ,  $\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$ .

Prędkość średnią kwadratową obliczamy ze wzoru (15.12)  $v_{\text{sr.kw.}} = \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$

Po podstawieniu danych otrzymujemy  $v_{\text{sr.kw.}} = 483 \text{ m/s}$

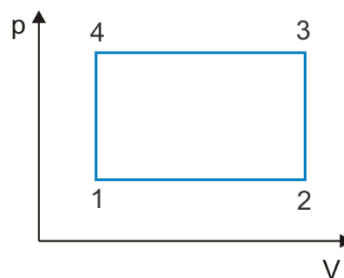
### Ćwiczenie 15.2

Dane: Prawo Boyle'a-Mariotte'a  $T = \text{const.}$ ; Prawo Charlesa  $V = \text{const.}$ ; Prawo Gay-Lussaca  $p = \text{const.}$



### Ćwiczenie 15.3

Dane:  $V_1 = V_4 = 1 \text{ dm}^3$ ,  $V_2 = V_3 = 2 \text{ dm}^3$ ,  $p_1 = p_2 = 1 \text{ atm.}$  oraz  $p_3 = p_4 = 1.01 \text{ atm.}$



Na odcinku 1→2 gaz rozpręża się pod stałym ciśnieniem  $p_1$  od objętości  $V_1$  do objętości  $V_2$  wykonując pracę  $W_1 = p\Delta V = 101 \text{ J}$ . Zgodnie z równaniem stanu gazu doskonałego  $pV = nRT$  temperatura gazu rośnie i rośnie jego energia wewnętrzna.

Na odcinku 2→3 objętość gazu jest stała i w związku z tym praca jest równa zero. Ciśnienie gazu rośnie od  $p_2$  do  $p_3$  więc temperatura gazu rośnie i rośnie jego energia wewnętrzna.

Na odcinku 3→4 gaz jest sprężany pod stałym ciśnieniem  $p_3$  od objętości  $V_3$  do objętości  $V_4$  więc praca wykonana nad układem  $W_2 = p\Delta V = 102 \text{ J}$ . Temperatura gazu maleje i maleje jego energia wewnętrzna.

Na odcinku 4→1 objętość gazu jest stała i w związku z tym praca jest równa zero. Ciśnienie gazu maleje od  $p_4$  do  $p_1$  więc temperatura gazu maleje i maleje jego energia wewnętrzna.

Przemiana	znak (+/0/-)	
	$W$	$\Delta U$
1→2	+	+
2→3	0	+
3→4	-	-
4→1	0	-
1→2→3→4→1	-	0

Praca wypadkowa w całym cyklu jest równa różnicy  $W_1 - W_2$  i liczbowo odpowiada polu zawartemu pomiędzy liniami na wykresie  $p(V)$  (pole prostokąta). Ponieważ energia wewnętrzna jest funkcją stanu więc jej zmiana na drodze zamkniętej jest równa zero.

### Ćwiczenie 15.5

Dane: przemiana adiabatyczna,  $V_2/V_1 = 9$ .

Dla przemiany adiabatycznej  $pV^\kappa = \text{const.}$  więc  $p_1V_1^\kappa = p_2V_2^\kappa$ .

Podstawiając na podstawie równania stanu gazu doskonałego  $p = \frac{NkT}{V}$  otrzymujemy

$$T_1V_1^{\kappa-1} = T_2V_2^{\kappa-1}$$

skąd

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}$$

Dla cząstek dwuatomowych  $c_v = \frac{5}{2}R$ , a  $c_p = c_v + R = \frac{7}{2}R$ , więc  $\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5}$ .

Podstawiając dane otrzymujemy  $\frac{T_2}{T_1} = 0.42$ .

### Ćwiczenie 16.1

Dane:  $t_1 = 227^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 127^\circ\text{C}$ .

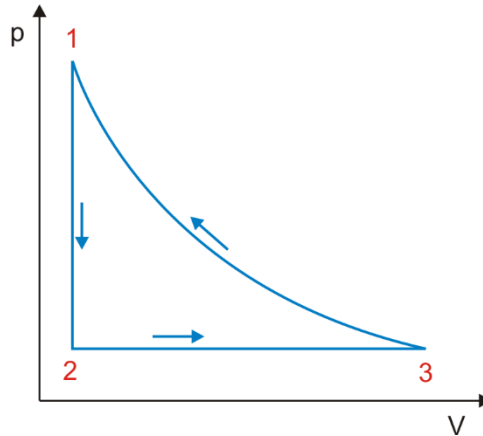
Maksymalną sprawność (to jest sprawność dla cyklu Carnota) obliczamy z wyrażenia

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

gdzie temperatury  $T_1$  i  $T_2$  są temperaturami mierzonymi w skali bezwzględnej. Podstawiając  $T_1 = 500\text{ K}$  i  $T_2 = 400\text{ K}$  otrzymujemy  $\eta = 0.2$  (20%).

## Test V

1. W komorze laboratoryjnej osiągnięto próżnię  $10^{-8}$  Pa. Jaka ilość cząsteczek znajduje się w  $1\text{cm}^3$  takiej komory w temperaturze  $20^\circ\text{C}$ ?
2. Na rysunku poniżej pokazano cykl przemian gazu doskonałego w układzie współrzędnych  $p - V$ . Narysuj ten sam cykl we współrzędnych  $p - T$ .



3. Jak zmieni się średnia wartość energii kinetycznej jednego mola argonu (gaz jednoatomowy) jeżeli dostarczymy mu  $Q = 3000$  J ciepła w warunkach stałej objętości.
4. Jakie jest ciepło właściwe na gram a) helu (masa atomowa 4, gaz jednoatomowy), b) wodoru (masa atomowa 1, gaz dwuatomowy), c) tlenu (masa atomowa 16, gaz dwuatomowy) jeżeli gazy te utrzymujemy w stałej objętości?
5. Jeden mol tlenu (gaz dwuatomowy) został ogrzany od temperatury  $300$  K do  $400$  K przy stałym ciśnieniu. Jaką ilość ciepła dostarczono do układu, jaka jest zmiana jego energii wewnętrznej i jaka praca została wykonana?
6. Jeden mol powietrza pod ciśnieniem  $p_1 = 10^5$  Pa i o objętości  $V_1 = 22.4$  l, został sprężony do połowy objętości początkowej a) izotermicznie, b) izobarycznie. Porównaj pracę wykonaną w obu przypadkach.
7. Silnik Carnota pracuje ze sprawnością  $\eta_1 = 40\%$ . Jak należy zmienić temperaturę grzejnika, aby sprawność wzrosła do  $\eta_2 = 50\%$ . Temperatura chłodnicy jest stała i wynosi  $300$  K.
8. Oblicz zmianę entropii  $1$  g lodu o temperaturze  $0^\circ\text{C}$ , który topi się w sposób odwracalny przechodząc w wodę o tej samej temperaturze. Ciepło topnienia wynosi  $3.3 \cdot 10^5$  J/kg.

# MODUŁ VI

## 17 Pole elektryczne

Przechodzimy teraz do omówienia oddziaływania elektromagnetycznego. Oddziaływanie to ma fundamentalne znaczenie bo pozwala wyjaśnić nie tylko zjawiska elektryczne ale też siły zespalaające materię na poziomie atomów, cząsteczek.

### 17.1 Ładunek elektryczny

Istnienie ładunków można stwierdzić w najprostszym znanym nam powszechnie zjawisku elektryzowania się ciał. Doświadczenie pokazuje, że w przyrodzie mamy do czynienia z dwoma rodzajami ładunków: dodatnimi i ujemnymi, oraz że ładunki jednoimienne odpychają się, a różnoimienne przyciągają się.



#### Jednostki

W układzie SI jednostką ładunku jest *kulomb* (C). Jest to ładunek przenoszony przez prąd o natężeniu 1 ampera w czasie 1 sekundy  $1\text{ C} = 1\text{ A}\cdot\text{s}$ .

#### 17.1.1 Kwantyzacja ładunku

Również doświadczalnie stwierdzono, że żadne naładowane ciało nie może mieć ładunku mniejszego niż ładunek elektronu czy protonu. Ładunki te równe co do wartości bezwzględnej nazywa się *ładunkiem elementarnym*  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{ C}$ . Wszystkie realnie istniejące ładunki są wielokrotnością ładunku  $e$ . Jeżeli wielkość fizyczna, taka jak ładunek elektryczny, występuje w postaci określonych "porcji" to mówimy, że wielkość ta jest *skwantowana*.

#### 17.1.2 Zachowanie ładunku

Jednym z podstawowych praw fizyki jest zasada zachowania ładunku. Zasada ta sformułowana przez Franklina mówi, że



#### Prawo, zasada, twierdzenie

*Wypadkowy ładunek elektryczny w układzie zamkniętym jest stały.*

### 17.2 Prawo Coulomba

Siłę wzajemnego oddziaływania dwóch naładowanych punktów materialnych (*ładunków punktowych*) znajdujących się w odległości  $r$  od siebie w próżni opisuje prawo Coulomba



#### Prawo, zasada, twierdzenie

*Każde dwa ładunki punktowe  $q_1$  i  $q_2$  oddziałują wzajemnie siłą wprost proporcjonalną do iloczynu tych ładunków, a odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między nimi.*

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (17.1)$$

gdzie stała  $k = 1/4\pi\epsilon_0$ . Współczynnik  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)$  nosi nazwę przenikalności elektrycznej próżni.

Oddziaływanie ładunków zależy od ośrodka w jakim znajdują się ładunki. Fakt ten uwzględniamy wprowadzając stałą materiałową  $\epsilon_r$ , zwaną względną przenikalnością elektryczną ośrodka tak, że prawo Coulomba przyjmuje postać

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q_1q_2}{r^2} \quad (17.2)$$

Wartości  $\epsilon_r$  dla wybranych substancji zestawiono w tabeli 17.1.

Tab. 17.1. Względne przenikalności elektryczne.

ośrodek	$\epsilon_r$
próżnia	1
powietrze	1.0006
parafina	2
szkło	10
woda	81



### Ćwiczenie 17.1

Spróbuj teraz korzystając z prawa Coulomba obliczyć siłę przyciągania elektrostatycznego pomiędzy elektronem i protonem w atomie wodoru. Przyjmij  $r = 5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ . Porównaj tę siłę z siłą przyciągania grawitacyjnego między tymi cząstkami. Masa protonu  $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ , a masa elektronu  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ . Stała grawitacyjna  $G = 6.7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ .

Wyniki zapisz poniżej.

$$F_E =$$

$$F_E/F_G =$$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.



### Ćwiczenie 17.2

Jeżeli rozwiązałeś powyższy przykład to postaraj się rozwiązać następujący problem. Cała materia składa się z elektronów, protonów i obojętnych elektrycznie neutronów. Jeżeli oddziaływania elektrostatyczne pomiędzy naładowanymi cząstkami (elektronami, protonami) są tyle razy większe od oddziaływań grawitacyjnych to dlaczego obserwujemy słabą siłę grawitacyjną działającą pomiędzy ciałami, np. Ziemią i spadającym kamieniem, a nie siłę elektrostatyczną?

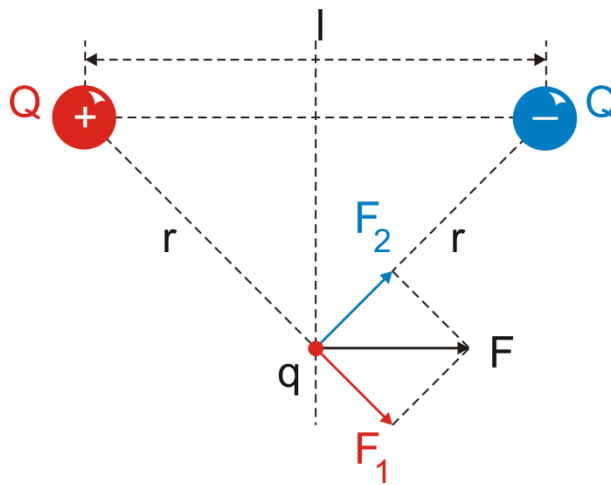
## 17.2.1 Zasada superpozycji


**Prawo, zasada, twierdzenie**

Gdy mamy do czynienia z kilkoma naładowanymi ciałami, siłę wypadkową, analogicznie jak w przypadku siły grawitacyjnej, obliczamy dodając wektorowo poszczególne siły dwuciałowe.


**Przykład**

Dipol elektryczny składa się z dwóch ładunków  $+Q$  i  $-Q$  oddalonych od siebie o  $l$ . Obliczmy siłę jaka jest wywierana na dodatni ładunek  $q$  umieszczony na symetrycznej dipola, tak jak pokazano na rysunku 17.1.



Rys. 17.1. Siły wywierane przez dipol elektryczny na ładunek  $q$

Z podobieństwa trójkątów wynika, że

$$\frac{F}{F_1} = \frac{l}{r} \quad (17.3)$$

Korzystając z prawa Coulomba otrzymujemy

$$F = \frac{l}{r} F_1 = \frac{l}{r} \left( k \frac{Qq}{r^2} \right) = qk \frac{Ql}{r^3} = qk \frac{p}{r^3} \quad (17.4)$$

gdzie  $p = Ql$  jest *momentem dipolowym*  $\mathbf{P}$ .

**17.3 Pole elektryczne**

W rozdziale 6 (moduł I) zdefiniowaliśmy natężenie pola grawitacyjnego w dowolnym punkcie przestrzeni jako siłę grawitacyjną działającą na masę  $m$  umieszczoną w tym punkcie przestrzeni podzieloną przez tę masę.



**Definicja**

Analogicznie definiujemy natężenie pola elektrycznego jako siłę działającą na ładunek próbny  $q$  (umieszczony w danym punkcie przestrzeni) podzieloną przez ten ładunek.

Tak więc, żeby zmierzyć natężenie pola elektrycznego  $E$  w dowolnym punkcie przestrzeni, należy w tym punkcie umieścić *ładunek próbny* (ładunek jednostkowy) i zmierzyć wypadkową siłę elektryczną  $F$  działającą na ten ładunek. Należy upewnić się czy obecność ładunku próbnego  $q$  nie zmienia położenia innych ładunków. Jeżeli nie, to wtedy

$$E = \frac{F}{q} \quad (17.5)$$

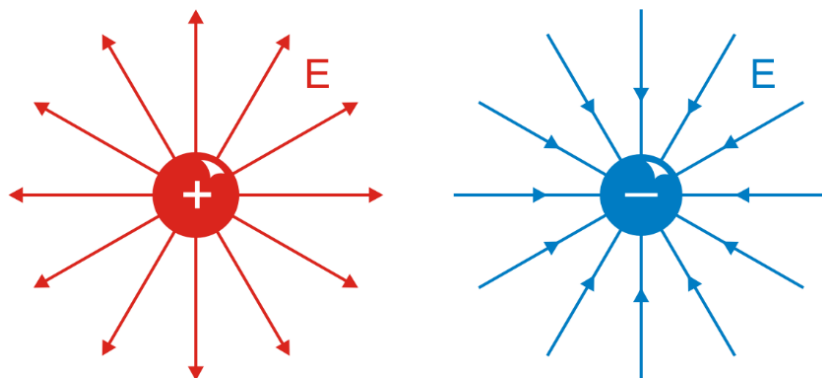
Przyjęto konwencję, że *ładunek próbny jest dodatni* więc kierunek wektora  $E$  jest taki sam jak kierunek siły działającej na ładunek dodatni. Jeżeli pole elektryczne jest wytworzone przez ładunek punktowy  $Q$  to zgodnie z prawem Coulomba (17.1) siła działająca na ładunek próbny  $q$  umieszczony w odległości  $r$  od tego ładunku wynosi

$$F = k \frac{Qq}{r^2} \quad (17.6)$$

Zwrot wektora  $E$  jest taki jak siły  $F$  więc zgodnie z definicją

$$E = \frac{1}{q} F = \frac{1}{q} \left( k \frac{Qq}{r^2} \hat{r} \right) = k \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad (17.7)$$

gdzie  $\hat{r}$  jest wektorem jednostkowym zgodnym z kierunkiem siły pomiędzy  $Q$  i  $q$ . Na rysunku poniżej jest pokazany wektor  $E(r)$  w wybranych punktach wokół ładunku  $Q$ .



Rys. 17.2. "Mapa" natężenia pola elektrycznego wokół ładunku  $Q$

Dla  $n$  ładunków punktowych pole elektryczne (zgodnie z zasadą superpozycji) jest równe sumie wektorowej pól elektrycznych od poszczególnych ładunków

$$\mathbf{E} = k \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i \quad (17.8)$$

**Przykład**

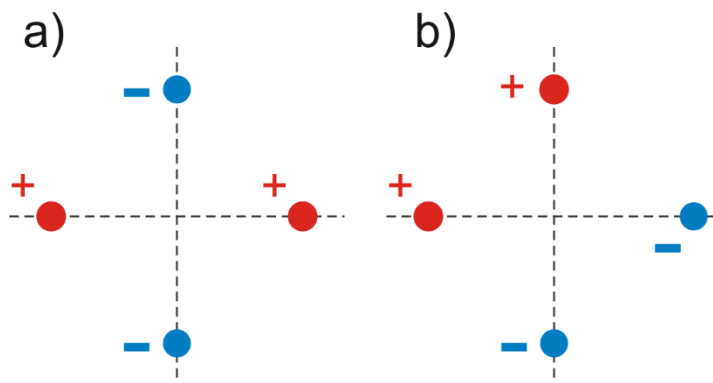
Ponownie rozważamy dipol elektryczny jak w poprzednim przykładzie (rysunek 17.1) tylko teraz obliczamy siłę działającą nie na "jakiś" ładunek tylko na ładunek próbny  $q$ . Korzystając z otrzymanej dla dipola zależności (17.4) obliczamy wartość  $E$

$$E = \frac{kq \left( \frac{p}{r^3} \right)}{q} = k \frac{p}{r^3} \quad (17.9)$$

Zwrot wektora  $E$  jest taki jak siły wypadkowej  $F$  na rysunku 17.1.

**Ćwiczenie 17.3**

Spróbuj teraz samodzielnie znaleźć natężenie pola elektrycznego w środku układu czterech ładunków pokazanych na rysunkach poniżej. Wszystkie ładunki znajdują się w jednakowych odległościach  $r$  od środka i mają jednakowe wartości bezwzględne  $Q$ .



Wykreśl na rysunkach wektory natężeń pola elektrycznego od poszczególnych ładunków i wektor natężenia wypadkowego. Oblicz wartości natężeń. Wyniki zapisz poniżej.


$E_A =$

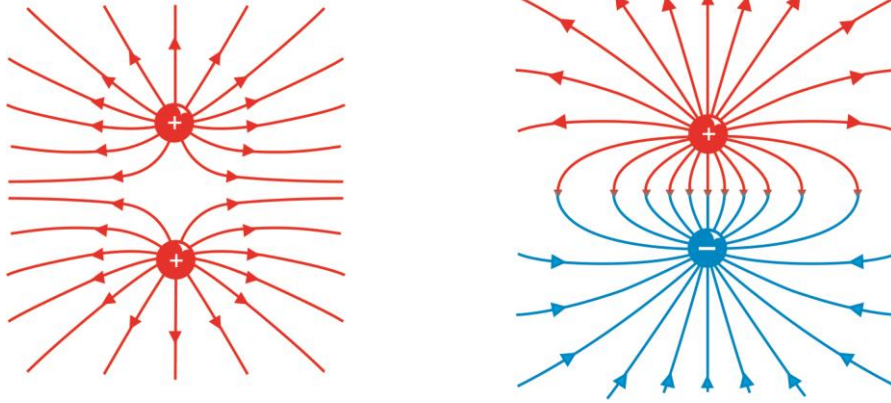
$E_B =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.



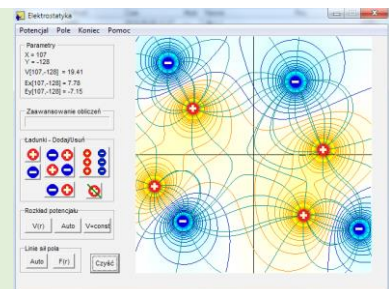
Z zasady superpozycji możemy również skorzystać dla ciągłych rozkładów ładunków. Przykład takich obliczeń znajdziesz w *Dodatku 1*, na końcu modułu VI.

Kierunek pola  $E$  w przestrzeni można przedstawić graficznie za pomocą tzw. *linii sił (linii pola)* . Są to linie, do których wektor  $E$  jest styczny w każdym punkcie. Linie sił zaczynają się zawsze na ładunkach dodatnich, a kończą na ładunkach ujemnych. Linie sił rysuje się tak, że liczba linii przez jednostkową powierzchnię jest proporcjonalna do wartości  $E$ ; gdy linie są blisko siebie to  $E$  jest duże, a gdy są odległe od siebie to  $E$  jest małe. Na rysunku poniżej pokazane są linie pola dla dwóch przykładowych układów ładunków.




Rys. 17.3. Linie sił pola elektrycznego dla układu dwóch ładunków jedno- i różnoimiennych

Możesz prześledzić rozkład linii sił pola dla różnych układów ładunków korzystając z programu komputerowego „Elektrostatyka” dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.



## 18 Prawo Gaussa

### 18.1 Strumień pola elektrycznego

Z podanych w poprzednim paragrafie przykładów widać, że obliczanie pól elektrostatycznych metodą superpozycji może być skomplikowane matematycznie. Istnieje jednak, prostszy sposób obliczania pól, który opiera się na wykorzystaniu prawa Gaussa. Żeby móc z niego skorzystać poznamy najpierw pojęcie *strumienia pola elektrycznego* .

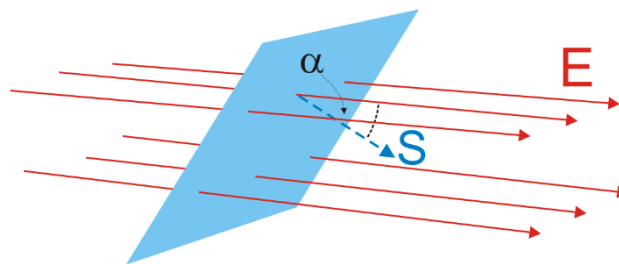


#### Definicja

*Strumień  $\phi$  pola elektrycznego przez powierzchnię  $S$  definiujemy jako iloczyn skalarny wektora powierzchni  $S$  i natężenia pola elektrycznego  $E$ .*

$$\phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} = ES \cos \alpha \quad (18.1)$$

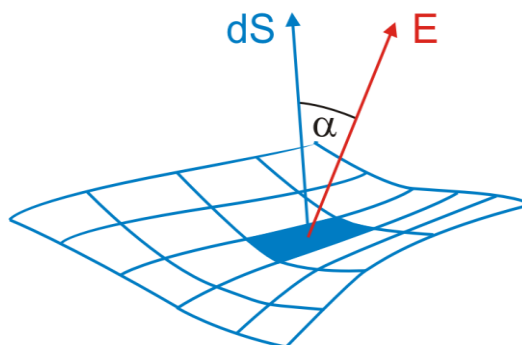
gdzie  $\alpha$  jest kątem pomiędzy wektorem powierzchni  $S$  (przypomnij sobie definicję wektora powierzchni z punktu 14.1 w module 4) i wektorem  $E$  (rysunek 18.1)



Rys. 18.1. Strumień pola elektrycznego  $E$  przez powierzchnię  $S$

Jeżeli wektor natężenia pola  $E$ , w różnych punktach powierzchni  $S$ , ma różną wartość i przecina tę powierzchnię pod różnymi kątami (rysunek 18.2) to wówczas dzielimy powierzchnię na małe elementy  $dS$  i obliczamy iloczyn skalarny wektora powierzchni  $dS$  i lokalnego natężenia pola elektrycznego.

$$d\phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = EdS \cos \alpha \quad (18.2)$$



Rys. 18.2. Strumień pola  $E$  przez elementarną powierzchnię  $dS$  definiujemy jako iloczyn  $d\phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$

*Całkowy strumień* przechodzący przez rozciągłą powierzchnię  $S$  obliczamy jako sumę przyczynków dla elementarnych powierzchni  $dS$ .

$$\phi = \sum_{\text{powierzchnia}} \mathbf{E} d\mathbf{S} \quad (18.3)$$

Suma ta przedstawia całkę powierzchniową

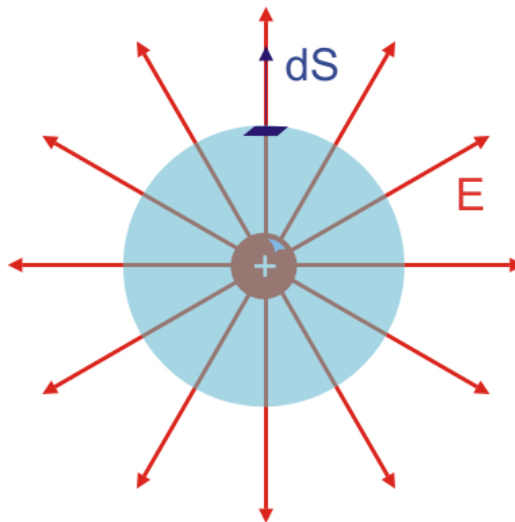
$$\phi = \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} \quad (18.4)$$

W praktyce najczęściej oblicza się strumień przez *powierzchnię zamkniętą*.



### Przykład

Obliczmy teraz strumień dla ładunku punktowego  $Q$  w odległości  $r$  od niego. W tym celu rysujemy sferę o promieniu  $r$  wokół ładunku  $Q$  (rysunek 18.3) i liczymy strumień przechodzących przez tę powierzchnię.



Rys. 18.3. Strumień pola elektrycznego przez zamkniętą sferyczną powierzchnię

Pole  $\mathbf{E}$  ma jednakową wartość w każdym punkcie sfery i jest prostopadłe do powierzchni (równoległe do wektora powierzchni  $d\mathbf{S}$ ) więc w każdym punkcie  $\alpha = 0$  i całkowity strumień wynosi


$$\phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} = E(4\pi r^2) = \left(k \frac{Q}{r^2}\right)(4\pi r^2) = 4\pi kQ = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (18.5)$$

Otrzymany strumień nie zależy od  $r$ , a zatem strumień jest *jednakowy dla wszystkich  $r$* . Całkowy strumień pola  $\mathbf{E}$  wytworzonego przez ładunek  $Q$  jest równy  $Q/\epsilon_0$ .

Pokazaliśmy, że strumień jest niezależny od  $r$ . Można również pokazać, że strumień jest taki sam dla *każdej zamkniętej powierzchni* (o dowolnym kształcie), która otacza ładunek  $Q$ .



Więcej na ten temat możesz dowiedzieć się z *Dodatku 2*, na końcu modułu VI.

Wybór powierzchni w kształcie sfery, w powyższym przykładzie, był podyktowany symetrią układu i pozwolił najłatwiej wykonać odpowiednie obliczenia. Taką całkowicie zamkniętą powierzchnię nazywamy *powierzchnią Gaussa* .

## 18.2 Prawo Gaussa

Rozpatrzmy zamkniętą powierzchnię obejmującą dwa ładunki  $Q_1$  i  $Q_2$ . Całkowity strumień (liczba linii sił) przechodzący przez powierzchnię otaczającą ładunki  $Q_1$  i  $Q_2$  jest równy

$$\phi_c = \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) d\mathbf{S} = \oint \mathbf{E}_1 d\mathbf{S} + \oint \mathbf{E}_2 d\mathbf{S} \quad (18.6)$$

gdzie pole  $E_1$  jest wytwarzane przez  $Q_1$ , a pole  $E_2$  przez  $Q_2$ . Kółko na znaku całki oznacza, że powierzchnia całkowania jest zamknięta. Korzystając z otrzymanego wcześniej wyniku (18.5) mamy

$$\phi_c = \frac{Q_1}{\epsilon_0} + \frac{Q_2}{\epsilon_0} = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0} \quad (18.7)$$

*Całkowity strumień* pola elektrycznego przez zamkniętą powierzchnię jest więc równy *całkowitemu ładunkowi* otoczonemu przez tę powierzchnię podzielonemu przez  $\epsilon_0$ . Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla dowolnej liczby ładunków wewnątrz dowolnej zamkniętej powierzchni. Otrzymujemy więc ogólny związek znany jako *prawo Gaussa*

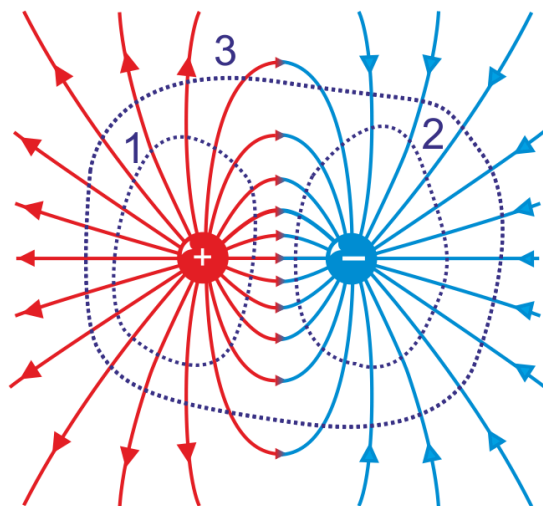


### Prawo, zasada, twierdzenie

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi k Q_{wewn.} = \frac{Q_{wewn.}}{\epsilon_0} \quad (18.8)$$

Strumień wychodzący z naładowanego ciała jest równy wypadkowemu ładunkowi tego ciała podzielonemu przez  $\epsilon_0$ . Jeżeli wypadkowy ładunek ciała jest ujemny to strumień pola elektrycznego, tak jak i linie pola, wpływa do ciała. Natomiast gdy ładunek wypadkowy wewnątrz zamkniętej powierzchni jest równy zeru to całkowity strumień też jest równy zeru; tyle samo linii pola wpływa jak i wypływa przez powierzchnię Gaussa. Podobnie jest w sytuacji gdy ładunki znajdują się na zewnątrz zamkniętej powierzchni. Te sytuacje są pokazane na rysunku 18.4 poniżej.

Całkowity strumień przez powierzchnię "1" jest dodatni, strumień przez powierzchnię "2" jest ujemny, a strumień przez powierzchnię "3" jest równy zeru.



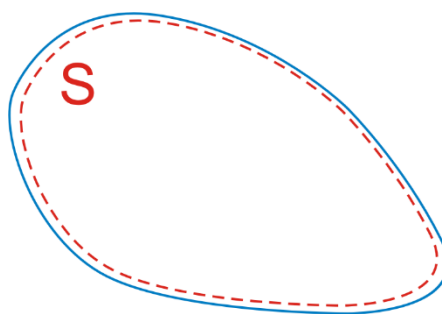
Rys. 18.4. Powierzchnie Gaussa wokół ładunków dodatnich i ujemnych

Teraz przejdziemy do zastosowania prawa Gaussa do obliczania natężenia pola  $E$  dla różnych naładowanych ciał.

### 18.3 Przykłady zastosowania prawa Gaussa I

#### 18.3.1 Izolowany przewodnik

Większość ciał stałych można podzielić na przewodniki i izolatory. W przewodnikach ładunki elektryczne mogą się swobodnie poruszać natomiast w izolatorach (zwanymi także dielektrykami) ładunki pozostają nieruchome. W izolatorze nadmiarowy ładunek może być rozmieszczony w całej jego objętości. Natomiast gdy w przewodniku rozmieścimy ładunek w sposób przypadkowy to będzie on wytwarzał pole elektryczne przemieszczające swobodne elektrony na powierzchnię przewodnika dopóty, dopóki nie zniknie pole wewnątrz przewodnika. Wtedy na ładunki nie działa już siła i otrzymujemy statyczny rozkład ładunku. Sprawdźmy to rozumując posługując się prawem Gaussa. W tym celu rozpatrzmy dowolny w kształcie przewodnik. Wybieramy powierzchnię zamkniętą  $S$  tuż poniżej powierzchni przewodnika tak jak na rys.18.5.

Rys. 18.5. Powierzchnia Gaussa  $S$  leżąca tuż pod powierzchnią przewodnika

Zastosujmy prawo Gaussa do tej powierzchni. Ponieważ wewnątrz przewodnika w dowolnym punkcie powierzchni  $S$  pole musi być równe zero, bo inaczej elektrony poruszałyby się, to otrzymujemy

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = 0 \quad (18.9)$$

Zatem

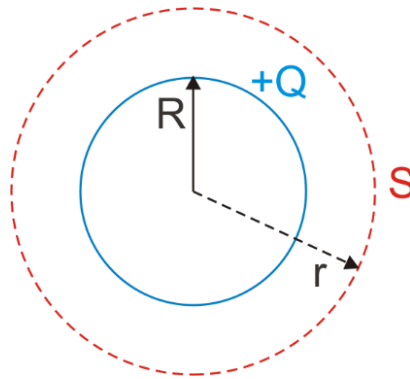
$$0 = \frac{Q_{wewn.}}{\epsilon_0} \quad (18.10)$$

$$Q_{wewn.} = 0$$

Tak więc pokazaliśmy, że ładunek wewnątrz dowolnej zamkniętej powierzchni przewodnika musi być równy zeru; cały ładunek gromadzi się na powierzchni przewodnika.

### 18.3.2 Kuliste rozkłady ładunków - jednorodnie naładowana sfera

Rozpatrzmy powierzchnię kulistą o promieniu  $R$  jednorodnie naładowaną ładunkiem  $Q$ . Chcemy obliczyć pole  $E$  w odległości  $r$  od jej środka na zewnątrz ( $r > R$ ). W tym celu wybieramy powierzchnię Gaussa  $S$  w kształcie sfery o promieniu  $r$  pokazanej na rysunku 18.6.



Rys. 18.6. Jednorodnie naładowana sfera o promieniu  $R$

Ponieważ w dowolnym punkcie powierzchni Gaussa pole  $E$  ma tę samą wartość i jest prostopadłe do powierzchni więc

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = E(4\pi r^2) \quad (18.11)$$

Zatem zgodnie z prawem Gaussa otrzymujemy

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (18.12)$$

lub

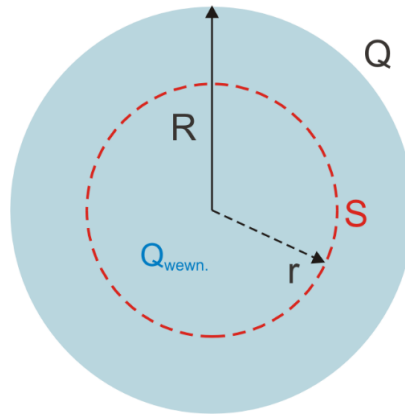
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = k \frac{Q}{r^2} \quad (18.13)$$

Widzimy, że na zewnątrz sfery tj. dla  $r > R$  pole jest takie jakby cały ładunek skupiony był w środku sfery. Natomiast wewnątrz sfery ( $r < R$ )  $Q_{wewn.} = 0$  więc  $E_{wewn.} = 0$ .



### 18.3.3 Kuliste rozkłady ładunków - jednorodnie naładowana kula

Jednorodnie w całej objętości możemy naładować jedynie kulę z izolatora bo w przewodniku cały ładunek gromadzi się na powierzchni. Taka kula może być rozpatrywana z zewnątrz jako szereg współśrodkowych powłok kulistych (opisanych powyżej). Tak więc pole elektryczne na zewnątrz kuli o promieniu  $R$  naładowanej ładunkiem  $Q$ , w odległości  $r$  od jej środka ( $r > R$ ) jest dane wzorem (18.13). Pozostaje więc nam obliczenie pola elektrycznego w dowolnym punkcie wewnątrz kuli czyli w odległości  $r < R$ . Na rysunku 18.7 pokazana jest taka kula i wybrana powierzchnia Gaussa  $S$ .



Rys. 18.7. Kula naładowana jednorodnie ładunkiem  $Q$

Zgodnie z równaniem (18.13) pole elektryczne na powierzchni Gaussa jest równe

$$E = k \frac{Q_{\text{wewn.}}}{r^2} \quad (18.14)$$

gdzie  $Q_{\text{wewn.}}$  jest ładunkiem wewnątrz powierzchni Gaussa. Ponieważ kula jest naładowana równomiernie to

$$Q_{\text{wewn.}} = Q \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = Q \left(\frac{r}{R}\right)^3 \quad (18.15)$$

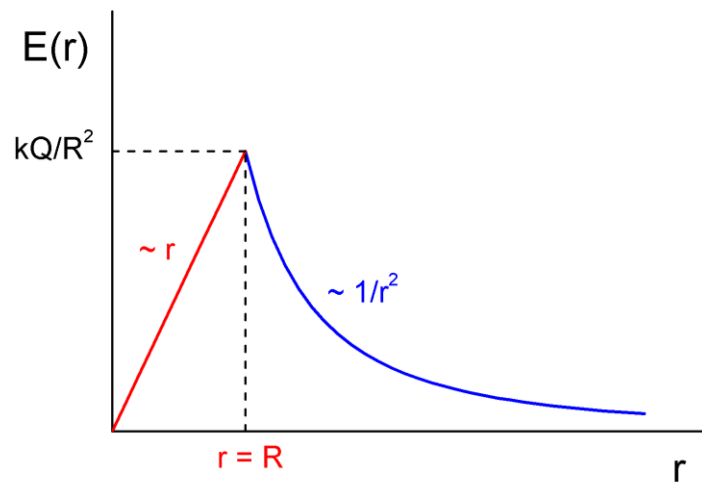
(stosunek objętości kuli o promieniu  $r$  do objętości kuli o promieniu  $R$ ).  
Ostatecznie otrzymujemy dla  $r < R$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \left(\frac{r}{R}\right)^3}{r^2} \quad (18.16)$$

lub

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r = k \frac{Q}{R^3} r \quad (18.17)$$

Wykres natężenia pola  $E$  w funkcji odległości od środka jednorodnie naładowanej kuli jest pokazany na rysunku 18.8.



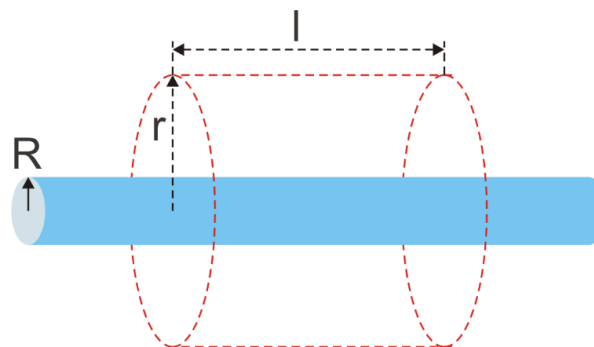
Rys. 18.8. Zależność pola  $E$  od odległości od środka naładowanej kuli o promieniu  $R$

W kolejnej części omówione są liniowe i powierzchniowe rozkłady ładunków.

## 18.4 Przykłady zastosowania prawa Gaussa II

### 18.4.1 Liniowy rozkład ładunków

Obliczymy teraz pole  $E$  w odległości  $r$  od jednorodnie naładowanego pręta (dru) o długości  $l \gg r$ . W tym celu wprowadzamy *liniową gęstość ładunku*  $\lambda$  równą ilości ładunku przypadającego na jednostkę długości pręta  $\lambda = Q/l$ . Ze względu na symetrię układu jako powierzchnię Gaussa wybierzmy walec (oczywiście można wybrać dowolny kształt) o promieniu  $r$  większym od promienia pręta  $R$  bo chcemy policzyć pole na zewnątrz pręta (rysunek 18.9).



Rys. 18.9. Pręt naładowany z gęstością liniową  $\lambda$

Z prawa Gaussa


$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad (18.18)$$

Ze względu na symetrię pole elektryczne  $E$  jest skierowane radialnie względem pręta, tzn. jest prostopadłe do bocznej powierzchni walca (powierzchni Gaussa). Strumień pola  $E$  przez podstawy walca jest więc równy zero bo  $E$  leży na bocznej powierzchni. Ponadto pole elektryczne ma taką samą wartość w każdym punkcie powierzchni bocznej walca więc spełnione jest równanie

$$E2\pi rl = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad (18.19)$$

lub

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (18.20)$$

Teraz obliczymy pole wewnątrz jednorodnie naładowanego pręta. Ponownie wybieramy powierzchnię Gaussa w kształcie walca ale o promieniu  $r < R$ . Wprowadzamy *gęstość objętościową ładunku*  $\rho$   równą ładunkowi przypadającemu na jednostkę objętości. Możemy teraz zapisać ładunek zamknięty wewnątrz powierzchni Gaussa

$$Q_{wewn.} = \rho\pi r^2 l \quad (18.21)$$

Z prawa Gaussa otrzymujemy


$$2\pi rlE = \frac{Q_{wewn.}}{\epsilon_0} = \frac{\rho\pi r^2 l}{\epsilon_0} \quad (18.22)$$

a stąd

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \quad (18.23)$$

Pole rośnie liniowo w miarę oddalania się od środka pręta.

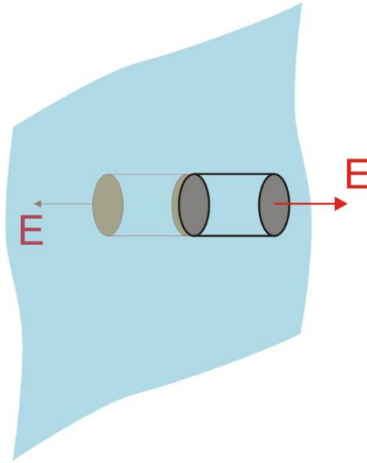
#### 18.4.2 Płaskie rozkłady ładunków

Teraz obliczymy pole od nieskończonej, jednorodnie naładowanej płaszczyzny. W tym celu wprowadzamy *powierzchniową gęstość ładunku*  $\sigma$   równą ilości ładunku przypadającego na jednostkę powierzchni. Powierzchnię Gaussa wybieramy na przykład w postaci walca takiego jak na rysunku 18.10.

Ładunek otoczony przez powierzchnię Gaussa jest równy  $Q_{wewn.} = \sigma S$ , gdzie  $\sigma$  jest gęstością powierzchniową, a  $S$  powierzchnią podstawy walca. Z symetrii wynika, że pole  $E$  jest prostopadłe do płaszczyzny więc nie przecina bocznej powierzchni walca (strumień przez boczną powierzchnię jest równy zero).

Z prawa Gaussa otrzymujemy


$$E2S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad (18.24)$$

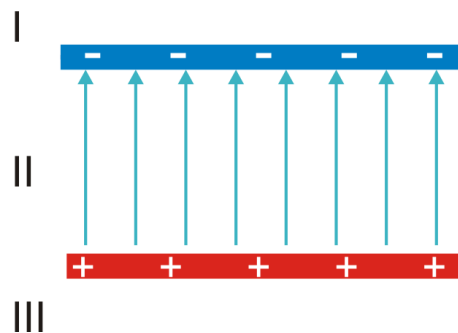


Rys. 18.10. Jednorodnie naładowana nieskończona płaszczyzna

Ostatecznie więc

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (18.25)$$

W praktyce stosuje się, pokazany na rysunku 18.11, układ dwóch płaskich równoległych płyt naładowanych ładunkami jednakowej wielkości ale o przeciwnych znakach (*kondensator płaski* ).



Rys. 18.11. Pole między równoległymi płytami naładowanymi ładunkami tej samej wielkości ale o przeciwnych znakach

Pole wytwarzane przez płytę naładowaną ładunkiem dodatnim jest równe  $E_+ = \sigma/2\varepsilon_0$  i skierowane od płyty. Natomiast pole wytwarzane przez płytę naładowaną ujemnie ma tę samą wartość  $E_- = \sigma/2\varepsilon_0$  ale skierowane jest do płyty. Zatem w obszarze (I)

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \left( -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \right) = 0 \quad (18.26)$$

w obszarze (II)

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (18.27)$$

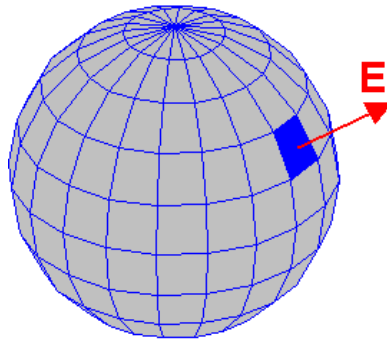
a w obszarze (III)

$$E_1 = \left( -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \right) + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0 \quad (18.28)$$

Widzimy, że na zewnątrz układu pole jest równe zero a pomiędzy płytami ma w każdym punkcie stałą wartość  $\sigma/\varepsilon_0$ . Takie pole nazywamy polem jednorodnym.

### 18.4.3 Powierzchnia przewodnika

Sytuacja jest inna jeżeli naładowana powierzchnia stanowi część powierzchni przewodnika na przykład tak jak na rysunku 18.12.



Rys. 18.12. Element powierzchni przewodnika

Ponieważ cały ładunek gromadzi się na zewnętrznej powierzchni to wewnątrz pole  $E = 0$ . Co więcej  $E$  musi być prostopadłe do powierzchni bo gdyby istniała składowa styczna do powierzchni to elektrony poruszałyby się po niej. Ponownie, jak w przypadku nieskończonej naładowanej płaszczyzny wybieramy powierzchnię Gaussa w kształcie walca (rysunek 18.10) ale tym razem linie pole wychodzą tylko przez jedną podstawę walca  $S$ , na zewnątrz. Z prawa Gaussa wynika, że

$$ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \quad (18.29)$$

a stąd

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (18.30)$$

na powierzchni przewodnika.

## 19 Potencjał elektryczny

### 19.1 Energia potencjalna w polu elektrycznym

Zgodnie z naszymi rozważaniami w punkcie 8.2 (moduł 2), różnica energii potencjalnej  $E_p$  pomiędzy punktami  $A$  i  $B$  jest równa pracy (ze znakiem minus) wykonanej przez siłę zachowawczą przy przemieszczaniu ciała od  $A$  do  $B$  i wynosi

$$E_{pB} - E_{pA} = -W_{AB} = -\int_A^B \mathbf{F} \, d\mathbf{r} \quad (19.1)$$

Dla pola elektrycznego energia potencjalna wynosi

$$E_{pB} - E_{pA} = -W_{AB} = -\int_A^B \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = -q \int_A^B \mathbf{E} \, d\mathbf{r} \quad (19.2)$$

gdzie  $\mathbf{E}$  jest natężeniem pola elektrycznego. Siły elektryczne są siłami zachowawczymi i wartość pracy nie zależy od wyboru drogi pomiędzy punktami  $A$  i  $B$ . Jeżeli teraz podobnie jak dla grawitacyjnej energii potencjalnej przyjmiemy, że energia potencjalna pola elektrycznego jest równa zeru w nieskończoności to wówczas energia potencjalna w danym punkcie  $r$  pola elektrycznego jest dana wyrażeniem

$$E_p(r) = -q \int_{\infty}^r \mathbf{E} \, d\mathbf{r} \quad (19.3)$$

Jeżeli źródłem pola elektrycznego jest ładunek punktowy  $Q$  to energia potencjalna w odległości  $r$  od niego jest równa

$$E_p(r) = -q \int_{\infty}^r k \frac{Q}{r^2} \, dr = -kqQ \left[ -\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r = k \frac{qQ}{r} \quad (19.4)$$

Zauważmy, że energia potencjalna ładunku w polu elektrycznym zależy wielkości tego ładunku.

### 19.2 Potencjał elektryczny

Jak pokazaliśmy w poprzednim paragrafie energia potencjalna ładunku w polu elektrycznym zależy od wielkości tego ładunku. Dlatego do opisu pola elektrycznego lepiej posługiwać się energią potencjalną przypadającą na jednostkowy ładunek czyli potencjałem elektrycznym.



#### Definicja

Potencjał elektryczny definiujemy jako energię potencjalną pola elektrycznego podzieloną przez jednostkowy ładunek.

$$V(r) = \frac{E_p(r)}{q} = \frac{W_{\infty r}}{q} \quad (19.5)$$



### Jednostki

Jednostką potencjału elektrycznego jest *wolt* (V);  $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$ .

Potencjał pola ładunku punktowego  $Q$  możemy otrzymać natychmiast dzieląc równanie (19.4) obustronnie przez  $q$

$$V(r) = k \frac{Q}{r} \quad (19.6)$$

Obliczony potencjał określa pracę potrzebną do przeniesienia jednostkowego ładunku z nieskończoności na odległość  $r$  od ładunku  $Q$ . Potencjał charakteryzuje pole elektryczne; a nie zależy od umieszczonego w nim ładunku.



### Ćwiczenie 19.1



Spróbuj obliczyć potencjał na powierzchni jądra miedzi. Promień jądra wynosi równy  $4.8 \cdot 10^{-15}$  m. Przyjmij, że rozkład 29 protonów w jądrze miedzi jest kulisto-symetryczny. W związku z tym potencjał na zewnątrz jądra jest taki jakby cały ładunek skupiony był w środku i możesz posłużyć się wzorem (19.6). Ponadto oblicz potencjalną energię elektryczną elektronu poruszającego się po pierwszej orbicie w polu elektrycznym jądra miedzi. Przyjmij promień orbity równy  $5 \cdot 10^{-11}$  m.

Wyniki zapisz poniżej.

$V =$

$E_p =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Często w fizyce posługujemy się pojęciem *różnicy potencjałów*  czyli *napięciem*  (oznaczanym  $U$ ). Różnica potencjałów między dwoma punktami  $A$  i  $B$  jest równa pracy potrzebnej do przeniesienia w polu elektrycznym ładunku jednostkowego (próbnego)  $q$  pomiędzy tymi punktami. Wyrażenie na różnicę potencjałów otrzymamy bezpośrednio ze wzoru (19.2) dzieląc to równanie obustronnie przez  $q$

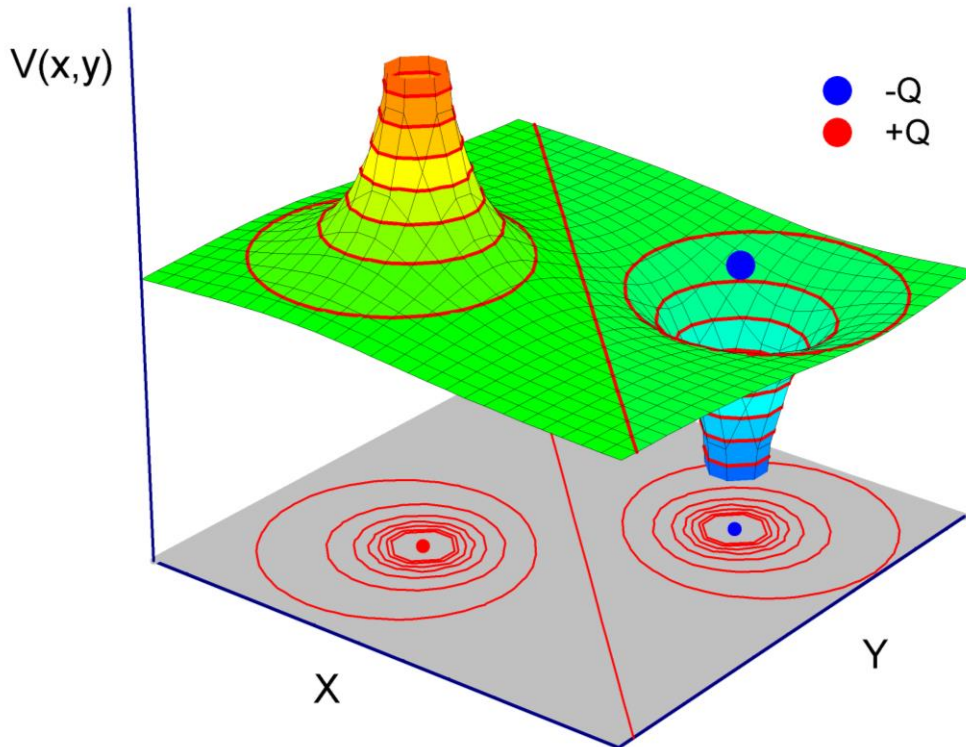
$$V_B - V_A = U = -\frac{W_{AB}}{q} = -\int_A^B \mathbf{E} \, d\mathbf{r} \quad (19.7)$$

Znak minus odzwierciedla fakt, że potencjał maleje w kierunku wektora  $\mathbf{E}$ .

Podobnie jak natężenie pola elektrycznego, które ilustrowaliśmy za pomocą linii sił pola (punkt 17.3) również potencjał elektryczny można przedstawialiśmy graficznie. W tym celu

rysujemy *powierzchnie lub linie ekwipotencjalne*  $\mathcal{P}$ , które przedstawiają w przestrzeni zbiory punktów o jednakowym potencjale.

Jako przykład pokazany jest na rysunku 19.1 poniżej rozkład potencjału, na płaszczyźnie  $xy$ , wokół dipola elektrycznego. Poziomice (linie pogrubione) łączą punkty o jednakowym potencjale (*linie ekwipotencjalne*  $\mathcal{P}$ ). Każda krzywa odpowiada innej stałej wartości potencjału.



Rys. 19.1. Potencjał elektryczny dipola elektrycznego (na płaszczyźnie  $xy$ )

Gdy znamy rozkład potencjału elektrycznego wytworzonego w każdym punkcie przestrzeni przez dany układ ładunków to na podstawie *wielkości zmiany potencjału, przypadającej na jednostkę długości* w danym kierunku możemy określić natężenie pola elektrycznego  $\mathbf{E}$  w tym kierunku. Warunek ten (we współrzędnych  $x, y, z$ ) wyraża się następująco

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (19.8)$$

Możemy więc przy pomocy obliczania pochodnych cząstkowych z wielkości skalarnej (potencjału  $V$ ) otrzymać składowe wielkości wektorowej (pola  $\mathbf{E}$ ) w dowolnym punkcie przestrzeni.



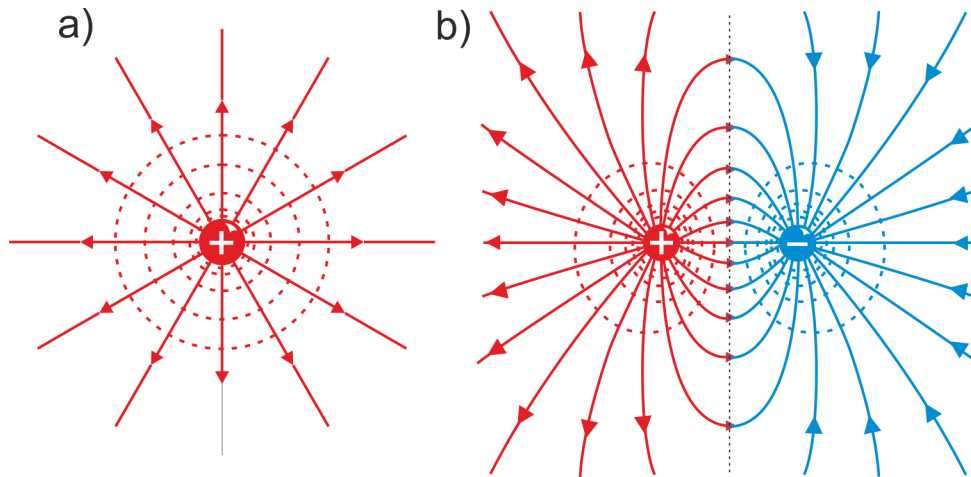
Więcej na ten temat możesz dowiedzieć się z *Dodatku 3*, na końcu modułu VI.



Im większa (mniejsza) zmiana potencjału na jednostkę długości tym większe (mniejsze) pole elektryczne w danym kierunku. Znak minus odzwierciedla fakt, że wektor  $E$  jest skierowany w stronę malejącego potencjału.

Kierunek pola elektrycznego w dowolnym punkcie odpowiada kierunkowi wzdłuż którego potencjał *spada najszybciej* co oznacza, że linie sił pola są *prostopadłe* do powierzchni (linii) ekwipotencjalnych.

Zostało to zilustrowane na rysunku poniżej gdzie pokazane są powierzchnie ekwipotencjalne (linie ich przecięcia z płaszczyzną rysunku) oraz linie sił pola (a) ładunku punktowego, (b) dipola elektrycznego (porównaj z rysunkiem 19.1).



Rys. 19.2. Powierzchnie ekwipotencjalne (linie przerywane) i linie sił pola (linie ciągłe): (a) ładunku punktowego, (b) dipola elektrycznego; linie ekwipotencjalne oznaczają przecięcia powierzchni ekwipotencjalnych z płaszczyzną rysunku

Wzory wyrażające związek pomiędzy potencjałem i polem elektrycznym są bardzo użyteczne bo na ogół łatwiej obliczyć i zmierzyć potencjał niż natężenie pola.

Możesz prześledzić rozkład linii (powierzchni) ekwipotencjalnych dla różnych układów ładunków korzystając z programu komputerowego „Elektrostatyka” dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.

W punkcie 18.3. pokazaliśmy, że cały ładunek umieszczony na izolowanym przewodniku gromadzi się na jego powierzchni i że pole  $E$  musi być prostopadłe do powierzchni bo gdyby istniała składowa styczna do powierzchni to elektrony przemieszczałyby się. W oparciu o wyrażenie (19.7) możemy podać alternatywne sformułowanie. Jeżeli pole  $E$  wzdłuż powierzchni przewodnika równa się zero to różnica potencjałów też równa się zero  $\Delta V = 0$ . Oznacza to, że

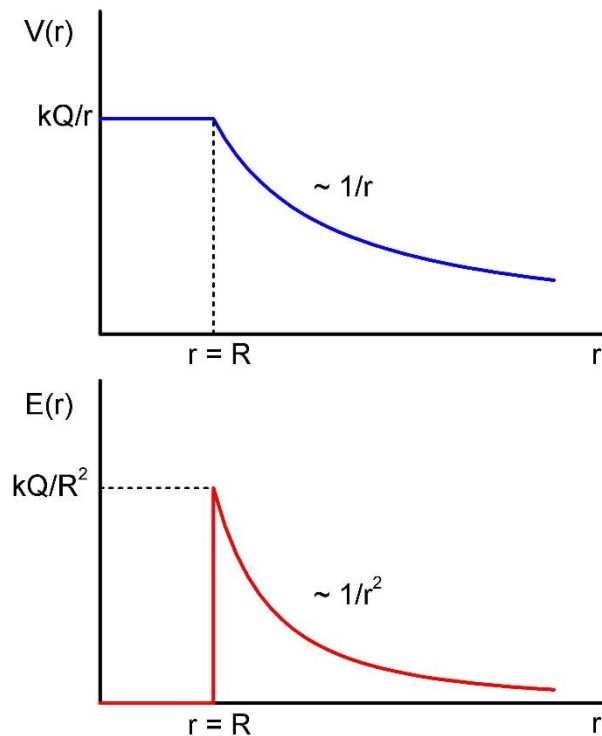
**Prawo, zasada, twierdzenie**

*Powierzchnia każdego przewodnika w stanie ustalonym jest powierzchnią stałego potencjału (powierzchnią ekwipotencjalną).*

Teraz przejdziemy do obliczeń potencjału elektrycznego dla różnych naładowanych ciał.

**19.3 Obliczanie potencjału elektrycznego**

Jako przykład rozważymy różnicę potencjałów między powierzchnią i środkiem sfery o promieniu  $R$  naładowanej jednorodnie ładunkiem  $Q$ . Jak pokazaliśmy w punkcie 18.3 pole elektryczne wewnątrz naładowanej sfery ( $r < R$ ) jest równe zero  $E = 0$ . Oznacza to (równanie 19.7), że różnica potencjałów też jest równa zero  $V_B - V_A = 0$ , to znaczy potencjał w środku jest taki sam jak na powierzchni sfery. Natomiast na zewnątrz (dla  $r \geq R$ ) potencjał jest taki jak dla ładunku punktowego skupionego w środku sfery, czyli jest dany równaniem (19.6). Zależność potencjału i odpowiadającego mu natężenia pola od odległości od środka naładowanej sfery jest pokazana na rysunku 19.3.



Rys. 19.3. Porównanie zależności potencjału i natężenia pola elektrycznego od odległości od środka naładowanej sfery

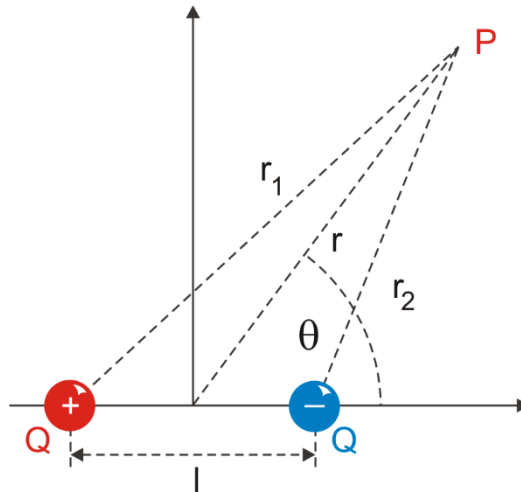
Porównując dwa powyższe wykresy  $V(r)$  i  $E(r)$  możemy zauważyć, że istnieje między nimi związek dany wyrażeniem

$$E(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \quad (19.9)$$

W każdym punkcie natężenie pola  $E(r)$  jest równe nachyleniu wykresu  $V(r)$  ze znakiem minus.

Ten związek pomiędzy natężeniem pola i potencjałem wynika wprost z równania (19.7) bo na jego mocy  $dV = \mathbf{E} d\mathbf{r}$ .

Obliczanie potencjału dla układu ładunków punktowych prześledzimy na przykładzie potencjału dipola. W tym celu rozpatrzmy punkt  $P$  odległy o  $r$  od środka dipola tak jak to widać na rys. 19.4. Położenie punktu  $P$  jest określone poprzez  $r$  i  $\theta$ .



Rys. 19.4. Dipol elektryczny

Korzystamy z zasady superpozycji:



**Prawo, zasada, twierdzenie**

*Całkowity potencjał pola pochodzącego od układu ładunków punktowych w dowolnym punkcie obliczamy sumując potencjały od poszczególnych ładunków.*

Dlatego potencjał w punkcie  $P$  pochodzący od ładunków  $Q$  i  $-Q$  wynosi

$$\begin{aligned} V &= \sum_n V_n = V_+ + V_- = k \frac{Q}{r_1} + k \frac{(-Q)}{r_2} \\ &= kQ \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = kQ \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \end{aligned} \quad (19.10)$$

To jest ściśle wyrażenie na potencjał dipola ale do jego obliczenia trzeba znać  $r_1$  oraz  $r_2$ . My natomiast rozważymy tylko punkty odległe od dipola, dla których  $r \gg l$ . Dla takich punktów możemy przyjąć z dobrym przybliżeniem, że  $r_2 - r_1 \approx l \cos \theta$  oraz  $r_1 r_2 \approx r^2$ . Po uwzględnieniu tych zależności wyrażenie na potencjał przyjmuje postać

$$V = kQ \frac{l \cos \theta}{r^2} = k \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (19.11)$$

gdzie  $p = Ql$  jest momentem dipolowym.

**Ćwiczenie 19.2**

Wykonaj ściśle obliczenia potencjału elektrycznego tego dipola w punkcie leżącym odpowiednio: a) na symetralnej dipola tj. na osi  $y$  w odległości  $r$  od jego środka, b) na dodatniej półosi  $x$  w odległości  $r$  od środka dipola, c) na ujemnej półosi  $x$  w odległości  $r$  od środka dipola. Wyniki zapisz poniżej.

$$V_A =$$

$$V_B =$$

$$V_C =$$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Na zakończenie wrócimy do przykładu z punktu 18.4 i obliczymy różnicę potencjałów dla dwóch przeciwnie naładowanych płyt o polu powierzchni  $S$  każda, znajdujących się w odległości  $d$  od siebie. Ładunki na płytach wynoszą odpowiednio  $+Q$  i  $-Q$  więc gęstość powierzchniowa ładunku  $\sigma = Q/S$ . Ze wzoru (19.7) wynika, że

$$\Delta V = Ed \quad (19.12)$$

a ponieważ, zgodnie z naszymi obliczeniami, pole pomiędzy płytami jest równe  $E = \sigma/\epsilon_0$  więc


$$\Delta V = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \quad (19.13)$$

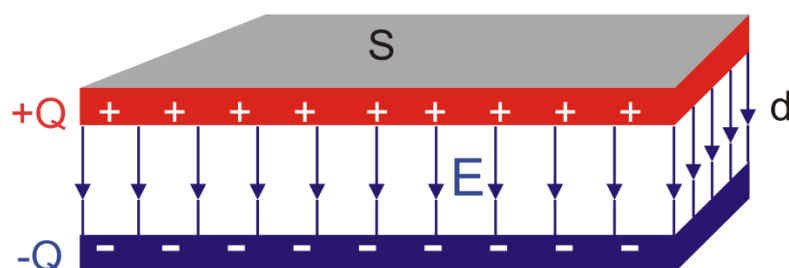
lub

$$\Delta V = \frac{Qd}{\epsilon_0 S} \quad (19.14)$$

## 20 Kondensatory i dielektryki

### 20.1 Pojemność elektryczna

Układ dwóch przewodników, który może gromadzić ładunek elektryczny, przy przyłożonej różnicy potencjałów, nazywamy *kondensatorem* , a te przewodniki okładkami kondensatora. Rysunek 20.1 przedstawia kondensator płaski, w którym przewodniki (okładki) stanowią dwie równoległe płytki przewodzące.



Rys. 20.1. Kondensator płaski

Wielkością charakteryzującą kondensator jest jego pojemność, która definiujemy następująco



#### Definicja

*Pojemnością elektryczną nazywamy stosunek ładunku kondensatora do różnicy potencjałów (napięcia) między okładkami.*

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (20.1)$$

Zwróćmy uwagę, że  $Q$  jest ładunkiem na każdym przewodniku, a nie ładunkiem wypadkowym na kondensatorze (ładunek wypadkowy równy jest zeru).

Pojemność kondensatora płaskiego możemy obliczyć z definicji (20.1) korzystając z równania (19.14)

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (20.2)$$

Zauważmy, że pojemność zależy od *kształtu okładek*, ich *rozmiaru* i *wzajemnego położenia*. Oznacza to, że dla kondensatorów o innej geometrii obowiązują inne wzory. Równanie (20.2) obowiązuje dla kondensatora płaskiego znajdującego się w próżni. Zależność pojemności kondensatora od przenikalności elektrycznej ośrodka omówimy później.



#### Jednostki

Jednostką pojemności jest *farad* (F);  $1\text{F} = 1\text{C}/1\text{V}$ . Powszechnie stosuje się jednak mniejsze jednostki:  $\mu\text{F}$ ,  $\text{nF}$ ,  $\text{pF}$ .

**Ćwiczenie 20.1**

Żeby przekonać się, że farad jest dużą jednostką oblicz pojemność próżniowego kondensatora płaskiego, którego okładki o powierzchni  $1 \text{ cm}^2$  są umieszczone w odległości 1 mm od siebie. Wyniki zapisz poniżej.

$C =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Kondensatory są częścią składową prawie wszystkich układów elektronicznych. W celu dobrania odpowiedniej pojemności powszechnie stosuje się ich łączenie w układy szeregowe lub równoległe.

**Ćwiczenie 20.2**

Spróbuj samodzielnie wyprowadzić (lub podać) wzory na pojemność wypadkową układu kondensatorów połączonych szeregowo i równoległe. Wyniki zapisz poniżej.

Wskazówka: kondensatory połączone szeregowo mają jednakowy ładunek, a połączone równoległe jednakową różnicę potencjałów.

$C_{sz} =$

$C_r =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Definicję pojemności można rozszerzyć na przypadek *pojedynczego izolowanego przewodnika*.

**Definicja**

*Pojemnością elektryczną przewodnika nazywamy stosunek ładunku umieszczonego na przewodniku do potencjału jaki ma ten przewodnik w polu elektrycznym wytworzonym przez ten ładunek.*

$$C = \frac{Q}{V} \quad (20.3)$$

Można więc dany przewodnik uważać za jedną z okładek kondensatora, w którym druga okładka kondensatora znajduje się w nieskończoności i ma potencjał równy zero.

**20.2 Energia pola elektrycznego**

Rozpatrzmy początkowo nienaładowany kondensator, który ładujemy przenosząc elektrony pomiędzy okładkami. Okładka, z której zabieramy elektrony ładuje się dodatnio,

a okładka na którą je przenosimy ujemnie. W wyniku tego postępowania różnica potencjałów rośnie od 0 do  $\Delta V$ , a ładunek na kondensatorze wzrasta od 0 do  $Q$ .

Praca zużyta na przeniesienie porcji ładunku  $dq$  pomiędzy okładkami przy panującej w danej chwili różnicy potencjałów  $\Delta V$  wynosi zgodnie ze wzorem (19.7)

$$dW = \Delta V dq \quad (20.4)$$

Musimy przy tym pamiętać, że w trakcie ładowania kondensatora różnica potencjałów rośnie więc przeniesienie dalszych porcji ładunku jest coraz trudniejsze (wymaga więcej energii). Całkowita praca na przeniesienie ładunku  $Q$ , równa energii potencjalnej zgromadzona w kondensatorze, wynosi zatem

$$W = \int_0^Q \Delta V dq = \int_0^Q \left( \frac{q}{C} \right) dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (20.5)$$

gdzie skorzystaliśmy ze wzoru (20.1) na pojemność.

Przypomnijmy, że dla kondensatora płaskiego (punkt 18.4)

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \quad (20.6)$$

skąd

$$Q = \epsilon_0 S E \quad (20.7)$$

Po podstawieniu do wzoru (20.5) otrzymujemy

$$W = \frac{(\epsilon_0 S E)^2}{2C} \quad (20.8)$$

Uwzględniając wyrażenie (20.2) na pojemność kondensatora płaskiego ostatecznie

$$W = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} Sd \quad (20.9)$$

Zauważmy, że iloczyn  $Sd$  jest objętością kondensatora, więc gęstość energii  $w$  (pola elektrycznego), która jest energią zawartą w jednostce objętości wynosi

$$w = \frac{W}{Sd} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (20.10)$$



#### **Prawo, zasada, twierdzenie**

*Jeżeli w jakimś punkcie przestrzeni istnieje pole elektryczne o natężeniu  $E$  to możemy uważać, że w tym punkcie jest zmagazynowana energia w ilości  $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$  na jednostkę objętości.*

### 20.3 Kondensator z dielektrykiem

Doświadczenie pokazuje, że umieszczenie *dielektryka* (izolatora) pomiędzy okładkami kondensatora zwiększa jego pojemność  $\varepsilon_r$  razy

$$\frac{C'}{C} = \varepsilon_r \quad (20.11)$$

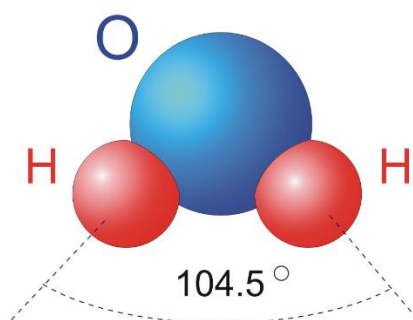
Wielkość  $\varepsilon_r$  nazywamy *względną przenikalnością elektryczną* lub *stałą dielektryczną*. W tabeli poniżej zestawione zostały stałe dielektryczne wybranych materiałów

Tab. 20.1. Stałe dielektryczne wybranych materiałów (w temperaturze pokojowej)

Materiał	Stała dielektryczna
próżnia	1.0000
powietrze	1.0005
teflon	2.1
polietylen	2.3
papier	3.5
szkło (pyrex)	4.5
porcelana	6.5
woda	78
TiO <sub>2</sub>	100

Wzrost pojemności kondensatora w wyniku umieszczenia w nim dielektryka wynika z zachowania się atomów (cząsteczek) dielektryka w polu elektrycznym w kondensatorze, przy czym istnieją dwie możliwości.

Po pierwsze istnieją cząsteczki, w których środek ładunku dodatniego jest trwale przesunięty względem środka ładunku ujemnego. Przykładem może być cząsteczka H<sub>2</sub>O pokazana na rysunku 20.2.



Rys. 20.2. Cząsteczka wody charakteryzującą się trwałym momentem dipolowym

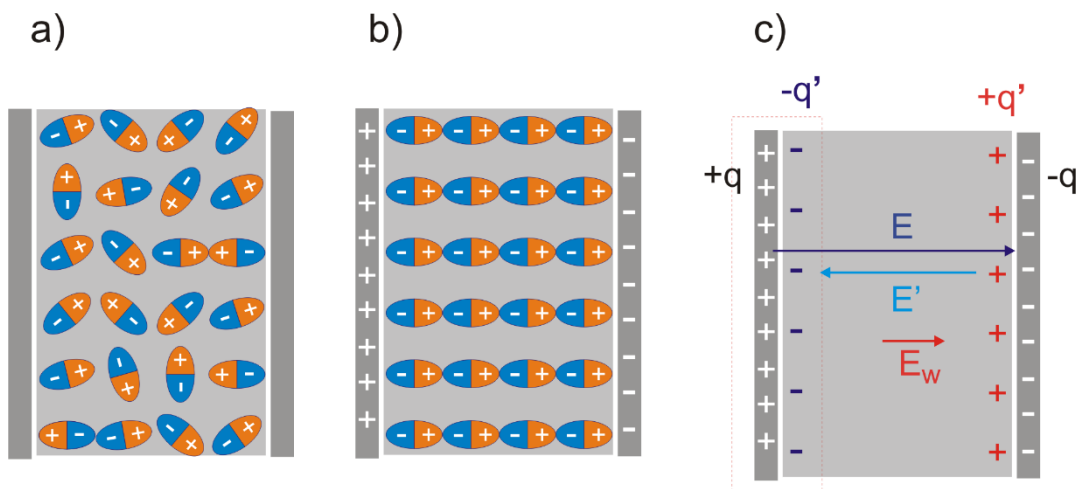
W wyniku charakterystycznej budowy w cząsteczce wody ładunek ujemny jest przesunięty w stronę atomu tlenu, a środek ładunku dodatniego jest bliżej atomów wodoru. Takie cząsteczki mają więc trwały elektryczny moment dipolowy.

Po drugie, w przypadku cząsteczek i atomów nie posiadających trwałych momentów dipolowych taki moment może być *wyindukowany* przez umieszczenie ich w zewnętrznym



polu elektrycznym. Pole działa na ładunki dodatnie (jądra atomowe) i ujemne (chmury elektronowe) rozsuwając ich środki. Atomy (cząsteczki) wykazują elektryczny moment dipolowy, ulegają *polaryzacji*  $\mathcal{P}$ . Przykładowo, jeżeli umieścimy atom wodoru w zewnętrznym polu  $E$ , to siła  $F = -eE$  przesuwa elektron o  $r$  względem protonu. Wówczas atom ma indukowany moment dipolowy  $p = er$ . Ponieważ jest to moment indukowany polem zewnętrznym więc znika, gdy usuniemy pole.

W zerowym polu momenty dipolowe są zorientowane przypadkowo tak jak pokazano na rysunku 20.3a. Natomiast po umieszczeniu w polu elektrycznym trwałe elektryczne momenty dipolowe *dążą do ustawienia zgodnie z kierunkiem pola*, a stopień uporządkowania zależy od wielkości pola i od temperatury (ruchy termiczne cząstek zaburzają uporządkowanie). Natomiast momenty indukowane są *równoległe do kierunku pola*. Cały materiał w polu  $E$  zostaje *spolaryzowany*. Spolaryzowany zewnętrznym polem  $E$  dielektryk (umieszczony w naładowanym kondensatorze) jest pokazany na rysunku 20.3b.



Rys. 20.3. a) niespolaryzowany dielektryk b) polaryzacja dielektryka w zewnętrznym polu  $E$   
 c) wypadkowy rozkład ładunku

Zwróćmy uwagę, że w rezultacie wewnątrz dielektryka ładunki *kompensują się*, a jedynie na powierzchni dielektryka pojawia się *nieskompensowany ładunek  $q'$* . Ładunek dodatni gromadzi się na jednej, a ujemny na drugiej powierzchni dielektryka tak jak pokazano na rysunku 20.3c.

Ładunek  $q$  jest zgromadzony na okładkach, a  $q'$  jest ładunkiem *wyindukowanym na powierzchni dielektryka*. Te wyindukowane ładunki wytwarzają pole elektryczne  $E'$  przeciwne do pola  $E$  pochodzącego od swobodnych ładunków na okładkach kondensatora. Wypadkowe pole w dielektryku  $E_w$  (suma wektorowa pól  $E'$  i  $E$ ) ma ten sam kierunek co pole  $E$  ale mniejszą wartość. Pole związane z ładunkiem polaryzacyjnym  $q'$  nosi nazwę *polaryzacji elektrycznej*  $\mathcal{P}$ .



**Prawo, zasada, twierdzenie**

Gdy dielektryk umieścimy w polu elektrycznym to pojawiają się indukowane ładunki powierzchniowe, które wytwarzają pole elektryczne przeciwne do zewnętrznego pola elektrycznego.

Zastosujemy teraz prawo Gaussa do kondensatora wypełnionego dielektrykiem. Dla powierzchni Gaussa zaznaczonej na rysunku 20.2c linią przerywaną otrzymujemy

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{q - q'}{\varepsilon_0} \quad (20.12)$$

Ponieważ pole  $E$  jest jednorodne więc

$$ES = \frac{q - q'}{\varepsilon_0} \quad (20.13)$$

skąd otrzymujemy

$$E = \frac{q - q'}{\varepsilon_0 S} \quad (20.14)$$

Pojemność takiego kondensatora wypełnionego dielektrykiem wynosi zatem

$$C' = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{Ed} = \frac{q}{q - q'} \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{q}{q - q'} C \quad (20.15)$$

Dzieląc powyższe równanie obustronnie przez  $C$  otrzymujemy

$$\frac{C'}{C} = \varepsilon_r = \frac{q}{q - q'} \quad (20.16)$$

Powyższe równanie pokazuje, że wyindukowany ładunek powierzchniowy  $q'$  jest mniejszy od ładunku swobodnego  $q$  na okładkach. Dla kondensatora bez dielektryka  $q' = 0$  i wtedy  $\varepsilon_r = 1$ .



Więcej na ten temat dielektryków w polu elektrycznym możesz dowiedzieć się z *Dodatku 4*, na końcu modułu VI.

Korzystając z powyższego związku (20.16) i podstawiając za  $q - q'$  do równania (20.12), możemy napisać prawo Gaussa (dla kondensatora z dielektrykiem) w postaci

$$\oint \varepsilon_r \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad (20.17)$$

To równanie stanowi najbardziej ogólną postać prawa Gaussa.

Zauważmy, że strumień pola elektrycznego dotyczy wektora  $\varepsilon_r \mathbf{E}$  (a nie wektora  $\mathbf{E}$ ) i że w równaniu występuje tylko ładunek swobodny, a wyindukowany ładunek powierzchniowy został uwzględniony przez wprowadzenie stałej dielektrycznej  $\varepsilon_r$ .

Porównując pole elektryczne w kondensatorze płaskim bez dielektryka  $E = q/\varepsilon_0 S$  z wartością daną równaniem (20.14) widzimy, że wprowadzenie dielektryka zmniejsza pole elektryczne  $\varepsilon_r$  razy (indukowany ładunek daje pole przeciwne do pola od ładunków swobodnych na okładkach - rysunek 20.3b).

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} \quad (20.18)$$



### Ćwiczenie 20.3

Pokazaliśmy, że wprowadzenie dielektryka między okładki kondensatora zwiększa jego pojemność i zmniejsza pole elektryczne  $\varepsilon_r$  razy. Spróbuj teraz wyjaśnić jak zmienia się różnica potencjałów między okładkami i energia naładowanego kondensatora.

Wskazówka: Ładunek swobodny na okładkach kondensatora nie zmienia się (kondensator został naładowany i następnie odłączony od źródła - baterii).

Wyniki zapisz poniżej.

$\Delta V =$

$W =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Ten rozdział kończy moduł szósty; możesz teraz przejść do podsumowania i zadań testowych.

## Podsumowanie

- Wszystkie ładunki są wielokrotnością ładunku elementarnego  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,
- Prawo Coulomba opisuje siłę wzajemnego oddziaływania dwóch ładunków  $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$ , gdzie stała  $k = 1/4\pi\epsilon_0$  ( $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ )
- Natężenie pola elektrycznego definiujemy jako siłę działającą na ładunek próbny  $q$  (umieszczony w danym punkcie przestrzeni) podzieloną przez ten ładunek  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$ .

Natężenie pola elektrycznego  $E$  w odległości  $r$  od ładunku punkowego  $Q$  jest równe

$$\mathbf{E} = \frac{1}{q} \mathbf{F} = \frac{1}{q} \left( k \frac{Qq}{r^2} \hat{r} \right) = k \frac{Q}{r^2} \hat{r}.$$

- Strumień pola elektrycznego przez elementarną powierzchnię  $dS$  definiujemy jako iloczyn skalarny wektora powierzchni  $d\mathbf{S}$  i natężenia pola elektrycznego  $\mathbf{E}$ ,  $d\phi = \mathbf{E} d\mathbf{S} = E dS \cos \alpha$ , gdzie  $\alpha$  jest kątem pomiędzy wektorem powierzchni  $d\mathbf{S}$  i wektorem  $\mathbf{E}$ .
- Z prawa Gaussa wynika, że całkowity strumień pola elektrycznego przez zamkniętą powierzchnię jest równy całkowitemu ładunkowi otoczonemu przez tę powierzchnię podzielonemu przez  $\epsilon_0$   $\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi k Q_{\text{wewn.}} = \frac{Q_{\text{wewn.}}}{\epsilon_0}$ .
- Wypadkowy ładunek wewnątrz przewodnika jest równy zero; cały ładunek gromadzi się na powierzchni przewodnika.
- Pole elektryczne na zewnątrz naładowanej kuli jest takie jakby cały ładunek skupiony był w środku kuli.
- Ładunek liniowy wytwarza wokół siebie pole malejące wraz z odległością  $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ .

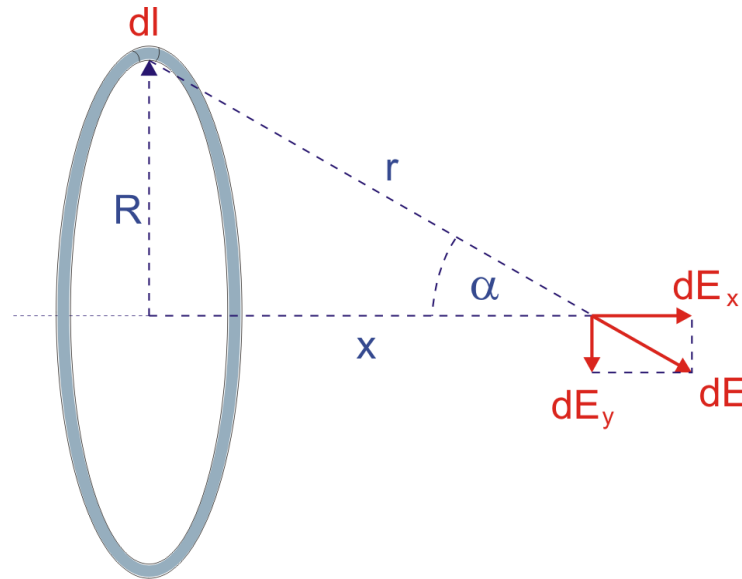
Natomiast pole od naładowanej nieskończonej płaszczyzny  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  jest stałe.

- Energia potencjalna ładunku punkowego jest dana wzorem  $E_p(r) = k \frac{qQ}{r}$
- Potencjał elektryczny jest zdefiniowany jako energię potencjalną na jednostkowy ładunek  $V(r) = \frac{E_p(r)}{q} = \frac{W_{\infty r}}{q}$ . Potencjał ładunku punkowego wynosi  $V(r) = k \frac{Q}{r}$ .
- Pojemność kondensatora definiujemy jako stosunek ładunku kondensatora do różnicy potencjałów między okładkami  $C = \frac{Q}{\Delta V}$ .
- Energia potencjalna zgromadzona w kondensatorze wynosi  $W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ , a gęstość energii pola elektrycznego jest równa  $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ .
- Umieszczenie dielektryka o względnej przenikalności elektrycznej  $\epsilon_r$  pomiędzy okładkami kondensatora zwiększa jego pojemność  $\epsilon_r$  razy  $\frac{C'}{C} = \epsilon_r$ .

## Materiały dodatkowe do Modułu VI

### Pole elektryczne na osi pierścienia

Z zasady superpozycji możemy również skorzystać dla ciągłych rozkładów ładunków. Jako przykład rozpatrzmy jednorodnie naładowany pierścień o promieniu  $R$  i całkowitym ładunku  $Q$  pokazany na rysunku poniżej. Chcemy obliczyć pole elektryczne na osi pierścienia w odległości  $x$  od jego środka.



W pierwszym kroku dzielimy pierścień na elementy o długości  $dl$  i obliczamy pole elektryczne  $dE$  wytwarzane przez taki element. Zgodnie z rysunkiem

$$dE_x = dE \cos \alpha \quad (\text{VI.1.1})$$

oraz

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \quad (\text{VI.1.2})$$

Jeżeli  $\lambda = Q/2\pi R$  jest liniową gęstością ładunku (ilością ładunku na jednostkę długości) to element  $dl$  zawiera ładunek  $dQ = \lambda dl$  i natężenie pola od tego elementu jest równe

$$dE = k \frac{\lambda dl}{r^2} \quad (\text{VI.1.3})$$

oraz

$$dE_x = k \frac{\lambda dl}{r^2} \frac{x}{r} \quad (\text{VI.1.4})$$

Pole elektryczne całego pierścienia otrzymujemy zgodnie z zasadą superpozycji sumując (całkując) pola od wszystkich elementów pierścienia. Zwróćmy uwagę, że składowe pionowe  $dE_y$  elementów leżących po przeciwnych stronach pierścienia znoszą się wzajemnie więc

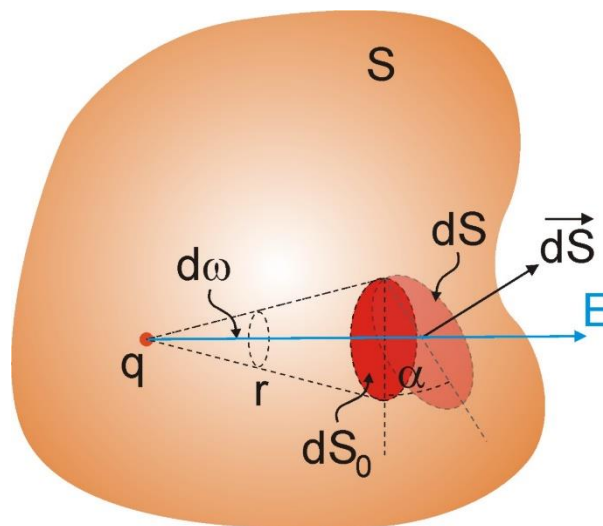
$$E = E_x = \int dE_x = \frac{k\lambda x}{r^3} \int dl = \frac{k\lambda x}{r^3} (2\pi R) = \frac{kxQ}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{VI.1.5})$$

Zauważmy, że w środku pierścienia ( $x = 0$ )  $E = 0$ , a w bardzo dużej odległości od pierścienia ( $x \gg R$ ) pole zmierza do wartości  $E \rightarrow kQ/x^2$  takiej jak pole ładunku punktowego w tej odległości.

Jedną z zalet posługiwania się pojęciem pola elektrycznego jest to, że nie musimy zajmować się szczegółami źródła pola. Powyższy przykład pokazuje, że z pomiaru pola elektrycznego nie możemy ustalić jaki jest rozkład ładunków będący źródłem tego pola (ładunek punktowy czy odległy naładowany pierścień).

### Strumień pola elektrycznego

Rozważmy zamkniętą powierzchnię, o dowolnym kształcie, obejmującą ładunek  $q$ , pokazaną na rysunku poniżej.



Strumień pola elektrycznego  $E$  przez dowolną zamkniętą powierzchnię obejmującą ładunek  $q$

Strumień pola elektrycznego  $E$  przez dowolny, mały element tej powierzchni (powierzchnię elementarną)  $dS$  wynosi

$$d\phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} dS \quad (\text{VI.2.1})$$

Strumień pola elektrycznego przez całą powierzchnię  $S$  otrzymujemy sumując strumienie przez wszystkie powierzchnie elementarne

$$\phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{r dS \cos \alpha}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{dS \cos \alpha}{r^2} \quad (\text{VI.2.2})$$

Wielkość  $dS \cos \alpha = dS_0$  jest polem rzutu elementu  $dS$  na płaszczyznę, którą wyznacza stożek o wierzchołku w  $q$  (na powierzchni kuli o promieniu  $r$ ), wycinający z powierzchni element  $dS$ . Pole powierzchni  $dS_0$  jest związane z kątem bryłowym  $d\omega$  relacją

$$d\omega = \frac{dS_0}{r^2} = \frac{dS \cos \alpha}{r^2} \quad (\text{VI.2.3})$$

Skąd, po podstawieniu do wzoru (VI.2.2) otrzymujemy

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{VI.2.4})$$

Strumień pola elektrycznego ładunku punktowego  $q$  przez dowolną, zamkniętą powierzchnię  $S$ , obejmującą ten ładunek nie zależy od kształtu tej powierzchni.

### Gradient pola

Przy pomocy obliczania pochodnych cząstkowych ze *skalarne*go potencjału  $V$  otrzymaliśmy składowe *wektora* pola  $\mathbf{E}$  w dowolnym punkcie przestrzeni

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (\text{VI.3.1})$$

skąd

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z \quad (\text{VI.3.2})$$

lub

$$\mathbf{E} = -\mathbf{i} \frac{\partial V}{\partial x} - \mathbf{j} \frac{\partial V}{\partial y} - \mathbf{k} \frac{\partial V}{\partial z} \quad (\text{VI.3.3})$$

To równanie można zapisać w postaci

$$\mathbf{E} = -\left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) V \quad (\text{VI.3.4})$$

gdzie wyrażenie w nawiasie jest *operatorem wektorowym nabra*  $\nabla$ , który oznaczamy symbolem  $\nabla$ . Nazywamy tę wielkość operatorem ponieważ nie ma ona konkretnego znaczenia dopóki nie działa (operuje) na jakąś funkcję taką jak na przykład potencjał  $V$ .

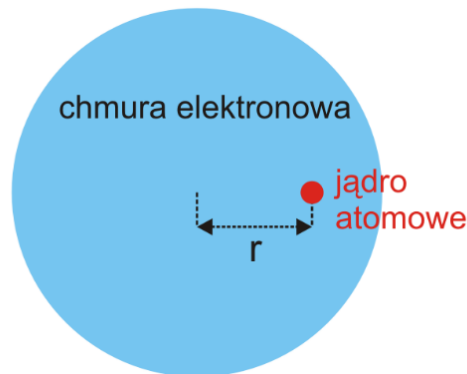
Operator ten ma istotne znaczenie gdy mamy do czynienia z polami skalarnymi i wektorowymi. Pole skalarne to takie pole, która ma przypisaną wartość skalarną (liczbową) w każdym punkcie przestrzeni. Natomiast pole wektorowe ma w każdym punkcie przestrzeni przypisany wektor. Dla dowolnego pola skalarnego  $\phi(x,y,z)$  można działając na nie operatorem  $\nabla$  utworzyć pole wektorowe, które nazywamy *gradientem*  $\phi$

$$\text{grad} \phi = \nabla \phi \quad (\text{VI.3.5})$$

Gradient potencjału,  $\text{grad}\varphi$  ma wartość równą maksymalnej zmianie potencjału  $\varphi$  (maksymalne nachylenie funkcji  $\varphi(x,y,z)$ ) i zwrot ( $\text{grad}\varphi$  jest wektorem) przeciwny do kierunku, w którym zmiana jest  $\varphi$  największa.

### **Dielektryk w polu elektrycznym - rozważania ilościowe**

Rozpatrzmy atom umieszczony w zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu  $E$ . Wówczas na atom działa siła, która przesuwa chmurę elektronową o  $r$  względem jądra atomowego (rysunek poniżej).



Sferyczna chmura elektronowa przesunięta zewnętrznym polem elektrycznym względem jądra atomu na odległość  $r$

Wówczas atom ma indukowany moment dipolowy  $p$ , a wypadkowe pole elektryczne w miejscu jądra jest sumą pola zewnętrznego i pola od chmury elektronowej

$$E_{\text{wyp.}} = E + E_{\text{elektrony}} \quad (\text{VI.4.1})$$

Jeżeli potraktujemy, w naszym uproszczonym modelu, chmurę elektronową jako jednorodnie naładowaną kulę o promieniu  $R$  to pole elektryczne wytworzone przez chmurę elektronową w odległości  $r$  ( $r < R$ ) od jej środka jest dane wzorem (18.17)

$$E_{\text{elektrony}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r = k \frac{Q}{R^3} r \quad (\text{VI.4.2})$$

Ponieważ jądro znajduje się w położeniu równowagi (nie przemieszcza się) więc  $E_{\text{wyp.}} = 0$ , skąd dostajemy

$$0 = E - \frac{kQ}{R^3} r \quad (\text{VI.4.3})$$

skąd

$$r = \frac{R^3}{kQ} E \quad (\text{VI.4.4})$$



Zatem, indukowany moment dipolowy jest równy

$$p = Qr = \frac{R^3}{k} E \quad (\text{VI.4.5})$$

Moment  $p$  zgodnie z oczekiwaniami jest proporcjonalny do natężenia zewnętrznego pola elektrycznego  $E$ .

Rozpatrzmy teraz dielektryk, w którym znajduje się  $N$  atomów (cząsteczek). Jeżeli każdy atom ma średni moment dipolowy  $\bar{p}$  skierowany zgodnie z zewnętrznym polem  $E$  to całkowity moment dipolowy

$$p_{\text{całk}} = N\bar{p} \quad (\text{VI.4.6})$$

Z drugiej strony indukowany ładunek  $q'$  pojawia się jedynie na powierzchni dielektryka więc dla kondensatora płaskiego, wypełnionego dielektrykiem, którego okładki o powierzchni  $S$  są umieszczone w odległości  $d$

$$p_{\text{całk}} = q'd \quad (\text{VI.4.7})$$

Łącząc te wyrażenia otrzymujemy

$$q'd = N\bar{p} \quad (\text{VI.4.8})$$

lub

$$q'd = (nSd)\bar{p} \quad (\text{VI.4.9})$$

gdzie  $n$  koncentracją atomów (cząsteczek) tj. ilością atomów w jednostce objętości  $n = N/(Sd)$ . Ostatecznie więc

$$q' = nS\bar{p} \quad (\text{VI.4.10})$$

Podstawiamy tę wielkość do wzoru na  $\varepsilon_r$

$$\varepsilon_r = \frac{q}{q - q'} = \frac{q}{q - nS\bar{p}} \quad (\text{VI.4.11})$$

Pokazaliśmy powyżej, że indukowany moment dipolowy  $p$  wynosi  $p = Qr = \frac{R^3}{k} E$ .

Podstawiając do tego wzoru wyrażenie na natężenie pola elektrycznego w kondensatorze płaskim (wzór 20.14) otrzymujemy

$$p = \frac{R^3}{k} \frac{(q - q')}{\varepsilon_0 S} = 4\pi R^3 \frac{q - q'}{S} \quad (\text{VI.4.12})$$

Wstawiając to wyrażenie do wzoru (VI.4.11) obliczamy  $\varepsilon_r$

$$\varepsilon_r = \frac{q}{q - 4\pi R^3 n \frac{q - q'}{S} S} = \frac{1}{1 - 4\pi R^3 n \frac{q - q'}{q}} = \frac{1}{1 - 4\pi R^3 n \frac{1}{\varepsilon_r}} \quad (\text{VI.4.13})$$

skąd

$$\varepsilon_r = 1 + 4\pi n R^3 \quad (\text{VI.4.14})$$

Otrzymana zależność jest przybliżona ze względu na znaczne uproszczenia przyjętego modelu atomu jednak pokazuje, że przenikalność dielektryczna  $\varepsilon_r$  jest większa od jedności i że zależy od właściwości dielektryka takich jak koncentracja atomów  $n$  i promień atomu  $R$ .

## Rozwiązania ćwiczeń z modułu VI

### Ćwiczenie 17.1

Dane:  $r = 5 \cdot 10^{-11}$  m,  $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$  kg,  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$  kg,  $G = 6.7 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>,  
 $k = 1/4\pi\epsilon_0 = 8.988 \cdot 10^9$ ,  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  C.

Siła przyciągania elektrostatycznego pomiędzy elektronem i protonem w atomie wodoru wynosi:

$$F = k \frac{e^2}{r^2} = 9.2 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

a stosunek sił przyciągania elektrostatycznego do grawitacyjnego dla protonu i elektronu w atomie wodoru:

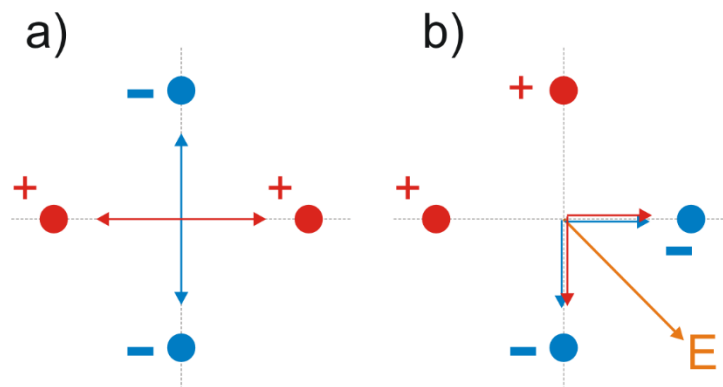
$$\frac{F_E}{F_G} = k \frac{e^2}{r^2} \frac{1}{G m_p m_e} \cong 2 \cdot 10^{39}$$

Siła grawitacyjna jest w tym przypadku całkowicie do zaniedbania.

### Ćwiczenie 17.3

Dane: ładunki znajdują się w jednakowych odległościach  $r$  od środka i mają jednakowe wartości bezwzględne  $Q$ .

Na rysunkach poniżej zaznaczono, w środku układu, wektory natężenia pola elektrycznego od poszczególnych ładunków.



W sytuacji pokazanej na rysunku a) wypadkowe natężenie pola elektrycznego jest równe zero. Natomiast dla przypadku b) suma (wektorowa) natężeń pól pochodzących od poszczególnych ładunków wynosi

$$E_{\text{wyp}} = 2\sqrt{2} \left( k \frac{Q}{r^2} \right)$$

Wyrażenie w nawiasie przedstawia wartość natężenia pola pojedynczego ładunku.

**Ćwiczenie 19.1**

Dane: Promień jądra  $r = 4.8 \cdot 10^{-15}$  m, liczba protonów  $n = 29$ , promień orbity elektronu  $R = 5 \cdot 10^{-11}$  m, ładunek elementarny  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  C, stała  $k = 8.988 \cdot 10^9$ .

Potencjał na powierzchni jądra miedzi obliczamy ze wzoru na potencjał pola ładunku punktowego

$$V(r) = k \frac{Q}{R}$$

gdzie  $Q = ne$  jest ładunkiem jądra miedzi. Podstawiając dane otrzymujemy

$$V(R) = 8.7 \cdot 10^7 \text{ V.}$$

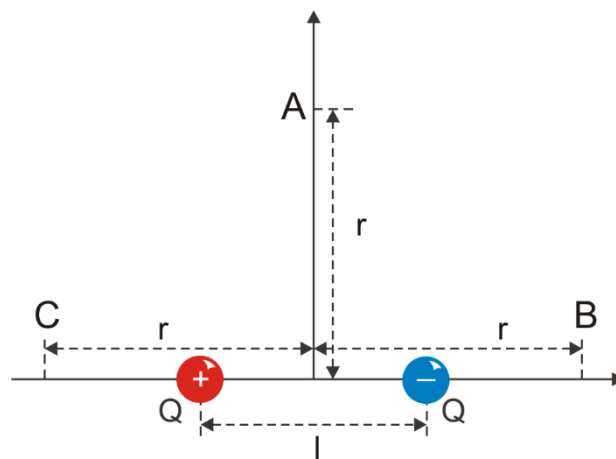
Natomiast energię potencjalną elektronu w polu jądra miedzi obliczamy korzystając z zależności (19.4)

$$E_p(R) = k \frac{eQ}{R}$$

Podstawiając dane otrzymujemy  $E_p(R) = 1.3 \cdot 10^{-16} \text{ J} = 0.83 \text{ eV}$ .

**Ćwiczenie 19.2**

Dane:  $r, Q, k$



Potencjał w dowolnym punkcie obliczamy jako sumę potencjałów od poszczególnych ładunków punktowych, korzystając ze wzoru (19.6)  $V(r) = k \frac{Q}{r}$ . Otrzymujemy kolejno:

$$V_A = V_+ + V_- = k \frac{Q}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} + k \frac{(-Q)}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} = 0$$

$$V_B = V_+ + V_- = k \frac{Q}{r + \frac{l}{2}} + k \frac{(-Q)}{r + \frac{l}{2}} = k \frac{(-Ql)}{r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = -k \frac{p}{r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$V_C = -V_B$$

### Ćwiczenie 20.1

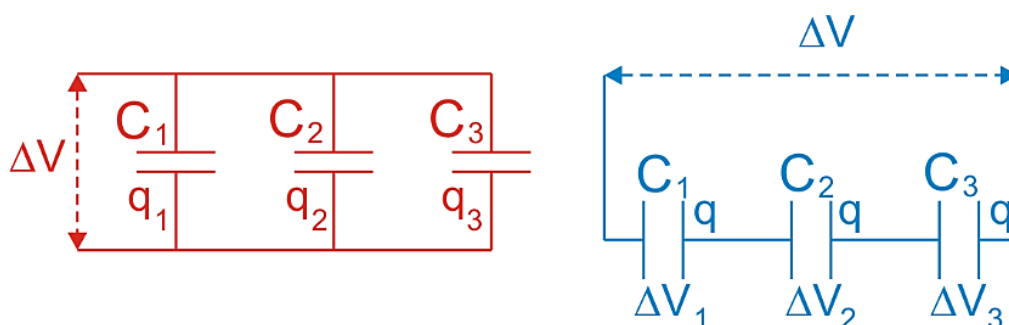
Dane:  $S = 1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $d = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$ ,  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)$ .

Pojemność kondensatora płaskiego jest dana wyrażeniem (20.2)  $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ .

Podstawiając dane otrzymujemy  $C = 8.85 \cdot 10^{-13} \text{ F} = 0.885 \text{ pF}$ .

### Ćwiczenie 20.2

Na rysunku pokazane są układy kondensatorów połączonych równoległe i szeregowo.



Dla połączenia równoległego różnica potencjałów między okładkami wszystkich kondensatorów jest taka sama (połączone okładki stanowią jeden przewodnik)

$$\Delta V = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_3}{C_3}$$

Stąd całkowita pojemność układu

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\Delta V} = \frac{(C_1 + C_2 + C_3)\Delta V}{\Delta V} = C_1 + C_2 + C_3$$

Przy połączeniu szeregowym ładunek wprowadzony na okładki zewnętrzne wywołuje równomierny rozkład (rozdzielenie) ładunku pomiędzy okładkami wewnętrznymi

$$q = \Delta V_1 C_1 = \Delta V_2 C_2 = \Delta V_3 C_3$$

Stąd całkowita pojemność układu (jej odwrotność)

$$\frac{1}{C} = \frac{\Delta V}{q} = \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3}{q} = \frac{\frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3}}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Powyższe wyniki można łatwo uogólnić na przypadek większej liczby kondensatorów.

### Ćwiczenie 20.3

Zgodnie z równaniem (19.7) związek między różnicą potencjału (napięciem) a natężeniem pola w kondensatorze (pole jednorodne) jest dany wyrażeniem

$$\Delta V = Ed$$

gdzie  $d$  jest odległością między okładkami kondensatora. Ponieważ wprowadzenie dielektryka między okładki kondensatora zmniejsza pole elektryczne  $\varepsilon_r$  razy więc różnica potencjałów też maleje  $\varepsilon_r$  razy.

Energia zgromadzona w naładowanym kondensatorze jest dana równaniem (20.5) i wynosi

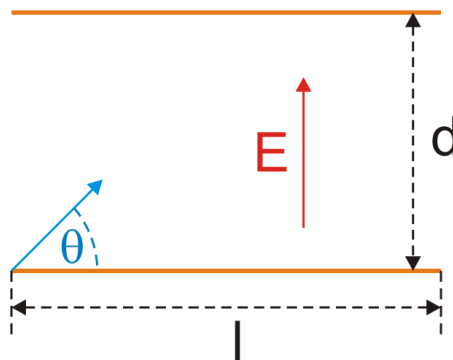
$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

gdzie  $Q$  jest ładunkiem swobodnym na okładkach kondensatora.

Ponieważ wprowadzenie dielektryka między okładki kondensatora zwiększa jego pojemność  $\varepsilon_r$  razy, a ładunek swobodny na okładkach kondensatora nie zmienia się (kondensator został naładowany i następnie odłączony od źródła – baterii) więc energia kondensatora maleje.

**Test VI**

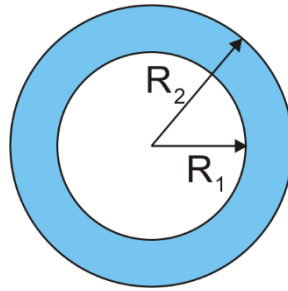
1. Dwie identyczne kulki o masie  $m = 10$  mg każda są zawieszona na izolowanych niciach o długości 50 cm. Gdy kulki naładujemy identycznymi ładunkami, a nitki zaczepimy w tym samym punkcie, to kulki w wyniku odpychania oddalą się na odległość  $r = 50$  cm. Oblicz ładunek elektryczny kulek.
2. Dwa identyczne ładunki  $q$  znajdują się w odległości  $d$  od siebie. W którym punkcie na symetralnej odcinka  $d$  natężenie wypadkowego pola elektrycznego osiąga wartość maksymalną?
3. W obszar pola elektrycznego (patrz rysunek poniżej) wpada pod kątem  $\theta = 45^\circ$  elektron poruszający się z prędkością  $6 \cdot 10^6$  m/s. Natężenie pola  $E = 2 \cdot 10^3$  N/C i jest skierowane do góry. Odległość między płytkami  $d = 2$  cm, a ich długość  $l = 10$  cm. Czy elektron uderzy w którąś z płytek? Jeżeli tak, to w którym miejscu?



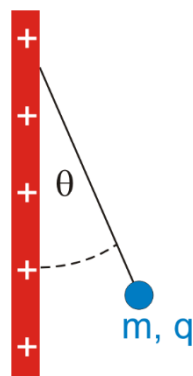
4. Wyznacz natężenie pola elektrycznego w odległości 10 cm od nieskończenie długiego pręta naładowanego z liniową gęstością  $\lambda = 5$  C/m.
5. Długi przewodzący walec, na którym umieszczono ładunek  $+q$ , otoczony jest, jak pokazano na rysunku poniżej przez przewodzącą, cylindryczną powłokę o ładunku  $-2q$ . Zastosuj prawo Gaussa dla znalezienia: (a) natężenia pola elektrycznego w punktach na zewnątrz powłoki, (b) natężenia pola elektrycznego w obszarze między walcem a powłoką.



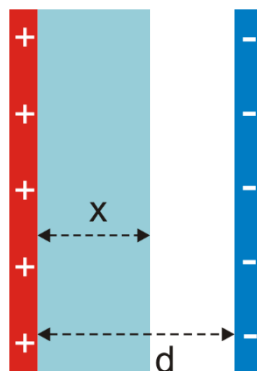
6. Wyznacz wartość natężenia pola elektrycznego  $E$  w funkcji odległości od środka wydrążonej kuli o promieniu wewnętrznym  $R_1$  i promieniu zewnętrznym  $R_2$  wykonanej z dielektryka (rysunek poniżej). Kula jest naładowana jednorodnie ładunkiem  $Q$ . Narysuj wykres  $E(r)$ .



7. Mała kulka, o masie  $m = 1 \text{ mg}$  i ładunku  $q = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  wisi na jedwabnej nitce, która tworzy kąt  $30^\circ$  z dużą, naładowaną, nieprzewodzącą płytą, jak pokazano na rysunku poniżej. Oblicz powierzchniową gęstość ładunku  $\sigma$  płyty.



8. Między okładki kondensatora naładowanego do napięcia  $500 \text{ V}$  wprowadzono dielektryk o przenikalności  $\epsilon_r = 2$ . Jaki ładunek został wyindukowany na  $\text{cm}^2$  powierzchni dielektryka, jeżeli odległość między okładkami kondensatora wynosi  $2 \text{ mm}$ ?
9. Warstwa dielektryczna o przenikalności  $\epsilon_r$  i grubości  $x$  została umieszczona pomiędzy odległymi o  $d$  ( $d > x$ ) okładkami kondensatora płaskiego (rysunek). Jak zmieniła się pojemność kondensatora?





# MODUŁ VII

## 21 Prąd elektryczny

### 21.1 Natężenie prądu elektrycznego

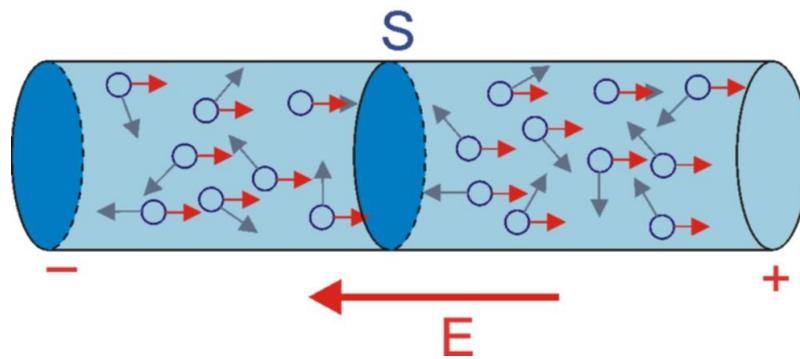
W module 6 zajmowaliśmy się zagadnieniami z elektrostatyki - rozpatrywaliśmy ładunki elektryczne w spoczynku. Teraz będziemy rozpatrywać ładunki w ruchu - zajmiemy się *prądem elektrycznym*  $\mathbb{P}$ . W naszych rozważaniach skoncentrujemy się na ruchu ładunków w metalicznych przewodnikach takich jak na przykład drut miedziany.

Nośnikami ładunku w metalu są poruszające się swobodnie (nie związane z poszczególnymi atomami) elektrony tzw. *elektrony przewodnictwa*  $\mathbb{P}$ .

Bez pola elektrycznego te elektrony poruszają się (dzięki energii cieplnej) przypadkowo we wszystkich kierunkach. Elektrony swobodne zderzają się z atomami (jonami) przewodnika zmieniając swoją prędkość i kierunek ruchu zupełnie tak jak cząsteczki gazu zamknięte w zbiorniku. Jeżeli rozpatrzemy przekrój poprzeczny  $S$  przewodnika, jak na rysunku 21.1 poniżej, to elektrony w swoim chaotycznym ruchu cieplnym przechodzą przez tę powierzchnię w obu kierunkach i wypadkowy strumień ładunków przez tę powierzchnię jest równy zero. *Przez przewodnik nie płynie prąd.*

Ruchowi chaotycznemu nie towarzyszy przepływ prądu. Prąd elektryczny to *uporządkowany ruch ładunków*.

Przyłożenie napięcia  $U$  (różnicy potencjałów  $\Delta V$ ) pomiędzy końcami przewodnika wytwarza pole elektryczne  $E$ , które działa siłą na ładunki, powodując ich ruch w *określonym kierunku w przewodniku*. Ruch chaotyczny każdego elektronu zostaje zmodyfikowany. *W przewodniku płynie prąd elektryczny*. Na rysunku 21.1 zaznaczona jest prędkość ruchu elektronów uzyskana dzięki przyłożonemu polu elektrycznemu (rysunek nie oddaje proporcji pomiędzy prędkościami chaotycznego ruchu cieplnego i uporządkowanego ruchu w polu elektrycznym).



Rys. 21.1. Chaotyczny ruch cieplny elektronów (strzałki szare) i uporządkowany ruch elektronów w polu elektrycznym (strzałki czerwone)

Przepływ prądu przez przewodnik jest opisywany przez natężenie prądu.



#### Definicja

*Natężenie prądu elektrycznego definiujemy jako ilość ładunku jaka przepływa przez przekrój poprzeczny przewodnika w jednostce czasu.*

$$I = \frac{Q}{t} \quad (21.1)$$

**Jednostki**

W układzie SI jednostką ładunku jest *kulomb* (C). Jest to ładunek przenoszony przez prąd o natężeniu 1 ampera w czasie 1 sekundy  $1\text{ C} = 1\text{ A}\cdot\text{s}$ .

Jeżeli natężenie prądu nie jest stałe to wyrażenie (21.1) określa *średnie natężenie* prądu, a *natężenie chwilowe* jest określone jako

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (21.2)$$

Wielkością związaną z natężeniem prądu jest gęstość prądu.

**Definicja**

*Gęstość prądu elektrycznego definiowana jest jako natężenie prądu na jednostkę powierzchni przekroju poprzecznego przewodnika.*

$$j = \frac{I}{S} \quad (21.3)$$

Gęstość prądu jest *wektorem*. Jego długość określa wzór (21.3), a kierunek i zwrot są zgodne z wektorem prędkości ładunków dodatnich. Zauważmy, że oprócz „ujemnych” elektronów, które są nośnikami ładunku w metalach mamy do czynienia również z innymi nośnikami: w półprzewodnikach obok elektronów nośnikami są dziury (nośniki dodatnie), a w gazach i cieczach elektrony oraz jony dodatnie (kationy) i jony ujemne (aniony). Za umowny kierunek prądu przyjmujemy *kierunek ruchu ładunków dodatnich*.

Jak już powiedzieliśmy wcześniej, w nieobecności zewnętrznego pola elektrycznego swobodne elektrony w metalu poruszają się chaotycznie we wszystkich kierunkach. Natomiast w zewnętrznym polu elektrycznym elektrony uzyskują średnią *prędkość unoszenia*  $v_u$ . Jeżeli  $n$  jest koncentracją elektronów to ilość ładunku  $Q$  jaka przepływa przez przewodnik o długości  $l$  i przekroju poprzecznym  $S$  w czasie  $t = l/v_u$  wynosi

$$Q = n l S e \quad (21.4)$$

gdzie iloczyn  $lS$  jest objętością przewodnika. Natężenie prądu wynosi więc

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{nSl e}{l/v_u} = nS e v_u \quad (21.5)$$

a gęstość prądu

$$j = \frac{I}{S} = n e v_u = \rho v_u \quad (21.6)$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością ładunku.

**Przykład**

Spróbujemy teraz obliczyć średnią prędkość unoszenia elektronów przewodnictwa (swobodnych) w drucie miedzianym o przekroju  $1 \text{ mm}^2$ , w którym płynie prąd natężeniu  $I = 1 \text{ A}$ . Masa atomowa miedzi  $\mu = 63.8 \text{ g/mol}$ , a gęstość miedzi  $\rho_{\text{Cu}} = 8.9 \text{ g/cm}^3$ .

Skorzystamy z równania (21.5), które przekształcamy do postaci

$$v_u = \frac{I}{nSe} \quad (21.7)$$

Koncentrację nośników obliczamy w oparciu o założenie, że na jeden atom miedzi przypada jeden elektron przewodnictwa (mamy do czynienia z jonami  $\text{Cu}^{+1}$ ).

$$n = \frac{\rho N_{Av}}{\mu} = 8.4 \cdot 10^{28} \frac{\text{elektr.}}{\text{m}^3} \quad (21.8)$$

gdzie  $N_{Av}$  jest liczbą Avogadra. Wstawiając tę wartość do równania na prędkość (21.7) otrzymujemy

$$v_u = 7.4 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} = 0.074 \text{ mm/s}$$

Widzimy, że prędkość średnia uporządkowanego ruchu elektronów, który jest warunkiem wystąpienia prądu elektrycznego, jest bardzo mała. Dla porównania prędkość chaotycznego ruchu cieplnego jest rzędu  $10^5 \text{ m/s}$  (stąd niezachowane proporcje na rysunku 21.1).

Powstaje więc pytanie, jak przy tak znikomym małej prędkości elektronów możliwe jest błyskawiczne przenoszenie sygnałów elektrycznych np. w sieci telefonicznej, komputerowej czy elektrycznej?

Dzieje się tak dlatego, że wywołana przyłożonym napięciem (sygnałem) zmiana pola elektrycznego rozchodzi się wzdłuż przewodnika z prędkością bliską prędkości światła w próżni ( $2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ). Oznacza to, że zewnętrzne pole elektryczne wywołuje ruch elektronów praktycznie *jednocześnie z włączeniem napięcia (nadaniem sygnału) wzdłuż całej długości przewodnika* tzn. równocześnie zaczynają się poruszać elektrony zarówno w pobliżu nadajnika jak i odbiornika. Tak więc pomimo bardzo małej prędkości średniej uporządkowanego ruchu elektronów sygnał "natychmiast" dociera do odbiornika.

## 21.2 Prawo Ohma

Jeżeli do przewodnika przyłożymy napięcie  $U$  (różnicę potencjałów  $\Delta V$ ), to przez przewodnik płynie prąd, którego natężenie  $I$  jest proporcjonalne do przyłożonego napięcia. Ten ważny wynik doświadczalny jest treścią prawa Ohma, które stwierdza, że

**Prawo, zasada, twierdzenie**

*Stosunek napięcia przyłożonego do przewodnika do natężenia prądu przepływającego przez ten przewodnik jest stały i nie zależy ani od napięcia ani od natężenia prądu.*

Ten iloraz

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{U}{I} \quad (21.9)$$

nazywamy *oporem elektrycznym* .



### Jednostki

Jednostką oporu jest *ohm* ( $\Omega$ );  $1\Omega = 1\text{V/A}$ .



Prawo Ohma jest słuszne pod warunkiem, że przewodnik znajduje się w *stałej temperaturze*. Zależność oporu od temperatury jest omówiona w dalszej części.



O wyprowadzeniu prawa Ohma możesz przeczytać w *Dodatku 1*, na końcu modułu VII.

Opór przewodnika zależy od jego wymiarów; opór  $R$  jest proporcjonalny do długości przewodnika  $l$  i odwrotnie proporcjonalny do jego przekroju  $S$ .

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (21.10)$$

Stałą  $\rho$ , charakteryzującą elektryczne własności materiału, nazywamy *oporem właściwym*  (rezystywnością), a jej odwrotność  $\sigma = 1/\rho$  *przewodnością właściwą* .



### Jednostki

Jednostką przewodności elektrycznej właściwej jest  $1\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ .

W tabeli poniżej zestawione zostały opory właściwe wybranych materiałów

Tab. 21.1. Opory właściwe wybranych materiałów (w temperaturze pokojowej)

Materiał	Opór właściwy $\Omega\text{m}$	
srebro	$1.6 \cdot 10^{-8}$	metale
miedź	$1.7 \cdot 10^{-8}$	
glin	$2.8 \cdot 10^{-8}$	
wolfram	$5.3 \cdot 10^{-8}$	
platyna	$1.1 \cdot 10^{-7}$	
krzem	$2.5 \cdot 10^3$	półprzewodnik
szkło	$10^{10} - 10^{14}$	izolator



### Ćwiczenie 21.1

Skorzystaj teraz z zależności (21.10) i oblicz opór pomiędzy różnymi przeciwległymi ściankami sztabki miedzianej o wymiarach  $1\text{mm} \times 2\text{mm} \times 50\text{mm}$ . Opór właściwy miedzi

w temperaturze pokojowej wynosi  $1.7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ . Wyniki zapisz poniżej.

$R_1 =$

$R_2 =$

$R_3 =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Korzystając ze wzorów (21.9), (21.10) oraz z zależności  $U = El$  możemy wyrazić gęstość prądu w przewodniku jako

$$j = \frac{I}{S} = \frac{U}{RS} = \frac{El}{RS} = \frac{E}{\rho} \quad (21.11)$$

lub

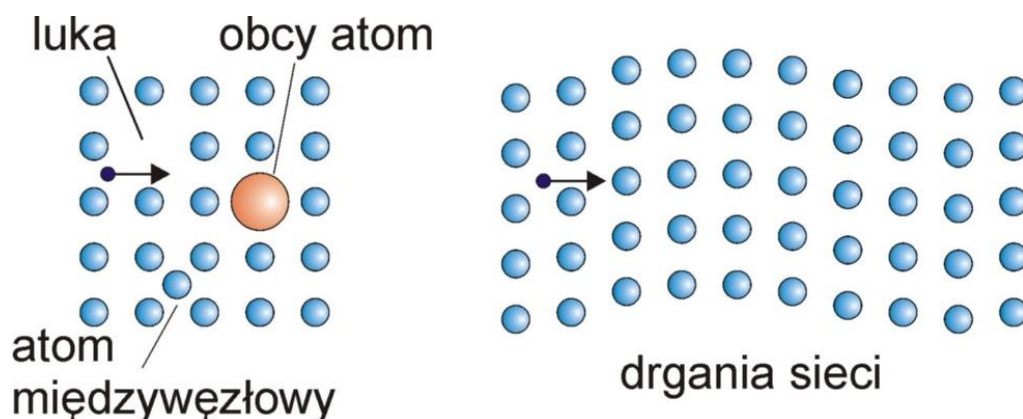
$$j = \sigma E \quad (21.12)$$

Jak już powiedzieliśmy wcześniej *gęstość prądu jest wektorem* i dlatego ten związek pomiędzy gęstością prądu, a natężeniem pola elektrycznego w przewodniku zapisujemy często w postaci wektorowej

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (21.13)$$

Jest to inna, *wektorowa* lub *mikroskopowa*, postać prawa Ohma.

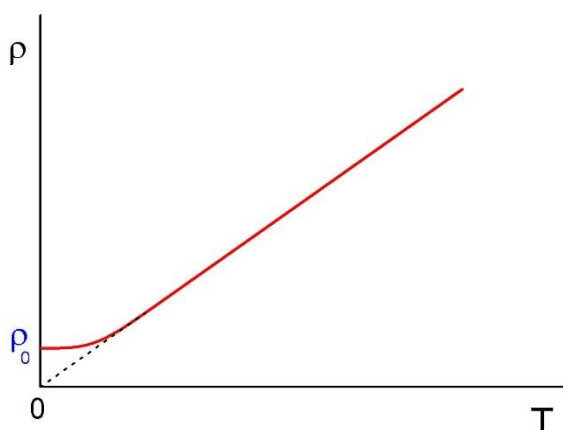
Z mikroskopowego punktu widzenia źródłem oporu w przewodnikach jest rozpraszanie nośników ładunków (elektronów) na niedoskonałościach w ułożeniu atomów przewodnika (defektach sieci krystalicznej) i zderzenia z drgającymi atomami przewodnika tworzącymi tzw. sieć krystaliczną (rysunek poniżej).



Rys. 21.2 Rozpraszanie elektronów na defektach sieci krystalicznej i na drganiach sieci


Opór właściwy materiału  $\rho$  zależy od temperatury. Wiąże się to z tym, że prędkość ruchu przypadkowych cząsteczek (elektronów) zależy od temperatury (punkt 15.2) podobnie jak drgania atomów sieci krystalicznej przewodnika.

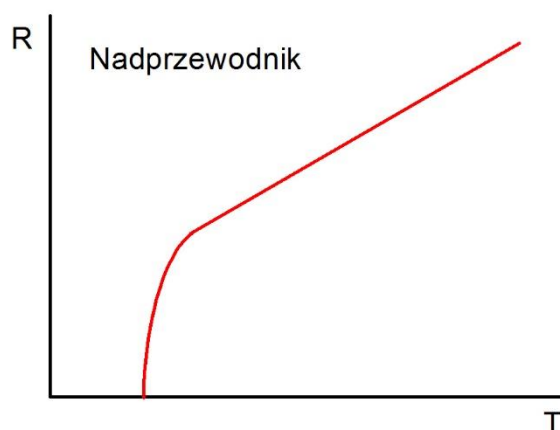
Typowa zależność oporu od temperatury dla przewodników metalicznych jest pokazana na rysunku 21.3.



Rys. 21.3. Opór właściwy metalu w funkcji temperatury

Z dobrym przybliżeniem jest to zależność liniowa  $\rho \sim T$  za wyjątkiem temperatur bliskich zera bezwzględnego. Wtedy zaczyna odgrywać rolę tzw. opór resztkowy  $\rho_0$  zależny w dużym stopniu od czystości metalu i obecności defektów sieci krystalicznej.

Istnieją jednak metale i stopy, dla których obserwujemy w dostatecznie niskich temperaturach całkowity zanik oporu. Zjawisko to nosi nazwę *nadprzewodnictwa* . Przykładowa zależność oporu od temperatury dla nadprzewodnika jest pokazana na rysunku poniżej.



Rys. 21.4. Opór nadprzewodnika w funkcji temperatury

Prądy wzbudzone w stanie nadprzewodzącym utrzymują się w obwodzie bez zasilania zewnętrznego. Ta możliwość utrzymania stale płynącego prądu rokuje duże nadzieje na zastosowania techniczne, które znacznie wzrosły po odkryciu w 1986 r. materiałów przechodzących w stan nadprzewodzący w stosunkowo wysokich temperaturach, powyżej 100 K. Materiały te noszą nazwę wysokotemperaturowych nadprzewodników a ich odkrywcy J. G. Bednorz i K. A. Müller zostali wyróżnieni Nagrodą Nobla w 1987 r.



### Ćwiczenie 21.2

Podobnie jak kondensatory również oporniki są częścią składową prawie wszystkich układów elektronicznych. W celu dobrania odpowiedniego oporu powszechnie stosuje się ich łączenie w układy szeregowe lub równoległe. Spróbuj teraz samodzielnie wyprowadzić (lub podać) wzory na opór wypadkowy układu oporników połączonych szeregowo i równoległe.

Wskazówka: Przez oporniki połączone szeregowo płynie ten sam prąd, a z kolei przy połączeniu równoległym różnica potencjałów (napięcie) jest na każdym oporniku taka sama. Wynik zapisz poniżej.

$$R_{sz} =$$

$$R_r =$$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Z prawa Ohma wnioskujemy, że natężenie prądu jest wprost proporcjonalne do przyłożonego napięcia. Jest to słuszne dla większości przewodników (przy niewielkich napięciach i natężeniach prądu). Należy jednak wspomnieć, że istnieją układy, które nie spełniają prawa Ohma. Są to między innymi szeroko stosowane półprzewodnikowe elementy elektroniczne takie jak diody i tranzystory. Właściwości materiałów półprzewodnikowych będą omówione w dalszych modułach.

### 21.3 Praca i moc prądu, straty ciepłne

Na rysunku 21.5 pokazany jest najprostszy obwód elektryczny składający się ze źródła prądu (np. baterii) oraz z dowolnego odbiornika energii elektrycznej takiego jak żarówka, grzejnik, silnik elektryczny, komputer itp.

Jeżeli przez odbiornik przepływa prąd o natężeniu  $I$ , a napięcie na odbiorniku wynosi  $U$  to zmiana energii potencjalnej ładunku  $dq$  przepływającego przez odbiornik (od punktu  $A$  do  $B$ ) wynosi

$$dW = U dq \quad (21.14)$$

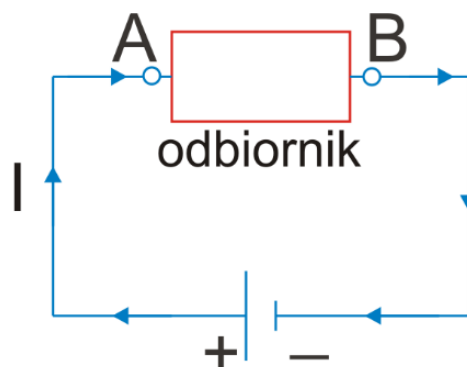
Dzieląc obie strony równania przez  $dt$  otrzymujemy wzór, który przedstawia szybkość zmian energii elektrycznej

$$\frac{dW}{dt} = U \frac{dq}{dt} = UI \quad (21.15)$$

czyli moc prądu elektrycznego

$$P = UI \quad (21.16)$$



Rys. 21.5. Prąd  $I$  z baterii płynie przez odbiornik energii elektrycznej


Energia potencjalna ładunku przepływającego przez odbiornik maleje bo potencjał punktu  $A$  (połączonego z dodatnim biegunem baterii) jest wyższy niż punktu  $B$  (połączonego z ujemnym biegunem baterii). Ta tracona energia jest przekształcana w inny rodzaj energii w zależności od typu odbiornika.

### 21.3.1 Straty ciepłne

Jeżeli mamy do czynienia z odbiornikiem energii zawierającym tylko opornik (np. grzejnik) to cała energia stracona przez ładunek  $dq$  poruszający się przy napięciu  $U$  wydziela się w oporniku w postaci energii cieplnej. Elektrony przewodnictwa poruszając się w przewodniku zderzają się z atomami (jonami) przewodnika i tracą energię (którą uzyskały w polu elektrycznym) co objawia się wzrostem temperatury opornika.

Korzystając z prawa Ohma możemy równanie (21.16) zapisać w postaci

$$P = I^2 R \quad \text{lub} \quad P = \frac{U^2}{R} \quad (21.17)$$

Równania (21.17) opisują przemianę energii elektrycznej na energię cieplną, którą nazywamy *cieplem Joule'a* .



#### Ćwiczenie 21.3

Typowa grzałka w czajniku elektrycznym, przystosowanym do pracy przy napięciu 230 V, ma moc 2000 W. Jaki prąd płynie przez tę grzałkę i jaki jest jej opór?

Wynik zapisz poniżej.

$I =$

$R =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

## 21.4 Obwody prądu stałego

### 21.4.1 Siła elektromotoryczna, prawo Ohma dla obwodu zamkniętego

Aby w obwodzie elektrycznym utrzymać prąd potrzebujemy źródła energii elektrycznej. Takimi źródłami są np. baterie i generatory elektryczne. Nazywamy je źródłami *siły elektromotorycznej SEM* . W urządzeniach tych otrzymujemy energię elektryczną w wyniku przetwarzania innej energii; np. energii chemicznej w bateriach, a energii mechanicznej w generatorach.

Siła elektromotoryczna  $\varepsilon$  określa energię elektryczną  $\Delta W$  przekazywaną jednostkowemu ładunkowi  $\Delta q$  w źródle SEM

$$\varepsilon = \frac{\Delta W}{\Delta q} \quad (21.18)$$



#### Definicja

Miarą SEM jest różnica potencjałów (napięcie) na biegunach źródła prądu w warunkach, kiedy przez ogniwo nie płynie prąd (ogniwo otwarte).

Natomiast gdy czerpiemy prąd ze źródła to napięcie między jego elektrodami, nazywane teraz *napięciem zasilania*  $U_z$  , maleje wraz ze wzrostem pobieranego z niego prądu. Dzieje się tak dlatego, że każde rzeczywiste źródło napięcia posiada *opór wewnętrzny*  $R_w$  . Napięcie zasilania jest mniejsze od SEM właśnie o spadek potencjału na oporze wewnętrznym

$$U_z = \varepsilon - IR_w \quad (21.19)$$

Z tej zależności wynika, że  $U_z = \varepsilon$ , gdy  $I = 0$  (definicja SEM).

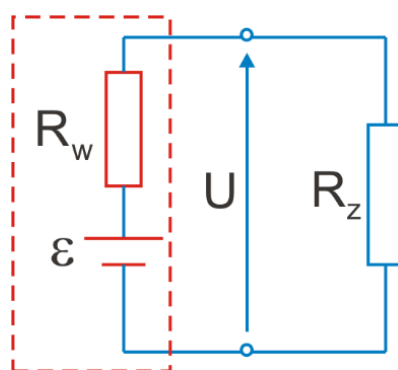
Typowe wartości oporu wewnętrznego różnych źródeł są zestawione w tabeli 21.2 poniżej.

Tab. 21.2. Wartości oporu wewnętrznego dla wybranych źródeł SEM

Źródło prądu	Opór wewnętrzny
akumulator	kilka mΩ
stabilizator sieciowy	1 - 50 mΩ
bateria typu R20	1 - 3 Ω
mikrofon	ok. 600 Ω
ogniwo słoneczne	5 - 100 kΩ

Rozpatrzmy teraz pokazany na rysunku 21.6 najprostszy obwód zamknięty. Linia przerywaną zaznaczono rzeczywiste źródło prądu tj. źródło siły elektromotorycznej  $\varepsilon$  oraz opór wewnętrzny  $R_w$ . Opornik zewnętrzny  $R_z$  przedstawia odbiornik mocy nazywany obciążeniem (np. żarówka, głośnik), a  $U_z$  jest napięciem zasilania (na biegunach źródła). Posłużymy się teraz równaniem (21.19) aby znaleźć natężenie prądu w tym obwodzie zamkniętym. Przekształcając ten wzór otrzymujemy

$$\varepsilon = U_z + IR_w \quad (21.20)$$



Rys. 21.6. Obwód zamknięty zawierający źródło SEM i odbiornik mocy

Zgodnie z prawem Ohma  $U_z = IR_z$  więc



#### Prawo, zasada, twierdzenie

$$\varepsilon = I(R_w + R_z)$$

(21.21)

Wzór (21.21) wyraża *prawo Ohma dla obwodu zamkniętego*.

### 21.4.2 Prawa Kirchhoffa

W praktyce mamy do czynienia z bardziej złożonymi obwodami elektrycznymi zawierającymi rozgałęzienia i większą liczbę źródeł SEM. Wówczas przy znajdowaniu prądów i napięć posługujemy się prawami Kirchhoffa.



#### Prawo, zasada, twierdzenie

*Pierwsze prawo Kirchhoffa: Twierdzenie o punkcie rozgałęzienia. Algebraiczna suma natężeń prądów przepływających przez punkt rozgałęzienia (węzeł) jest równa zero.*

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

(21.22)



#### Prawo, zasada, twierdzenie

*Drugie prawo Kirchhoffa: Twierdzenie o obwodzie zamkniętym. Algebraiczna suma sił elektromotorycznych i przyrostów napięć w dowolnym obwodzie zamkniętym jest równa zero (spadek napięcia jest przyrostem ujemnym napięcia).*

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i + \sum_{i=1}^m I_i R_i = 0$$

(21.23)

Twierdzenie o obwodzie zamkniętym jest wynikiem *zasady zachowania energii*, a twierdzenie o punkcie rozgałęzienia wynika z *zasady zachowania ładunku*.

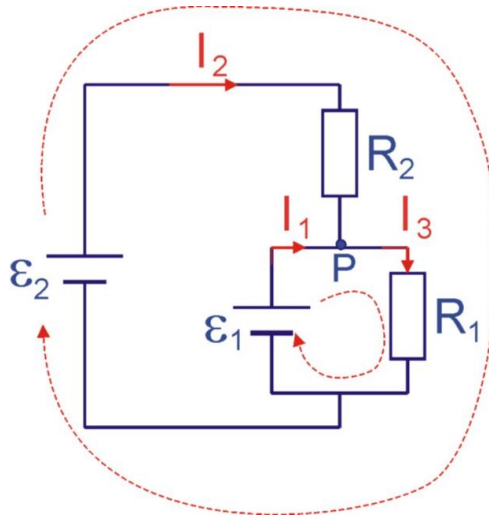
Przy stosowaniu praw Kirchhoffa zakładamy jakiś kierunek prądu i jego natężenie w każdej gałęzi. Spadek napięcia pojawia się gdy "przechodzimy" przez opornik w kierunku

zgodnym z przyjętym kierunkiem prądu, a przyrost napięcia gdy przechodzimy przez źródło SEM w kierunku od "-" do "+". Jeżeli w wyniku obliczeń otrzymamy ujemne natężenie prądu to znaczy, że rzeczywisty kierunek prądu jest przeciwny do przyjętego.



### Przykład

Stosując tę metodę rozważymy, jako przykład, dzielnik napięcia pokazany na rysunku 21.7. Opory wewnętrzne źródeł SEM pomijamy.



Rys. 21.7. Dzielnik napięcia

Zastosowanie II-ego prawa Kirchhoffa do zewnętrznej „dużej” pętli daje

$$\varepsilon_2 - I_2 R_2 - I_3 R_1 = 0 \quad (21.24)$$

a dla wewnętrznej „małej” pętli

$$\varepsilon_1 - I_3 R_1 = 0 \quad (21.25)$$

skąd wprost otrzymujemy natężenie prądu  $I_3$

$$I_3 = \frac{\varepsilon_1}{R_1} \quad (21.26)$$

Teraz odejmujemy stronami równań (21.24) i (21.25)

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - I_2 R_2 = 0 \quad (21.27)$$

i obliczamy natężenie prądu  $I_2$

$$I_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R_2} \quad (21.28)$$

Dla węzła  $P$  stosujemy I-sze prawo Kirchhoffa

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad (21.29)$$

gdzie znaki "+" oznacza prądy wpływające do węzła, a znak "-" prądy wypływające. Stąd wyliczamy prąd  $I_1$

$$I_1 = I_3 - I_2 = \frac{\varepsilon_1}{R_1} - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R_2} = \varepsilon_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{\varepsilon_2}{R_2} \quad (21.30)$$

gdzie podstawiliśmy uprzednio wyliczone wyrażenia na  $I_3$  i  $I_2$ .

Zauważmy, że możemy dobrać elementy obwodu tak aby

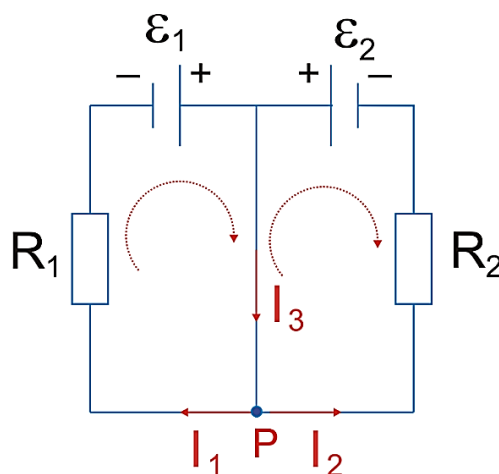
$$\frac{\varepsilon_1}{\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} = \frac{\varepsilon_2}{R_2} \quad (21.31)$$

Wtedy prąd  $I_1 = 0$  i źródło  $\varepsilon_1$  nie daje żadnego prądu (praktycznie nie wyczerpuje się). Opornik  $R_1$  ma więc napięcie określone przez  $\varepsilon_1$ , ale prąd pobiera z  $\varepsilon_2$ . Taki układ ma ważne zastosowanie praktyczne. Napięcie  $\varepsilon_1$  może być ogniwem wzorcowym (zapewniając bardzo dokładne napięcie na  $R_1$ ), a odbiornik  $R_1$  może pobierać duży prąd (głównie z  $\varepsilon_2$ ).



#### Ćwiczenie 21.4

Spróbuj teraz samodzielnie znaleźć prądy  $I_1$ ,  $I_2$  oraz  $I_3$  płynące w obwodzie pokazanym na rysunku poniżej.



Przyjmij umowne kierunki obchodzenia obwodów (oczek) takie jak zaznaczone strzałkami (zgodnie z ruchem wskazówek zegara). Podaj wartości prądów przyjmując  $\varepsilon_1 = 3 \text{ V}$ ,  $\varepsilon_2 = 1.5 \text{ V}$ ,  $R_1 = 1 \Omega$  oraz  $R_2 = 2 \Omega$ . Czy rzeczywiste kierunki prądów są zgodne z założonymi? Wynik zapisz poniżej.

$$I_1 =$$

$$I_2 =$$

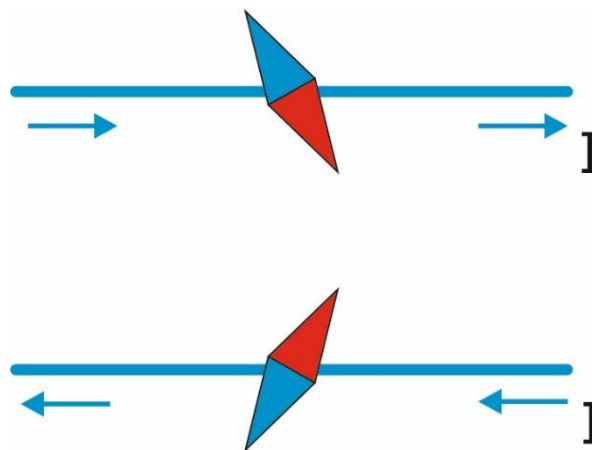
$$I_3 =$$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

## 22 Pole magnetyczne

### 22.1 Siła magnetyczna

W pobliżu przewodników z prądem elektrycznym i magnesów działają *siły magnetyczne*. Spotykamy je gdy mamy do czynienia z magnesem trwałym, elektromagnesem, silnikiem elektrycznym, prądnicą, czy monitorem komputerowym. Magnesem jest sama Ziemia. Jej działanie na igłę kompasu jest znane od Starożytności. Natomiast w XIX w. Oersted stwierdził, że kompas ulega również wychyleniu w pobliżu przewodnika, w którym płynie prąd i zmienia kierunek wychylenia wraz ze zmianą kierunku prądu (rysunek poniżej).



Rys. 22.1 Doświadczenie Oersteda

To oddziaływanie pomiędzy prądem i magnesem opisujemy wprowadzając pojęcie *pola magnetycznego*  $\mathbf{B}$ . Przypomnijmy, że w przypadku sił grawitacyjnych posługiwaliśmy się pojęciem natężenia pola grawitacyjnego  $\gamma$ , gdzie  $\mathbf{F}_G = m\gamma$ , a w przypadku sił elektrycznych pojęciem natężeniu pola elektrycznego  $\mathbf{E}$ , gdzie  $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$ . Natomiast siłę działającą na ładunek  $q$  poruszający się w polu magnetycznym z prędkością  $\mathbf{v}$  wiążemy z *indukcją magnetyczną*  $\mathbf{B}$ . Związek pomiędzy siłą magnetyczną a indukcją magnetyczną  $\mathbf{B}$  zapisujemy w postaci równania wektorowego



#### Definicja

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (22.1)$$

Siłę tę nazywamy *siłą Lorentza*  $\mathbf{F}$ , a powyższe równanie definiuje indukcję pola magnetycznego  $\mathbf{B}$ .



#### Jednostki

Jednostką indukcji  $\mathbf{B}$  jest *tesla*; (T);  $1 \text{ T} = 1 \text{ N}/(\text{Am}) = 1 \text{ Vs}/\text{m}^2$ .

Poniższa tabela pozwala na zorientowanie się w zakresie pól magnetycznych dostępnych w przyrodzie i wytwarzanych przez różne urządzenia.

Tab. 22.1 Zakres pól magnetycznych

Źródło pola $B$	$B_{maks.} [T]$
Pracujący mózg	$10^{-13}$
Ziemia	$\approx 4 \cdot 10^{-5}$
Elektromagnes	2
Cewka nadprzewodząca	20
Cewka impulsowa	70
Gwiazda neutronowa	$\approx 10^8$

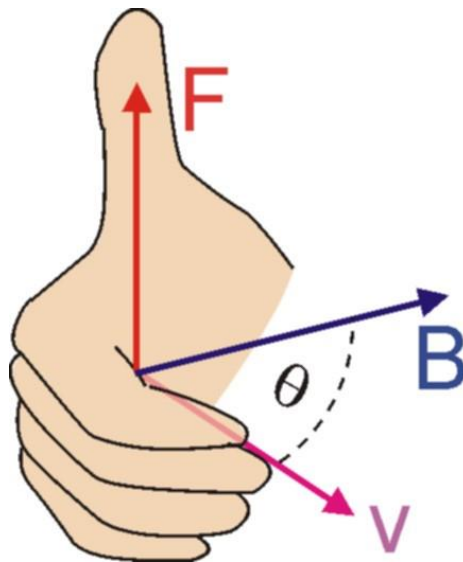
Zgodnie z definicją iloczynu wektorowego, z równania (22.1) wynika, że wartość siły działająca na naładowaną cząstkę w polu magnetycznym jest równa

$$F = q|\mathbf{v}|B \sin \theta \quad (22.2)$$

gdzie  $\theta$  jest kątem pomiędzy wektorami  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{B}$ .

Siła jest równa zero gdy cząstka nie porusza się oraz gdy wektor prędkości jest równoległy do wektora  $\mathbf{B}$  ( $\theta = 0^\circ$ ) lub do niego antyrównoległy ( $\theta = 180^\circ$ ). Natomiast maksimum siły występuje gdy wektor prędkości  $\mathbf{v}$  jest prostopadły do wektora  $\mathbf{B}$  ( $\theta = 90^\circ$ ).

Równanie (22.1) określa również kierunek i zwrot wektora siły  $F$ . Z definicji iloczynu wektorowego wynika, że wektor  $\mathbf{F}$  jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{B}$ . Zwrot jego jest określony regułą śruby prawoskrętnej lub regułą prawej ręki. Jeżeli palce prawej ręki zginają się w kierunku obrotu wektora  $\mathbf{v}$  do wektora  $\mathbf{B}$  (po mniejszym łuku) to kciuk wskazuje kierunek wektora  $\mathbf{F} \sim \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  tak jak na rysunku 22.2.



Rys. 22.2. Reguła prawej ręki wyznacza kierunek działania siły w polu magnetycznym

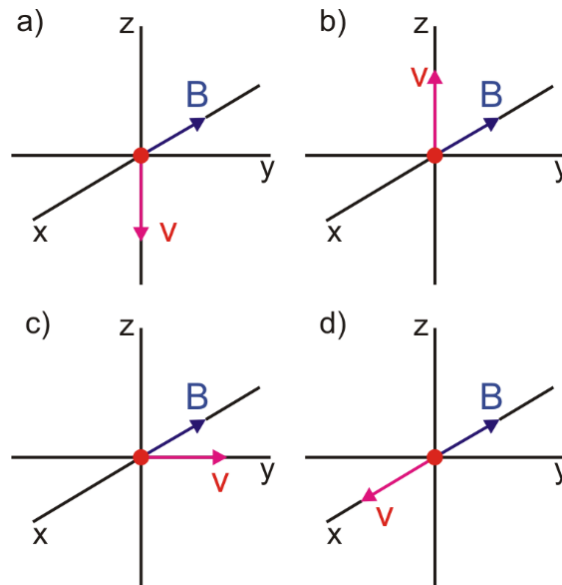
Zwrot wektora  $\mathbf{F}$  pokazany na rysunku powyżej odpowiada dodatniemu ładunkowi  $q$ . Dla ładunku ujemnego kierunek jest ten sam ale zwrot przeciwny.





**Ćwiczenie 22.1**

W każdej z czterech pokazanych konfiguracji zaznaczono wektor prędkości ładunku (dodatniego) i wektor indukcji magnetycznej. Spróbuj narysować wektor siły działająca na ładunek. Skorzystaj z definicji iloczynu wektorowego.

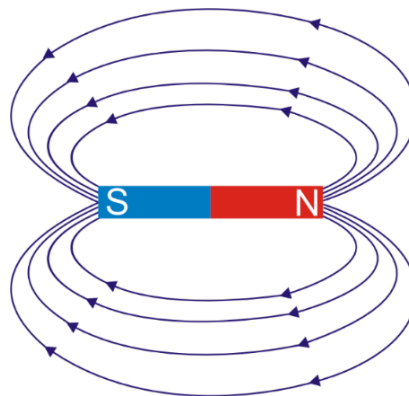


Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

**22.2 Linie pola magnetycznego, kierunek pola**

Pole magnetyczne prezentujemy graficznie rysując tzw. *linie pola magnetycznego* czyli linie wektora indukcji magnetycznej  $B$ . Wektor  $B$  jest *styczny* do tych linii pola w każdym punkcie, a rozmieszczenie linii obrazuje wielkość pola - im gęściej rozmieszczone są linie tym silniejsze jest pole.

Na rysunku 22.3 pokazane są linie pola magnetycznego w pobliżu stałego magnesu w kształcie sztabki. Linie te przechodzą przez magnes i tworzą *zamknięte pętle*.



Rys. 22.3. Pole magnesu sztabkowego



### Prawo, zasada, twierdzenie

To, że linie pola  $B$  są zawsze liniami zamkniętymi stanowi fundamentalną różnicę między stałym polem magnetycznym i elektrycznym, którego linie zaczynają się i kończą na ładunkach.

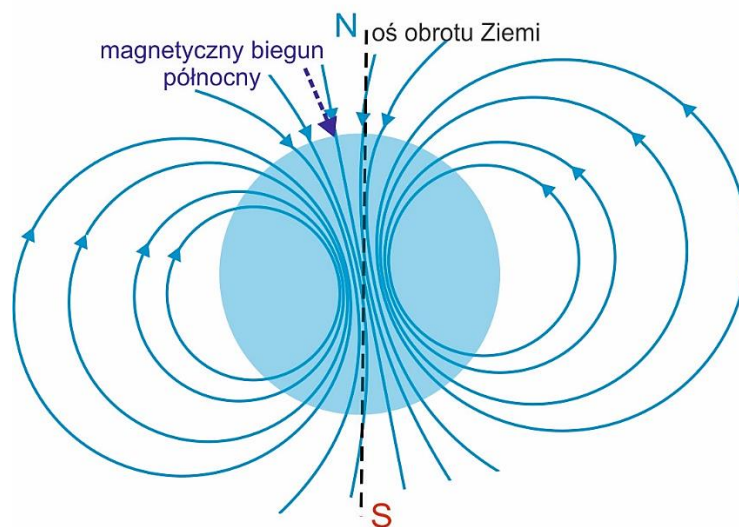
Najsilniejsze pole występuje w pobliżu końców magnesu czyli w pobliżu *biegunów magnetycznych*  $\text{P}$ . Koniec magnesu, z którego wychodzą linie nazywamy północnym biegunem magnesu (N), a ten do którego wchodzi linie biegunem południowym (S).

Podobnie jak w przypadku pola magnetycznego Ziemi kierunek linii pola magnesu można wyznaczyć za pomocą kompasu przesuwając go wokół magnesu. Kierunek igły kompasu, która sama jest magnesem sztabkowym, pokazuje kierunek pola magnetycznego.

Podobnie jak w przypadku pola magnetycznego Ziemi kierunek linii pola magnesu można wyznaczyć za pomocą kompasu przesuwając go wokół magnesu. Kierunek igły kompasu, która sama jest magnesem sztabkowym, pokazuje kierunek pola magnetycznego. Igła wskazuje kierunek od bieguna północnego w stronę południowego. Wynika to z oddziaływania magnesów. Doświadczalnie stwierdzono, że bez względu na kształt magnesów, *bieguny przeciwne przyciągają się, a jednakowe bieguny odpychają się*.

Linie pola magnetycznego można też wyznaczyć doświadczalnie przy użyciu np. opiłków żelaza, które zachowują się jak *dipole magnetyczne*  $\text{P}$  (małe magnesy). Opiłki ustawiają się zgodnie z kierunkiem  $B$  i dają obraz linii pola magnetycznego.

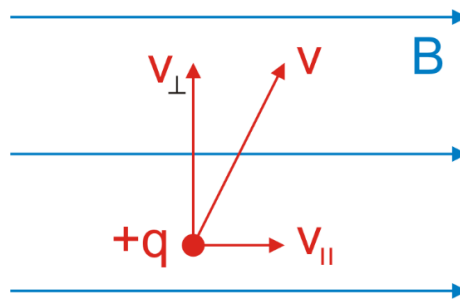
Na rysunku 22.4 pokazane jest pole magnetyczne Ziemi. Igła magnetyczna kompasu w polu Ziemi pokazuje kierunek linii taki jak na rysunku. Widzimy, że linie są skierowane w stronę Arktyki i zgodnie z przyjętą konwencją oznaczałoby to, że tam znajduje się magnetyczny biegun południowy. Tymczasem ten kierunek geograficzny przyjmujemy za północy. W związku z tym w przypadku Ziemi odступujemy od przyjętej reguły i ten biegun nazywamy *północnym biegunem geomagnetycznym*  $\text{P}$ . Należy przy tym zwrócić uwagę na to, że biegun geomagnetyczny nie pokrywa się z geograficznym biegunem północnym. Aktualnie znajduje się w północnej Kanadzie. Bieguny magnetyczne Ziemi zmieniają swoje położenie i w odległej przeszłości północny biegun geomagnetyczny znajdował się na półkuli południowej.



Rys. 22.4. Pole magnetyczne Ziemi

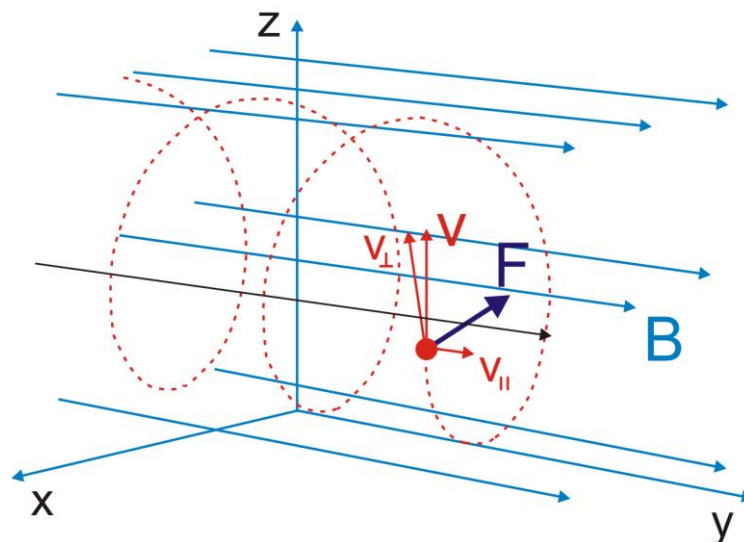
### 22.3 Ruch naładowanych cząstek w polu magnetycznym

Zauważmy, że zgodnie z równaniem (22.1) wektor siły  $F$  działającej na naładowaną cząstkę poruszającą się w polu magnetycznym jest *zawsze prostopadły* do wektora prędkości  $\mathbf{v}$  i wektora  $\mathbf{B}$ . Oznacza to, że siła  $F$  nie może zmienić wartości prędkości  $\mathbf{v}$ , a co za tym idzie nie może zmienić energii kinetycznej cząstki. Siła  $F$  może jedynie zmienić kierunek prędkości  $\mathbf{v}$ , zakrzywić tor jej ruchu. Siła magnetyczna jest więc siłą dośrodkową. Żeby prześledzić tor ruchu naładowanej cząstki w polu magnetycznym rozpatrzmy cząstkę, która z prędkością  $\mathbf{v}$  wpada do jednorodnego stałego pola magnetycznego o indukcji  $\mathbf{B}$  tak jak na rysunku 22.5.



Rys. 22.5. Naładowana cząstka wpada do pola  $\mathbf{B}$  z prędkością  $\mathbf{v}$ .

Prędkość początkową cząstki (z którą wlatuje w obszar pola  $\mathbf{B}$ ) możemy rozłożyć na dwie składowe: jedną równoległą  $v_{\parallel}$ , a drugą prostopadłą  $v_{\perp}$  do pola  $\mathbf{B}$ . Zauważmy, że zgodnie ze wzorem (22.2) siła magnetyczna związana jest *tylko ze składową prędkości prostopadłą do pola  $\mathbf{B}$*  ( $\theta = 90^\circ$ ) *natomiast nie zależy od składowej równoległej do pola* ( $\theta = 0^\circ$ ). Siła magnetyczna zmienia więc tylko składową prędkości prostopadłą do pola  $\mathbf{B}$ , natomiast składowa prędkości równoległa pozostaje stała. W rezultacie cząstka przemieszcza się ze stałą prędkością wzdłuż pola  $\mathbf{B}$  równocześnie zataczając pod wpływem siły magnetycznej okręgi w płaszczyźnie prostopadłej do pola. Cząsteczka porusza się po *spirali* tak jak pokazano na rysunku 22.6.



Rys. 22.6. Naładowana cząsteczka poruszająca się w polu magnetycznym po torze spiralnym



**Ćwiczenie 22.2**

Teraz spróbuj opisać ruch ładunku  $q$ , który porusza się z prędkością  $v$  prostopadle do pola magnetycznego  $B$ .

Wskazówka: Ponieważ prędkość jest prostopadła do pola  $B$  to tor cząstki jest okręgiem leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do pola  $B$ . Oblicz promień tego okręgu i częstotliwość z jaką krąży ładunek.

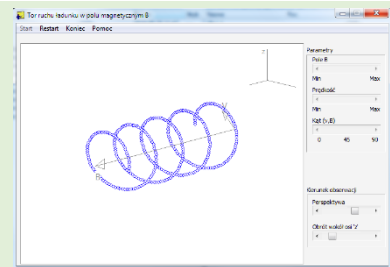
$R =$

$T =$

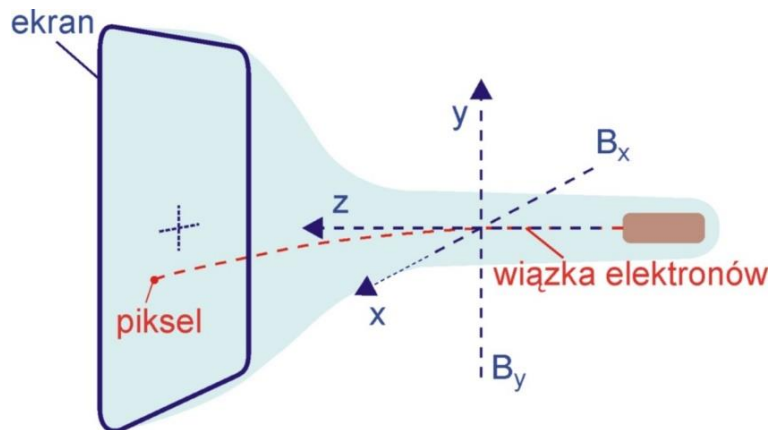
Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.



Korzystając z programu komputerowego „Tor ładunku w polu magnetycznym B”, dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH, możesz prześledzić tor po jakim porusza się naładowana cząstka w polu magnetycznym w zależności od wartości indukcji pola  $B$ , wartości prędkości cząstki, oraz kąta pod jakim cząstka wpada do pola  $B$ .



Zjawisko odchylenia toru naładowanych cząstek w polu magnetycznym znalazło szerokie zastosowanie w technice i nauce. Jednym z przykładów jest lampa kineskopowa w oscyloskopie czy monitorze. Na rysunku 22.7 pokazany jest przykładowy tor wiązki elektronów w lampie.

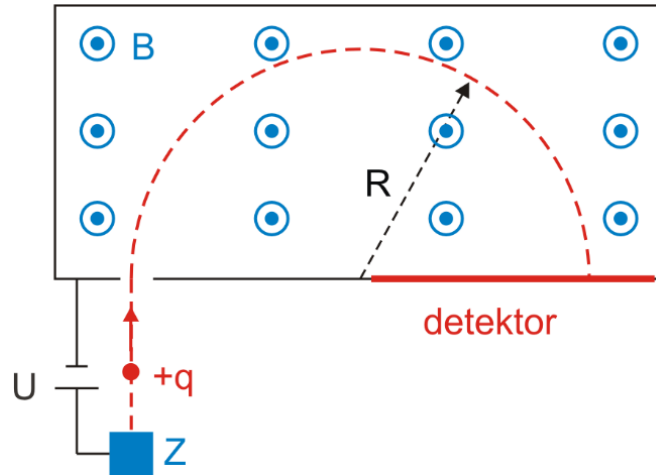


Rys. 22.7. Odchylenie wiązki elektronów w polu magnetycznym w lampie kineskopu

W kineskopie pole magnetyczne jest przyłożone wzdłuż kierunku  $x$  i w kierunku  $y$ . Pole  $B_x$ , w zależności od zwrotu  $(+x, -x)$  odchyła elektrony w górę lub w dół ekranu, natomiast pole  $B_y$ , w zależności od zwrotu  $(+y, -y)$  odchyła wiązkę elektronów w prawo lub w lewo. W ten

sposób sterujemy wiązką elektronów, która przebiega (skanuje) cały ekran docierając do każdego punktu ekranu (piksela).

Innym przykład stanowi *spektrometr masowy* , którego schemat jest pokazany na rysunku 22.8.



Rys. 22.8. Schemat działania spektrometru masowego

Cząstka (jon) o masie  $m$  i ładunku  $q$  wyemitowana ze źródła  $Z$  zostaje przyspieszona napięciem  $U$  po czym wlatuje w obszar jednorodnego pola magnetycznego  $B$  prostopadłego do toru cząstki. (Pamiętaj, że symbol  $\odot$  oznacza wektor skierowany przed płaszczyznę rysunku, a symbolem  $\otimes$  oznaczamy wektor skierowany za płaszczyznę rysunku.) Pole magnetyczne zakrzywia tor cząstki, tak że porusza się ona po półokręgu o promieniu  $R$ , po czym zostaje zarejestrowana w detektorze (np. na kliszy fotograficznej) w odległości  $2R$  od miejsca wejścia w pole magnetyczne.

Promień okręgu po jakim porusza się naładowana cząstka w polu  $B$  obliczyliśmy w ostatnim ćwiczeniu

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (22.3)$$

gdzie  $v$  jest prędkością z jaką porusza się cząstka. Tę prędkość uzyskuje ona dzięki przyłożonemu napięciu  $U$ . Zmiana energii potencjalnej ładunku przy pokonywaniu różnicy potencjału  $U$  jest równa energii kinetycznej jaką uzyskuje ładunek

$$\Delta E_k = \Delta E_p \quad (22.4)$$

lub

$$\frac{mv^2}{2} = qU \quad (22.5)$$

Stąd otrzymujemy wyrażenie na prędkość  $v$

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \quad (22.6)$$

i podstawiamy je do równania (22.3)

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{q}} \quad (22.7)$$

Ostatecznie po przekształceniu otrzymujemy

$$m = \frac{R^2 B^2 q}{2U} \quad (22.8)$$

Widzimy, że pomiar odległości ( $2R$ ), w jakiej została zarejestrowana cząstka pozwala na wyznaczenie jej masy  $m$ .

Zakrzywianie toru cząstek w polu magnetycznym jest również wykorzystywane w urządzeniach zwanych *akceleratorami*. Te urządzenia służące do przyspieszania cząstek naładowanych, znalazły szerokie zastosowanie w nauce, technice i medycynie.



Przykładem akceleratora cyklicznego jest cyklotron. O jego działaniu możesz przeczytać w *Dodatku 2*, na końcu modułu VII.

## 22.4 Działanie pola magnetycznego na przewodnik z prądem

Ponieważ siła magnetyczna działa na ładunki w ruchu zatem działa na cały przewodnik z prądem

$$F = Ne v_u B \sin \theta \quad (22.9)$$

gdzie  $N$  jest liczbą elektronów zawartych w danym przewodniku o długości  $l$  i przekroju poprzecznym  $S$ , a  $v_u$  ich średnią prędkością unoszenia. Jeżeli  $n$  jest koncentracją elektronów (ilością elektronów w jednostce objętości) to

$$N = nSl \quad (22.10)$$

Zgodnie z wzorem (21.5) natężenie prądu w przewodniku wynosi

$$I = nS e v_u \quad (22.11)$$

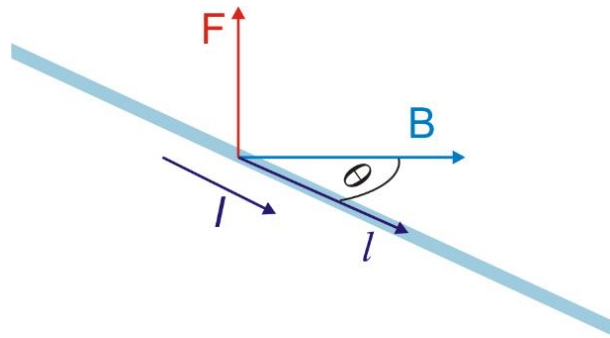
Podstawiając te wyrażenia do wzoru na siłę otrzymujemy

$$F = nS l e \frac{I}{nS e} B \sin \theta = I l B \sin \theta \quad (22.12)$$

lub w zapisie wektorowym

$$\mathbf{F} = I \mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (22.13)$$

Na rysunku poniżej zaznaczona jest siła działająca w polu magnetycznym na przewodnik, w którym płynie prąd o natężeniu  $I$ . W polu magnetycznym znajduje się odcinek  $l$  przewodnika, a wektor długości  $l$  ma zwrot zgodny ze zwrotem prądu.

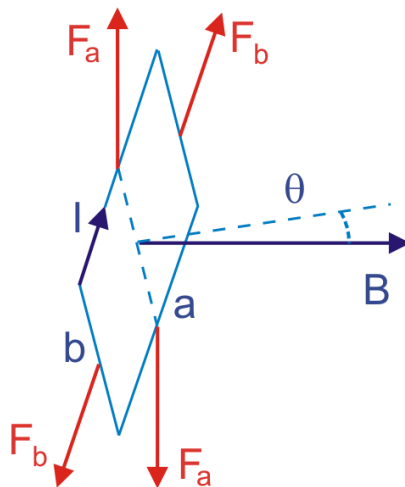


Rys. 22.9. Siła działająca w polu magnetycznym na przewodnik z prądem

Równanie  $\mathbf{F} = I \mathbf{l} \times \mathbf{B}$  jest równoważne równaniu  $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  w tym sensie, że każde z nich definiuje indukcję pola magnetycznego  $B$ . Jednak w praktyce łatwiej jest zmierzyć siłę działającą na przewodnik niż na pojedynczy ładunek.

#### 22.4.1 Obwód z prądem

Rozważmy teraz działanie pola magnetycznego na zamknięty obwód z prądem. W tym celu rozpatrzmy prostokątną ramkę o bokach  $a$  i  $b$  umieszczoną w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $B$ . Taka ramka stanowi podstawowy element silnika elektrycznego. Przez ramkę płynie prąd o natężeniu  $I$ , a normalna do płaszczyzny ramki tworzy kąt  $\theta$  z polem  $B$  tak jak na rysunku 22.10.



Rys. 22.10. Działanie pola magnetycznego  $B$  na ramkę z prądem  $I$

Rozpatrujemy siłę działającą na każdy z boków. Zauważmy, że siły  $F_b$  działające na boki  $b$  znoszą się wzajemnie. Siły  $F_a$  działające na boki  $a$  też się znoszą ale tworzą parę sił dającą wypadkowy *moment siły* obracający ramkę

$$\tau = F_a \frac{b}{2} \sin \theta + F_a \frac{b}{2} \sin \theta = F_a b \sin \theta \quad (22.14)$$

lub w zapisie wektorowym (na podstawie definicji iloczynu wektorowego)

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F}_a \times \mathbf{b} \quad (22.15)$$

Siła  $F_a$  wynosi

$$F_a = I a B \quad (22.16)$$

więc

$$\tau = I a b B \sin \theta = I S B \sin \theta \quad (22.17)$$

gdzie  $S = ab$  jest powierzchnią ramki. Równanie (22.17) możemy zapisać w postaci wektorowej

$$\boldsymbol{\tau} = I \mathbf{S} \times \mathbf{B} \quad (22.18)$$

gdzie  $\mathbf{S}$  jest wektorem powierzchni.

### 22.4.2 Magnetyczny moment dipolowy

Wielkość wektorową



#### Definicja

$$\boldsymbol{\mu} = I \mathbf{S} \quad (22.19)$$

nazywamy *magnetycznym momentem dipolowym*  $\boldsymbol{\mu}$ . Wektor  $\boldsymbol{\mu}$  jest prostopadły do płaszczyzny ramki z prądem.

Pole magnetyczne działa więc na ramkę z prądem momentem skręcającym

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad (22.20)$$

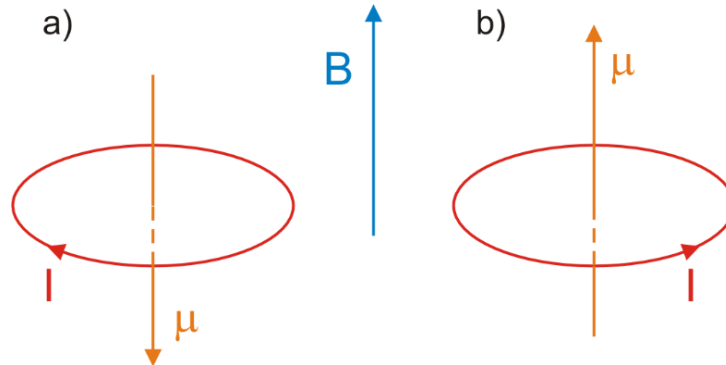
*obracając ją* tak jak igłę kompasu, która umieszczona w polu magnetycznym obraca się ustawiając zgodnie z polem. Położenie równowagi ramki występuje dla  $\theta = 0$  tj. gdy moment dipolowy  $\boldsymbol{\mu}$  jest równoległy do pola magnetycznego  $\mathbf{B}$  (ramka jest ustawiona prostopadle do pola). Ramka zachowuje się więc tak jak igła kompasu czyli *dipol magnetyczny*.

Obracając dipol magnetyczny pole magnetyczne wykonuje pracę i wobec tego dipol posiada energię potencjalną. Można pokazać, że energia potencjalna dipola magnetycznego związana z jego orientacją w zewnętrznym polu magnetycznym dana jest równaniem

$$E = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu B \cos \theta \quad (22.21)$$



Widzimy, że energia osiąga minimum dla momentu dipolowego  $\mu$  równoległego do zewnętrznego pola magnetycznego  $B$ , a maksimum gdy moment dipolowy jest skierowany przeciwnie do pola (rysunek 22.11).



Rys. 22.11. Ustawienie momentu dipolowego (pętli z prądem) w zewnętrznym polu magnetycznym odpowiadające a) maksimum, b) minimum energii

Jak już mówiliśmy ramka z prądem jest przykładem dipola magnetycznego. Taką "kołową ramką z prądem" jest również elektron krążący po orbicie w atomie. Moment dipolowy elektronu krążącego po orbicie o promieniu  $r$  wynosi

$$\mu_e = I(\pi r^2) \quad (22.22)$$

Natężenie prądu  $I$  wytwarzanego przez elektron o ładunku  $e$  przebiegający orbitę w czasie  $T$  (okres obiegu) wynosi

$$I = \frac{q}{t} = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r} \quad (22.23)$$


gdzie  $v$  jest prędkością elektronu. Stąd

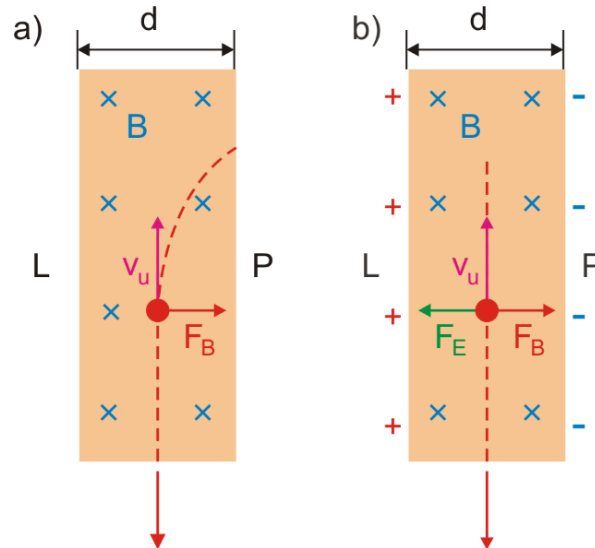
$$\mu_e = \frac{ev}{2\pi r} (\pi r^2) = \frac{evr}{2} = \frac{e}{2m} (mvr) = \frac{e}{2m} L \quad (22.24)$$

gdzie  $L = mvr$  jest momentem pędu elektronu. Elektron, krążący po orbicie jest więc *elementarnym dipolem magnetycznym*. Własności magnetyczne ciał są właśnie określone przez zachowanie się tych elementarnych dipoli w polu magnetycznym. Własności te omówimy w dalszych rozdziałach.

## 22.5 Efekt Halla

Dowiedzieliśmy się już, że poruszające się ładunki elektryczne są odchylane w polu magnetycznym. Rozpatrzmy teraz płytkę metalu (lub półprzewodnika) umieszczoną w polu

magnetycznym, prostopadłym do kierunku przepływu prądu. Jeżeli w płytce płynie prąd to na ładunki działała siła odchylająca powodująca zakrzywienie ich torów w kierunku jednej ze ścianek bocznych płytki tak jak pokazano na rysunku 22.12. Gromadzenie się ładunków na ścianie bocznej powoduje powstanie poprzecznego *poła elektrycznego Halla*  $E_H$  .



Rys 22.12. Siły działające na elektrony w pasku metalu umieszczonym w polu magnetycznym  $B$ .  
 a) tor elektronów zaraz po włączeniu pola  $B$ , b) tor elektronów w stanie równowagi

Pole Halla jest dane zależnością

$$E_H = \frac{\Delta V_{LP}}{d} \quad (22.25)$$

gdzie  $\Delta V_{LP}$  jest różnicą potencjałów pomiędzy stroną lewą  $L$  i prawą  $P$ , a  $d$  odległością między nimi (szerokością płytki). Zwróćmy uwagę, że strona prawa płytki ładuje się ujemnie i powstałe pole Halla przeciwdziała dalszemu przesuwaniu elektronów. Osiągnięty zostaje stan równowagi, w którym odchylające pole magnetyczne jest równoważone przez pole elektryczne Halla

$$\mathbf{F}_B = -\mathbf{F}_E \quad (22.26)$$

lub

$$e(\mathbf{v}_u \times \mathbf{B}) = -e\mathbf{E}_H \quad (22.27)$$

Stąd

$$\mathbf{E}_H = -\mathbf{v}_u \times \mathbf{B} \quad (22.28)$$

Wynika stąd, że jeżeli zmierzmy  $E_H$  (w praktyce  $V_{LP}$ ) i pole  $B$  to możemy wyznaczyć  $v_u$ . Gdy  $v_u$  i  $B$  są prostopadłe to

$$E_H = v_u B \quad (22.29)$$

Na podstawie równania (21.5)

$$v_u = \frac{I}{neS} = \frac{j}{ne} \quad (22.30)$$

zatem koncentracja nośników

$$n = \frac{jB}{eE_H} \quad (22.31)$$

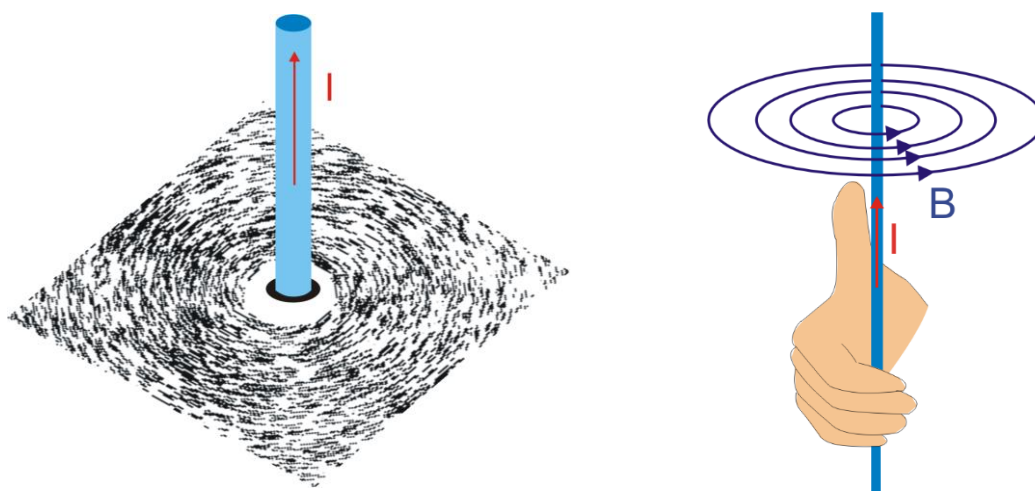
Możemy znając  $E_H$ ,  $B$  oraz gęstość prądu wyznaczyć koncentrację nośników  $n$ . Zjawisko Halla znalazło w praktyce zastosowanie, między innymi, do pomiaru pól magnetycznych oraz do pomiaru natężenia prądu elektrycznego.

## 23 Pole magnetyczne przewodników z prądem

### 23.1 Prawo Ampère'a

#### 23.1.1 Pole wokół przewodnika z prądem

Jak już mówiliśmy, doświadczalnie można wyznaczyć linie pola magnetycznego przy użyciu na przykład opiłków żelaza, które zachowują się jak dipole magnetyczne. Opiłki ustawiają się zgodnie z kierunkiem  $B$  i dają obraz linii pola magnetycznego. Na rysunku 23.1a pokazany jest rozkład opiłków żelaza wokół prostoliniowego przewodnika z prądem. Widzimy więc, że linie pola  $B$  wytwarzanego przez przewodnik są *zamkniętymi* współśrodkowymi okręgami w płaszczyźnie prostopadłej do przewodnika tak jak pokazano na rysunku 23.1b. Wektor  $B$  jest styczny do tych linii pola w każdym punkcie. Zwrot wektora indukcji  $B$  wokół przewodnika wyznaczamy stosując następującą zasadę: jeśli kciuk prawej ręki wskazuje kierunek prądu  $I$ , to zgięte palce wskazują kierunek  $B$  (linie pola  $B$  krążą wokół prądu).



Rys. 23.1. Linie pola magnetycznego wokół prostoliniowego przewodnika z prądem; (opiłki żelaza rozsypane na powierzchni kartki umieszczonej prostopadle do przewodnika z prądem tworzą koncentryczne kręgi odzwierciedlając kształt linii pola magnetycznego)

Natomiast wartość pola  $B$  wokół przewodnika z prądem można obliczyć z korzystając z *prawa Ampère'a*.

#### 23.1.2 Prawo Ampère'a

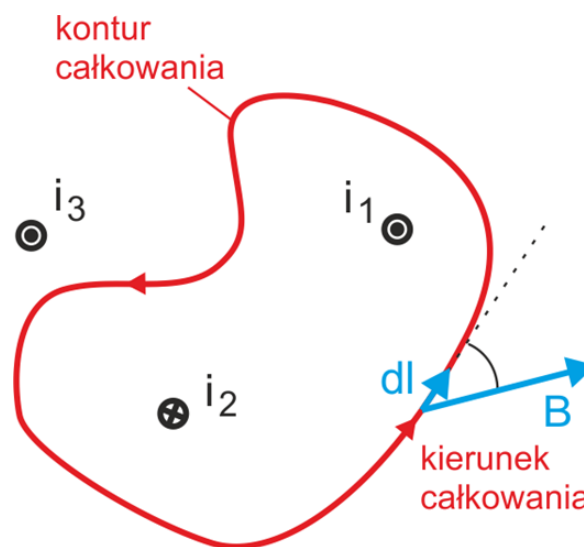
Chcemy teraz znaleźć pole magnetyczne wytwarzane przez powszechnie występujące rozkłady prądów, takie jak przewodniki prostoliniowe, cewki itp. Potrzebujemy prawa analogicznego do prawa Gaussa, które pozwalało na podstawie znajomości ładunku (źródła pola  $E$ ) wyznaczyć natężenie pola  $E$ . Dla pola magnetycznego szukamy związku pomiędzy prądem (źródłem pola  $B$ ) a indukcją magnetyczną. Taki związek jest wyrażony poprzez *prawo Ampère'a*.


**Prawo, zasada, twierdzenie**

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

(23.1)

Pokazaliśmy, że linie pola magnetycznego wokół przewodnika z prądem stanowią zamknięte okręgi. Stąd, zamiast sumowania (całki) po zamkniętej powierzchni (jak w prawie Gaussa), w prawie Ampère'a sumujemy (całkujemy) po *zamkniętym konturze* (liczymy całkę krzywoliniową). Taka całka dla pola  $E$  równała się wypadkowemu ładunkowi wewnątrz powierzchni, a w przypadku pola  $B$  jest równa *całkowitemu prądowi  $I$  otoczonemu przez kontur* (rysunek poniżej). Tak jak w przypadku prawa Gaussa wynik był prawdziwy dla dowolnej powierzchni zamkniętej, tak dla prawa Ampère'a wynik nie zależy od kształtu konturu zamkniętego.



Rys. 23.2. Krążenie wektora  $B$  po dowolnym zamkniętym konturze jest proporcjonalne do całkowitego natężenia prądu objętego konturem (w tym przypadku  $I_1$  i  $I_2$ ).

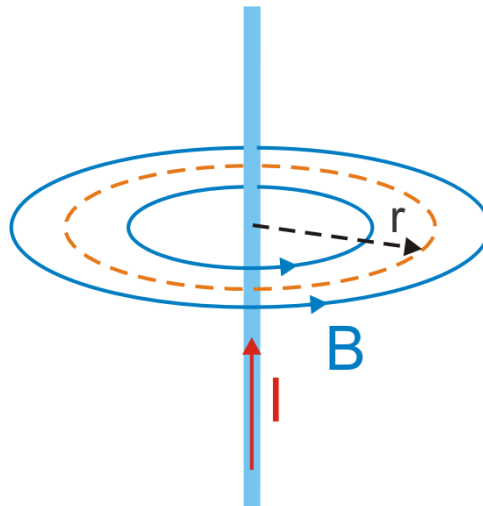
Stała  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$ , jest tzw. *przenikalnością magnetyczną próżni*  $\text{P}$ . Gdy pole magnetyczne jest wytworzone nie w próżni ale w jakimś ośrodku to fakt ten uwzględniamy wprowadzając stałą materiałową  $\mu_r$ , zwaną *względłą przenikalnością magnetyczną*  $\text{P}$  ośrodka tak, że prawo Ampère'a przyjmuje postać

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \mu_r I$$

(23.2)

### 23.1.3 Przykład - prostoliniowy przewodnik

Jako przykład obliczymy pole w odległości  $r$  od nieskończenie długiego prostoliniowego przewodnika, w którym płynie prąd o natężeniu  $I$  (rysunek 23.3). Ponieważ linie pola  $B$  wytwarzanego przez przewodnik są współśrodkowymi okręgami więc jako drogę całkowania wybieramy okrąg o promieniu  $r$ . W każdym punkcie naszego konturu pole  $B$  jest do niego styczne (równoległe do elementu konturu  $d\mathbf{l}$ ).


 Rys. 23.3. Kontur kołowy o promieniu  $r$  wokół przewodnika z prądem

Wówczas na podstawie prawa Ampère'a

$$B2\pi r = \mu_0 I \quad (23.3)$$

skąd

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (23.4)$$

W ten sposób obliczyliśmy pole  $B$  na zewnątrz przewodnika. Wartość pola jest taka jakby cały prąd płynął przez środek przewodnika.

Natomiast jeżeli chcemy obliczyć pole wewnątrz przewodnika (pręta) to wybieramy kontur kołowy o promieniu  $r < R$ , gdzie  $R$  jest promieniem przewodnika. Wewnątrz konturu przepływa prąd  $i$  będący częścią całkowitego prądu  $I$

$$i = I \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \quad (23.5)$$

Na podstawie prawa Ampère'a dla takiego konturu

$$B2\pi r = \mu_0 i \quad (23.6)$$

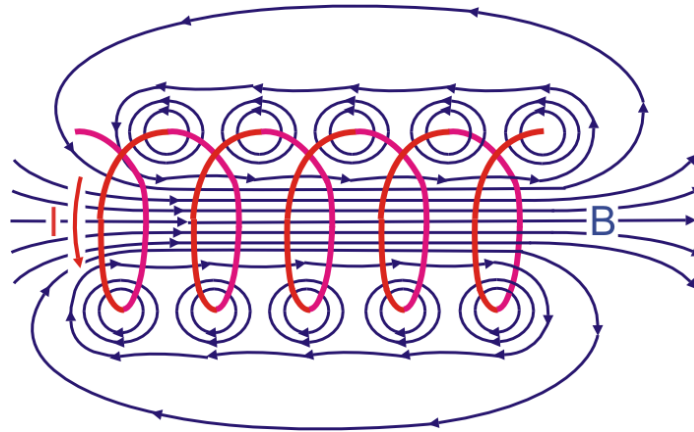
skąd, po uwzględnieniu zależności (23.5) otrzymujemy

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \quad (23.7)$$

Pole magnetyczne wewnątrz nieskończonego, prostoliniowego przewodnika z prądem rośnie proporcjonalnie do  $r$  w miarę przechodzenia od środka do powierzchni przewodnika.

### 23.1.4 Przykład - cewka (solenoid)

Zastosujemy teraz prawo Ampère'a do obliczenia pola magnetycznego wewnątrz cewki przez którą płynie prąd o natężeniu  $I$  (rysunek 23.4).

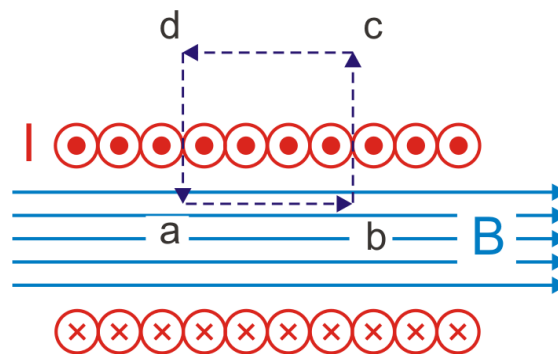


Rys. 23.4. Pole magnetyczne  $B$  wytworzone przez prąd  $I$  przepływający przez cewkę

Pole magnetyczne wytworzone przez całą cewkę jest sumą wektorową pól wytwarzanych przez wszystkie zwoje. W punktach na zewnątrz cewki pole wytworzone przez części górne i dolne zwojów znosi się częściowo, natomiast wewnątrz cewki pola wytworzone przez poszczególne zwoje sumują się.

Jeżeli mamy do czynienia z *solenoidem* tj. z cewką o ciasno przylegających zwojach, której długość jest znacznie większa od jej średnicy to możemy przyjąć, że pole magnetyczne wewnątrz solenoidu jest jednorodne, a na zewnątrz równe zero.

Na rysunku 23.5 pokazany jest przekrój odcinka idealnego solenoidu. Prawo Ampère'a zastosujemy dla konturu zaznaczonego na rysunku linią przerywaną.



Rys. 23.5. Zastosowanie prawa Ampère'a do obliczenia pola magnetycznego wewnątrz solenoidu

Całkę krzywoliniową  $\oint \mathbf{B} d\mathbf{l}$  przedstawimy jako sumę czterech całek

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{B} d\mathbf{l} + \int_b^c \mathbf{B} d\mathbf{l} + \int_c^d \mathbf{B} d\mathbf{l} + \int_d^a \mathbf{B} d\mathbf{l} \quad (23.8)$$

Całka druga i czwarta są równe zero bo wektor  $\mathbf{B}$  jest prostopadły do elementu konturu  $d\mathbf{l}$  (iloczyn skalarny wektorów prostopadłych jest równy zero). Trzecia całka też jest równa zero ale dlatego, że  $B = 0$  na zewnątrz solenoidu. Tak więc niezerowa jest tylko całka pierwsza

$$\int_a^b \mathbf{B} d\mathbf{l} = B h \quad (23.9)$$

gdzie  $h$  jest długością odcinka  $ab$ . Teraz obliczmy prąd obejmowany przez wybrany kontur. Jeżeli cewka ma  $n$  zwojów na jednostkę długości to wewnątrz konturu jest  $nh$  zwojów. Oznacza to, że całkowity prąd przez kontur wynosi

$$I_{\text{całk.}} = Inh \quad (23.10)$$

gdzie  $I$  jest prądem przepływającym przez pojedynczy zwoj cewki. Na podstawie prawa Ampère'a

$$Bh = \mu_0 Inh \quad (23.11)$$

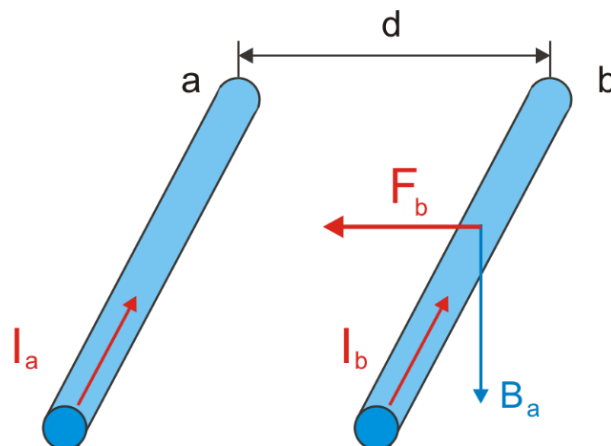
skąd pole magnetyczne wewnątrz solenoidu

$$B = \mu_0 nI \quad (23.12)$$

Powyższe równanie stosuje się z powodzeniem również do rzeczywistych cewek (dla punktów z wnętrza cewki, odległych od jej końców). Cewki stanowią praktyczne źródło jednorodnego pola magnetycznego.

### 23.2 Oddziaływanie równoległych przewodników z prądem

Na rysunku 23.6 przedstawione są dwa prostoliniowe przewodniki z prądem umieszczone równoległe w próżni w odległości  $d$  od siebie.



Rys. 23.6. Przewodniki z prądem oddziałujące na siebie za pośrednictwem pola magnetycznego



Przewodnik  $a$  wytwarza w swoim otoczeniu w odległości  $d$  pole magnetyczne, które zgodnie ze wzorem (23.5) wynosi

$$B_a = \frac{\mu_0 I_a}{2\pi d} \quad (23.13)$$

W tym polu znajduje się przewodnik  $b$ , w którym płynie prąd  $I_b$ . Na odcinek  $l$  tego przewodnika działa siła

$$F_b = I_b l B_a = \frac{\mu_0 l I_a I_b}{2\pi d} \quad (23.14)$$

Zwrot siły jest pokazany na rysunku. Oczywiście to rozumowanie można „odwrócić” i obliczyć siłę jaka działa na przewodnik  $a$  w polu magnetycznym wytwarzanym przez przewodnik  $b$ . Wynik obliczeń jest ten sam co wprost wynika z trzeciej zasady dynamiki Newtona. Widzimy, że dwa równoległe przewodniki z prądem oddziałują na siebie za pośrednictwem pola magnetycznego. Przewodniki, w których prądy płyną w tych samych kierunkach przyciągają się, a te w których prądy mają kierunki przeciwne odpychają się.



#### Jednostki

Fakt oddziaływania przewodników równoległych wykorzystano do definicji ampera. Załóżmy, że  $d = 1\text{ m}$  oraz, że w przewodnikach płyną jednakowe prądy  $I_a = I_b = I$ . Jeżeli dobierzemy tak prąd aby siła przyciągania przewodników, na  $1\text{ m}$  ich długości, wynosiła  $2 \cdot 10^{-7}\text{ N}$  to mówimy, że natężenie prądu w tych przewodnikach jest równe *jednemu amperowi*.

### 23.3 Prawo Biota-Savarta

Istnieje inne równanie, zwane prawem Biota-Savarta, które pozwala obliczyć pole  $B$  z rozkładu prądu. To prawo jest matematycznie równoważne z prawem Ampère'a. Jednak prawo Ampère'a można stosować tylko gdy znana jest symetria pola (trzeba ją znać do obliczenia odpowiedniej całki). Gdy ta symetria nie jest znana to wówczas dzielimy przewodnik z prądem na różniczkowo małe elementy i stosując prawo Biota-Savarta obliczamy pole jakie one wytwarzają w danym punkcie. Następnie sumujemy (całkujemy) pola od tych elementarnych prądów żeby uzyskać wypadkowy wektor  $B$ . Na rysunku 23.7 pokazany jest krzywoliniowy przewodnik z prądem o natężeniu  $I$ . Zaznaczony jest element  $d\mathbf{l}$  tego przewodnika i pole  $d\mathbf{B}$  jakie wytwarza w punkcie  $P$ .

Zgodnie z prawem Biota-Savarta pole  $d\mathbf{B}$  w punkcie  $P$  wynosi

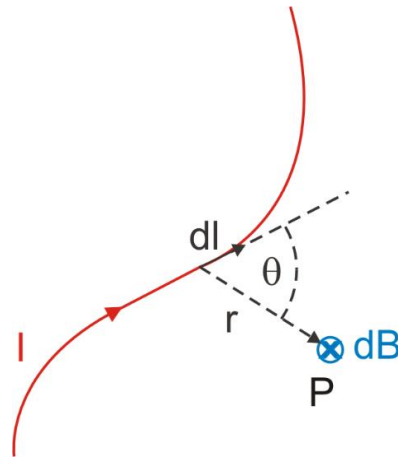


#### Definicja

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (23.15)$$

Wartość liczbowa  $d\mathbf{B}$  jest więc dana równaniem

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \theta}{r^2} \quad (23.16)$$

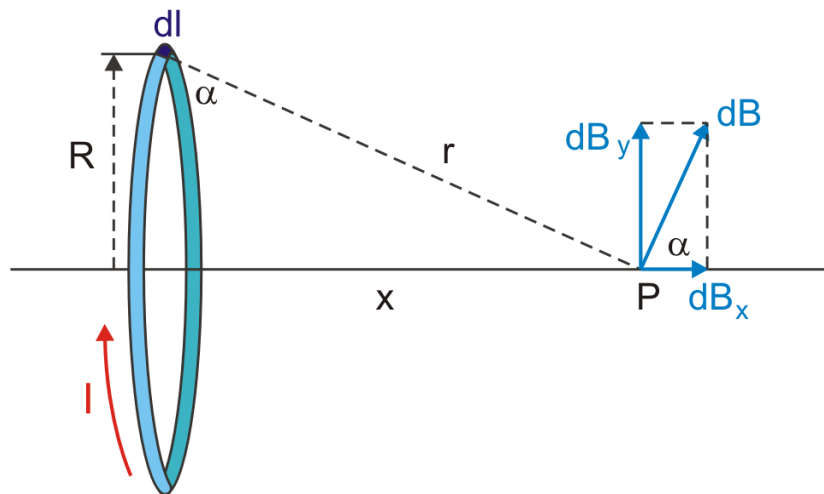


Rys. 23.7. Pole  $dB$  wytworzone przez element  $dl$  przewodnika



**Przykład**

Jako przykład zastosowania prawa Biota-Savarta obliczmy pole  $B$  na osi kołowego przewodnika z prądem w punkcie  $P$  pokazanym na rysunku 23.8.



Rys. 23.8. Kołowy przewodnik o promieniu  $R$  przewodzący prąd o natężeniu  $I$

Z prawa Biota-Savarta znajdujemy pole  $dB$  pochodzące od elementu  $dl$  (położonego na szczycie okręgu)

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin 90^\circ}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \quad (23.17)$$

Zwróćmy uwagę, że element  $dl$  jest prostopadły do  $r$ .

Pole  $dB$  można rozłożyć na dwie składowe, tak jak na rysunku. Suma wszystkich składowych  $dB_y$  jest równa zero bo dla każdego elementu przewodnika  $dl$  ta składowa znosi się z odpowiednią składową elementu leżącego po przeciwnej stronie okręgu. Wystarczy więc zsumować składowe  $dB_x$ . Ponieważ

$$dB_x = dB \cos \alpha \quad (23.18)$$

zatem

$$dB_x = \frac{\mu_0 I \cos \alpha dl}{4\pi r^2} \quad (23.19)$$

Ponadto, zgodnie z rysunkiem

$$r = \sqrt{R^2 + x^2} \quad (23.20)$$

oraz

$$\cos \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \quad (23.21)$$

Ostatecznie więc otrzymujemy

$$dB_x = \frac{\mu_0 IR}{4\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} dl \quad (23.22)$$

Zauważmy, że wielkości  $I$ ,  $R$ ,  $x$  są takie same dla wszystkich elementów  $dl$  prądu. Wykonujemy teraz sumowanie (całkowanie), żeby obliczyć wypadkowe pole  $B$  (wyłączając stałe czynniki przed znak całki)

$$\begin{aligned} B &= \int dB_x = \frac{\mu_0 IR}{4\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} \int dl = \\ &= \frac{\mu_0 IR}{4\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} (2\pi R) = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (23.23)$$



### Ćwiczenie 23.1

Wzór (23.23) przyjmuje znacznie prostszą postać w szczególnych punktach. Spróbuj na jego podstawie określić pole w środku koła ( $x = 0$ ) oraz w dużej odległości od przewodnika tzn. dla  $x \gg R$ . Jak już mówiliśmy każdy obwód z prądem jest charakteryzowany poprzez magnetyczny moment dipolowy  $\mu = IS$ , gdzie  $S$  jest powierzchnią obwodu. Wyraż obliczane pole magnetyczne poprzez  $\mu$ . Wynik zapisz poniżej.

$$B(x = 0) = \quad \quad \quad B(x \gg R) =$$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

**Ćwiczenie 23.2**

Korzystając z wyliczonego pola magnetycznego w środku przewodnika kołowego oblicz pole wytwarzane w środku orbity (w miejscu jądra atomowego) przez elektron w atomie wodoru. Zgodnie z modelem Bohra elektron krąży w atomie wodoru po orbicie o promieniu  $R = 5 \cdot 10^{-11}$  m z częstotliwością  $f = 6.5 \cdot 10^{15}$  1/s. Wynik zapisz poniżej. Porównaj obliczone pole z wartościami podanymi w tabeli 22.1.

$B =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Ten rozdział kończy moduł siódmy; możesz teraz przejść do podsumowania i zadań testowych.

## Podsumowanie

- Natężenie prądu elektrycznego  $I = \frac{Q}{t}$ , a gęstość prądu  $j = \frac{I}{S} = \rho v_u$ .
- Prawa Ohma stwierdza, że stosunek napięcia przyłożonego do przewodnika do natężenia prądu przepływającego przez ten przewodnik jest stały i nie zależy ani od napięcia ani od natężenia prądu. Iloraz  $R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{U}{I}$  nazywamy *oporem elektrycznym*. W postaci wektorowej prawo Ohma dane jest równaniem  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ .
- Opór przewodnika z prądem zależy od jego długości  $l$ , przekroju poprzecznego  $S$  i oporu właściwego,  $R = \rho \frac{l}{S}$ .
- Wydzielana moc elektryczna  $P = UI$ .
- Miarą SEM jest różnica potencjałów (napięcie) na biegunach źródła prądu w warunkach, kiedy przez ogniwo nie płynie prąd (ogniwo otwarte).
- Wzór  $\varepsilon = I(R_w + R_z)$  wyraża prawo Ohma dla obwodu zamkniętego.
- Przy znajdowaniu prądów i napięć posługujemy się prawami Kirchhoffa: 1) Algebraiczna suma natężeń prądów przepływających przez punkt rozgałęzienia (węzeł) jest równa zero, 2) Algebraiczna suma sił elektromotorycznych i przyrostów napięć w dowolnym obwodzie zamkniętym jest równa zero.
- Na ładunek poruszający się w jednorodnym polu magnetycznym działa siła Lorentza  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$
- Pole magnetyczne działa na dipol magnetyczny momentem skręcającym  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ . Wielkość  $\boldsymbol{\mu} = I\mathbf{S}$  nazywamy magnetycznym momentem dipolowym.
- Pole magnetyczne wytworzone przez prąd stały można obliczyć z prawa Ampera, z którego wynika, że  $\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I$ , gdzie  $I$  jest prądem zawartym w konturze całkowania. Gdy nie jest znana symetria pola magnetycznego to wówczas do obliczeń pola korzystamy z prawa Biota-Savarta.
- Pole magnetyczne wytworzone przez solenoid (cewkę) wynosi  $B = \mu_0 In$ , gdzie  $I$  jest prądem płynącym przez cewkę, a  $n$  liczbą zwojów na jednostkę długości.
- Równoległe przewodniki z prądem oddziałują na siebie za pośrednictwem pola magnetycznego. Przewodniki, w których prądy płyną w tych samych kierunkach przyciągają się, a te w których prądy mają kierunki przeciwne odpychają się.

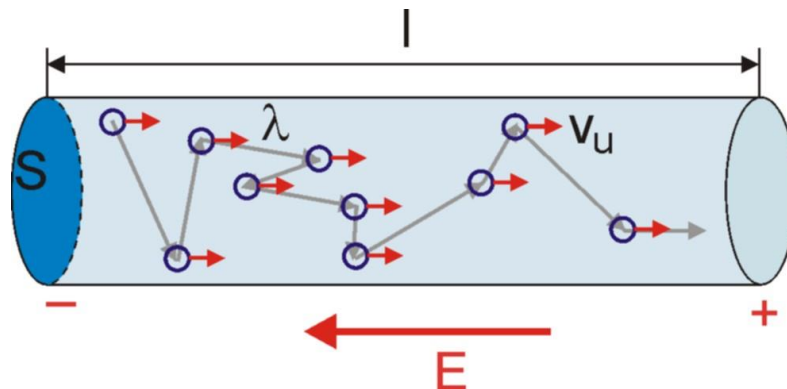
## Materiały dodatkowe do Modułu VII

### Wyprowadzenie prawa Ohma

Jak już powiedzieliśmy wcześniej, nośnikami ładunku w metalu są poruszające się swobodnie (nie związane z poszczególnymi atomami) elektrony tak zwane elektrony przewodnictwa. Bez pola elektrycznego elektrony poruszają się (dzięki energii cieplnej) przypadkowo we wszystkich kierunkach i dlatego nie obserwujemy przepływu prądu. Elektrony swobodne zderzają się z atomami (jonami) przewodnika zmieniając swoją prędkość i kierunek ruchu zupełnie tak jak cząsteczki gazu zamknięte w zbiorniku.

Dlatego, podobnie jak w przypadku gazu, do opisu zderzeń posłużymy się pojęciem średniej drogi swobodnej  $\lambda$  (droga przebywana przez elektron pomiędzy kolejnymi zderzeniami). Jeżeli  $u$  jest prędkością ruchu chaotycznego elektronów to średni czas pomiędzy zderzeniami wynosi  $\Delta t = \lambda/u$ .

Jeżeli do przewodnika przyłożymy napięcie to na każdy elektron będzie działała siła  $F = -eE$  i po czasie  $\Delta t$  ruch chaotyczny każdego elektronu zostanie zmodyfikowany; elektron uzyska prędkość unoszenia  $v_u = \Delta u$ . (rysunek poniżej)



Ruch elektronu unoszonego polem  $E$  i doznającego zderzeń z jonami metalu

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona

$$m \frac{\Delta u}{\Delta t} = eE \quad (\text{VII.1.1})$$

a stąd

$$\Delta u = v_u = \frac{eE\Delta t}{m} \quad (\text{VII.1.2})$$

Podstawiając za  $\Delta t = \lambda/u$  otrzymujemy

$$v_u = \frac{e\lambda E}{mu} \quad (\text{VII.1.3})$$

Prędkość unoszenia ma ten sam kierunek (przeciwny do  $E$ ) dla wszystkich elektronów. Przy każdym zderzeniu z atomem elektron traci prędkość unoszenia. Średnia droga swobodna  $\lambda$  jest tak mała, że  $v_u$  jest zawsze dużo mniejsza od  $u$ .

Możemy teraz obliczyć natężenie prądu wstawiając za prędkość wyrażenie (VII.1.3) do wzoru (21.5)

$$I = nSev_u = \frac{ne^2\lambda SE}{mu} \quad (\text{VII.1.4})$$

Natomiast opór elementu przewodnika o długości  $l$  wyznaczamy z prawa Ohma korzystając z faktu, że napięcie  $U = El$ .

$$R = \frac{U}{I} = \frac{El}{I} = \frac{mu}{ne^2\lambda} \frac{l}{S} \quad (\text{VII.1.5})$$

Widzimy, że opór  $R$  jest proporcjonalny do długości przewodnika  $l$  i odwrotnie proporcjonalny do jego przekroju  $S$ . Równanie (VII.1.5) możemy przepisać w postaci

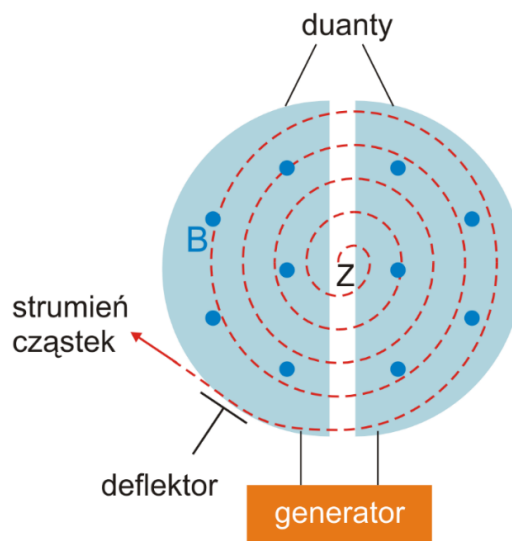
$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (\text{VII.1.6})$$

Stałą  $\rho$  nazywamy oporem właściwym (rezystywnością), a jej odwrotność  $\sigma = 1/\rho$  przewodnością właściwą.

Z równania (VII.1.5) wynika, że opór właściwy pozostaje stały tak długo jak długo stała jest prędkość  $u$ . Przypomnijmy sobie (punkt 15.2), że prędkość ruchu przypadkowego cząsteczek zależy tylko od temperatury. Tym samym opór właściwy też zależy od temperatury.

## Cyklotron

Przykładem akceleratora cyklicznego jest cyklotron. Schemat cyklotronu jest pokazany na rysunku poniżej.



Schemat cyklotronu

Dwie cylindryczne elektrody, tak zwane *duanty*, są umieszczone w jednorodnym polu magnetycznym  $B$  prostopadłym do płaszczyzny duantów (płaszczyzny rysunku). Do tych elektrod doprowadzone jest z generatora zmienne napięcie, które cyklicznie zmienia kierunek pola elektrycznego w szczelinie pomiędzy duantami.

Jeżeli ze źródła  $Z$  (w środku cyklotronu) zostanie wyemitowana naładowana cząstka to porusza się ona pod wpływem pola elektrycznego w stronę jednego z duantów. Gdy cząstka wejdzie do duantów wówczas przestaje na nią działać pole elektryczne (ekranowane przez miedziane ścianki duantów), natomiast zaczyna działać pole magnetyczne. Pod jego wpływem cząstka porusza się po torze kołowym (rysunek). W wyniku tego cząstka ponownie wchodzi w obszar pomiędzy duantami. Jeżeli równocześnie zostanie zmieniony kierunek pola elektrycznego pomiędzy nimi, to cząstka ponownie doznaje przyspieszenia w szczelinie. Ten proces jest powtarzany cyklicznie, pod warunkiem, że częstotliwość z jaką krąży cząstka jest zsynchronizowana z częstotliwością zmian pola elektrycznego pomiędzy duantami. Jest to o tyle proste, że częstotliwość (okres) krążenia cząstki w polu  $B$  nie zależy od jej prędkości

$$f = \frac{qB}{2\pi m} \quad (\text{VII.2.1})$$

a częstotliwość tę można względnie łatwo „dostroić” zmieniając pole  $B$ .

Cząstka przechodząc przez szczelinę pomiędzy duantami zwiększa swoją prędkość (przyspieszana polem elektrycznym) i równocześnie zwiększa promień  $R$  swojej orbity zgodnie ze związkiem

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (\text{VII.2.2})$$

Cząstki poruszają się po spirali (rysunek). Po osiągnięciu maksymalnego promienia cząstki są wyprowadzane poza cyklotron za pomocą elektrody nazywanej *deflektorem*.

Maksymalna energia jaką uzyskują cząstki w cyklotronie jest ograniczona relatywistycznym wzrostem ich masy. Powyżej pewnej prędkości masa cząstek wzrasta i maleje częstotliwość krążenia cząstek co prowadzi do utraty synchronizacji.

Te trudności zostały rozwiązane w synchrotronie. W tego typu akceleratorze pole magnetyczne  $B$  i częstotliwość oscylacji pola elektrycznego są zmieniane tak, że utrzymywana jest cały czas synchronizacja z krążącymi cząstkami co pozwala na osiągnięcie dużych (relatywistycznych) prędkości (energii).

Zwróćmy uwagę na to, że przy tak dużych prędkościach tor po którym krążą cząstki osiąga znaczne rozmiary. Na przykład synchrotron protonów w laboratorium Fermiego (Fermilab) w USA ma obwód 6.3 km, a w ośrodku badawczym CERN pod Genewą aż 27 km.



## Rozwiązania ćwiczeń z modułu VII

### Ćwiczenie 21.1

Dane:  $a \times b \times c = 1\text{ mm} \times 2\text{ mm} \times 50\text{ mm}$ ,  $\rho_{Cu} = 1.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\text{m}$ .

Opór obliczamy z zależności (21.10)  $R = \rho \frac{l}{S}$ , gdzie kolejno przyjmujemy:

$$l_1 = a, S_1 = b \cdot c; \quad l_2 = b, S_2 = a \cdot c; \quad l_3 = c, S_3 = a \cdot b$$

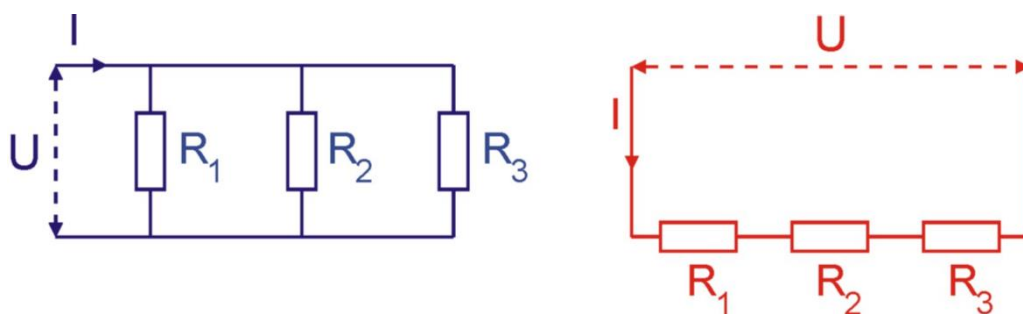
i po podstawieniu danych otrzymujemy odpowiednio

$$R_1 = 1.7 \cdot 10^{-7}\ \Omega; \quad R_2 = 6.8 \cdot 10^{-7}\ \Omega; \quad R_3 = 4.25 \cdot 10^{-4}\ \Omega$$

$$R_1 < R_2 \ll R_3$$

### Ćwiczenie 21.2

Na rysunku poniżej pokazane są układy oporników połączonych równoległe i szeregowo.



Dla połączenia równoległego napięcia na wszystkich opornikach są takie same, natomiast natężenie prądu  $I$  jest sumą natężeń prądów płynących w poszczególnych opornikach.

$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} = U \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

Stąd opór wypadkowy (jego odwrotność)  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$

Dla połączenia szeregowego natężenie prądu we wszystkich opornikach jest takie samo, a napięcie  $U$  jest sumą napięć na poszczególnych opornikach.

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = IR_1 + IR_2 + IR_3 = I(R_1 + R_2 + R_3)$$

Stąd opór wypadkowy  $R = R_1 + R_2 + R_3$

Powyższe wyniki można łatwo uogólnić na przypadek większej liczby oporników.

**Ćwiczenie 21.3**

Dane:  $U = 230 \text{ V}$ ,  $P = 2000 \text{ W}$ .

Opór grzałki obliczamy ze wzoru (21.17)  $P = \frac{U^2}{R}$ .

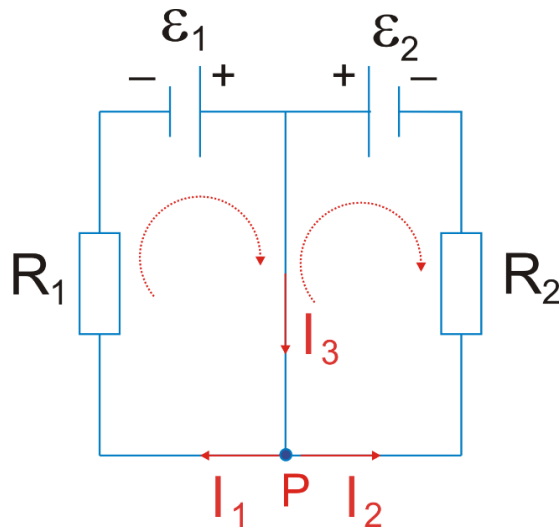
Stąd po podstawieniu danych otrzymujemy  $R = 26.45 \Omega$

Natomiast natężenie prądu płynącego przez grzałkę ponownie obliczamy z zależności (21.17) ale w postaci  $P = I^2 R$ .

Po podstawieniu danych otrzymujemy  $I = 9.1 \text{ A}$ .

**Ćwiczenie 21.4**

Dane:  $\varepsilon_1 = 3 \text{ V}$ ,  $\varepsilon_2 = 1.5 \text{ V}$ ,  $R_1 = 1 \Omega$  oraz  $R_2 = 2 \Omega$ .



Zastosowanie II-ego prawa Kirchhoffa do pętli po lewej stronie daje

$$\varepsilon_1 - I_1 R_1 = 0$$

skąd obliczamy prąd  $I_1 = \frac{\varepsilon_1}{R_1}$

Po podstawieniu danych otrzymujemy  $I_1 = 3 \text{ A}$

Zastosowanie II-ego prawa Kirchhoffa do pętli po prawej stronie daje

$$-\varepsilon_2 + I_2 R_2 = 0$$

skąd obliczamy prąd  $I_2 = \frac{\varepsilon_2}{R_2}$

Po podstawieniu danych otrzymujemy  $I_2 = 0.75 \text{ A}$

Dla węzła  $P$  stosujemy I-sze prawo Kirchhoffa

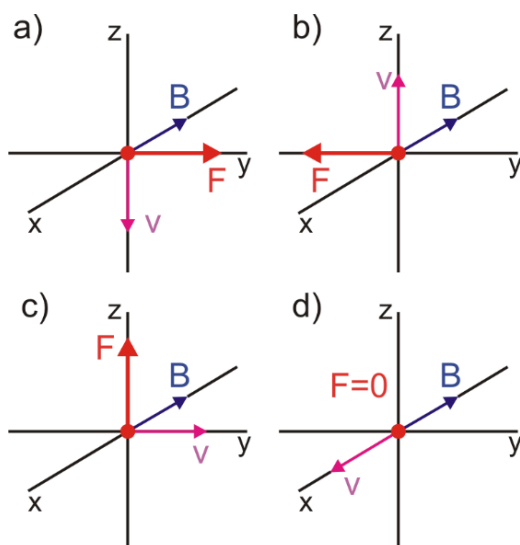
$$I_3 - I_2 - I_1 = 0$$

skąd obliczamy prąd  $I_3$  (podstawiając uprzednio otrzymane wyniki)  $I_3 = \frac{\varepsilon_1}{R_1} + \frac{\varepsilon_2}{R_2}$

Po podstawieniu danych otrzymujemy  $I_3 = 3.75 \text{ A}$

Otrzymaliśmy "dodatnie" wartości prądów więc założone kierunki są zgodne z rzeczywistymi.

### Ćwiczenie 22.1



### Ćwiczenie 22.2

Dane:  $q$ ,  $v$ ,  $B$ .

Ładunek poruszający się w jednorodnym polu magnetycznym, prostopadłe do pola  $B$ , krąży po okręgu. Siła magnetyczna jest siłą dośrodkową w tym ruchu  $F_{dośr.} = F_{magn.}$  więc

$$\frac{mv^2}{R} = qvB \sin \theta$$

Promień okręgu obliczamy wprost z powyższego równania uwzględniając, że  $\theta = 90^\circ$  ( $v \perp B$ )

$$R = \frac{mv}{qB}$$

Częstotliwość  $f$  (odwrotność okresu  $T$ ) z jaką krąży ładunek obliczamy ze wzoru

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{2\pi R}{v}} = \frac{v}{2\pi R} = \frac{qB}{2\pi m}$$

gdzie podstawiono obliczoną wcześniej wartość  $R$ . Zauważmy, że częstotliwość (a tym samym okres) nie zależy od  $R$  i  $v$ .

### Ćwiczenie 23.1

Dane:  $\mu = IS = \pi R^2$ ,  $R$ ,  $x$

Pole magnetyczne utworzone przez kołowy przewodnik o promieniu  $R$  (przewodzący prąd o natężeniu  $I$ ) w odległości  $x$  na osi symetrii przewodnika jest dane wyrażeniem

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

W środku koła ( $x = 0$ ) ten wzór przyjmuje postać

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0}{2\pi R^3} \mu$$

a w dużej odległości od przewodnika tzn. dla  $x \gg R$

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi x^3} \mu$$

### Ćwiczenie 23.2

Dane:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Tm/A,  $R = 5 \cdot 10^{-11}$  m,  $f = 6.5 \cdot 10^{15}$  1/s,  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  C

Pole magnetyczne utworzone przez kołowy przewodnik o promieniu  $R$  (przewodzący prąd o natężeniu  $I$ ) w jego środku jest dane wyrażeniem

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Natężenie prądu  $I$  wytwarzanego przez elektron o ładunku  $e$  przebiegający orbitę w czasie  $T$  (okres obiegu) wynosi

$$I = \frac{q}{t} = \frac{e}{T} = ef$$

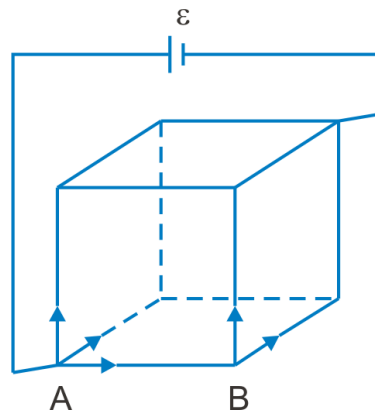
Łączymy powyższe wzory

$$B = \frac{\mu_0 ef}{2R}$$

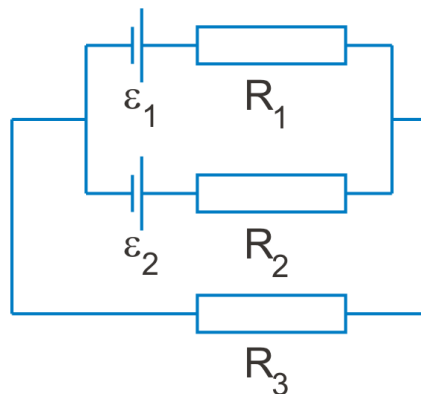
i po podstawieniu danych otrzymujemy  $B = 13$  T.

## Test VII

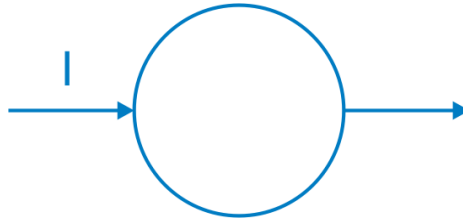
1. W czasie wyładowania atmosferycznego stosunkowo nieduży ładunek jest przenoszony w bardzo krótkim czasie. Oblicz natężenie prądu błyskawicy, jeżeli w trakcie jej trwania zostaje przeniesiony pomiędzy Ziemią i chmurą ładunek  $Q = 50 \text{ C}$  w czasie  $t = 1 \text{ ms}$ .
2. Każda z krawędzi sześcianu pokazanego na rysunku ma oporność równą  $r = 1 \Omega$ . Jakie jest natężenie prądu pobieranego z baterii o sile elektromotorycznej  $\varepsilon = 6 \text{ V}$  i zerowym oporze wewnętrznym połączonej z tym sześcianem? Zauważ, że prąd wpływający do punktu  $A$  dzieli się na trzy równe części, a prąd wpływający do punktu  $B$  dzieli się na dwie równe części.



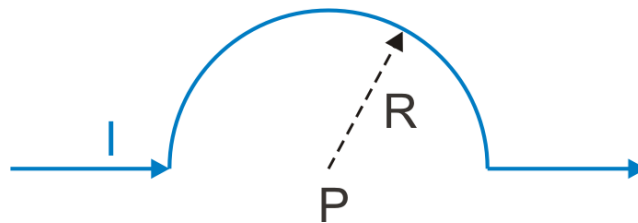
3. Korzystając z praw Kirchhoffa oblicz natężenia prądów płynących przez każdy z oporów w obwodzie pokazanym na rysunku poniżej. Wartości sił elektromotorycznych wynoszą odpowiednio  $\varepsilon_1 = 2 \text{ V}$  i  $\varepsilon_2 = 1 \text{ V}$ , a ich opory wewnętrzne są zanedbywalnie małe. Jakie są kierunki płynących prądów?



4. Grzejnik o mocy  $1 \text{ kW}$  pracuje w sieci o napięciu  $220 \text{ V}$ . Jak zmieni się ilość wydzielanego ciepła gdy napięcie w sieci spadnie do  $200 \text{ V}$ ?
5. Z drutu miedzianego o średnicy  $\phi = 1 \text{ mm}$  i długości  $l = 50 \text{ cm}$  wykonano pętlę, którą podłączono do źródła prądu (rysunek poniżej). Jaka jest oporność całkowita obwodu? Oporność właściwą miedzi przyjmij równą  $\rho = 1.8 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ cm}$ .



6. Elektrony poruszające się w kineskopie monitora mają energię kinetyczną  $E = 12 \text{ keV}$ . Monitor jest tak zorientowany, że elektrony poruszają się poziomo z północy na południe. Składowa pionowa ziemskiego pola magnetycznego jest skierowana w dół i ma wartość indukcji  $B = 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ . Jakie jest odchylenie elektronów po przebyciu w kineskopie drogi  $25 \text{ cm}$ ?
7. Proton, deuteron (jądro izotopu wodoru zawierające 1 proton i 1 neutron) oraz cząstka alfa (jądro helu zawierające 2 protony i 2 neutrony) są przyspieszane w polu elektrycznym tą samą różnicą potencjałów, a następnie wchodzi w obszar pola magnetycznego  $\mathbf{B}$ , poruszając się prostopadle do niego. Porównaj energie kinetyczne cząstek i promienie torów kołowych w polu magnetycznym.
8. Oblicz wartość indukcji magnetycznej  $B$  w odległości  $1 \text{ cm}$  od nieskończenie długiego, prostoliniowego przewodnika, w którym płynie prąd o natężeniu  $I = 5 \text{ A}$ . Jaki jest kierunek i zwrot wektora  $\mathbf{B}$ .
9. Solenoid o długości  $l = 50 \text{ cm}$  i średnicy  $\phi = 10 \text{ cm}$  ma 500 zwojów. Oblicz pole magnetyczne  $B$  wewnątrz solenoidu. Jaki jest strumień pola magnetycznego w solenoidzie?
10. W przewodniku składającym się z dwóch prostoliniowych odcinków o długości  $l = 20 \text{ cm}$  każdy i półkola o promieniu  $R = 10 \text{ cm}$  płynie prąd o natężeniu  $I = 1 \text{ A}$  (rysunek). Oblicz pole magnetyczne w w środku półkola (punkt  $P$ ). Jak jest zwrot wektora  $\mathbf{B}$ ?



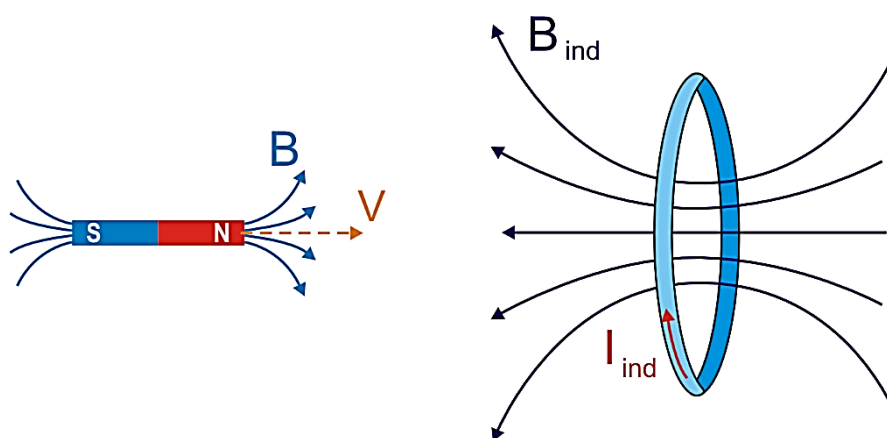
# MODUŁ VIII

## 24 Indukcja elektromagnetyczna

### 24.1 Prawo indukcji Faradaya

Zjawisko indukcji elektromagnetycznej polega na powstawaniu siły elektromotorycznej SEM w obwodzie podczas przemieszczania się względem siebie źródła pola magnetycznego i tego obwodu. Mówimy, że w obwodzie jest indukowana *siła elektromotoryczna indukcji*  $\mathcal{E}$  (SEM indukcji). W obwodzie zamkniętym SEM indukcji wywołuje przepływ *prądu indukcyjnego*  $I_{ind}$  i w konsekwencji powstanie wytwarzanego przez ten prąd *indukowanego pola magnetycznego*  $B_{ind}$ .

Na rysunku poniżej pokazany jest efekt wywołany przemieszczaniem źródła pola magnetycznego (magnesu) względem nieruchomej przewodzącej pętli (obwodu).



Rys. 24.1. Powstawanie siły elektromotorycznej indukcji w obwodzie, na rysunku zaznaczono prąd indukowany oraz wytwarzane przez niego pole magnetyczne indukcji

Doświadczenie pokazuje, że indukowane: siła elektromotoryczna, prąd i pole magnetyczne powstają w obwodzie tylko podczas ruchu magnesu. Gdy magnes spoczywa to bez względu na to czy znajduje się w oddaleniu od obwodu czy bezpośrednio przy nim nie obserwujemy zjawiska indukcji. Ponadto, gdy magnes rusza z miejsca i zwiększa swoją prędkość to rośnie indukowane pole magnetyczne, co oznacza, że rosną SEM indukcji i prąd indukowany. Dzieje się tak aż do chwili gdy magnes zacznie poruszać się ze stałą prędkością. Natomiast gdy magnes zatrzymuje się (jego prędkość maleje) to indukowane pole, SEM i prąd również maleją zanikając do zera z chwilą zatrzymania magnesu.

Doświadczenie pokazuje, że prąd indukcyjny obserwujemy gdy źródło pola magnetycznego porusza się względem nieruchomej pętli (obwodu), ale również gdy przewód w kształcie pętli porusza się w obszarze pola magnetycznego. Oznacza to, że dla powstania prądu indukcyjnego potrzebny jest *względny ruch źródła pola magnetycznego i przewodnika*.

Na podstawie powyższych obserwacji Faraday doszedł do wniosku, że o powstawaniu siły elektromotorycznej indukcji decyduje *szybkość zmian strumienia magnetycznego*  $\Phi_B$ . Ilościowy związek przedstawia prawo Faradaya.



**Prawo, zasada, twierdzenie**

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi_B}{dt} \quad (24.1)$$

Analogicznie jak strumień pola elektrycznego  $\mathbf{E}$ , strumień pola magnetycznego  $\mathbf{B}$  przez powierzchnię  $S$  jest dany ogólnym wzorem

$$\phi_B = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} \quad (24.2)$$

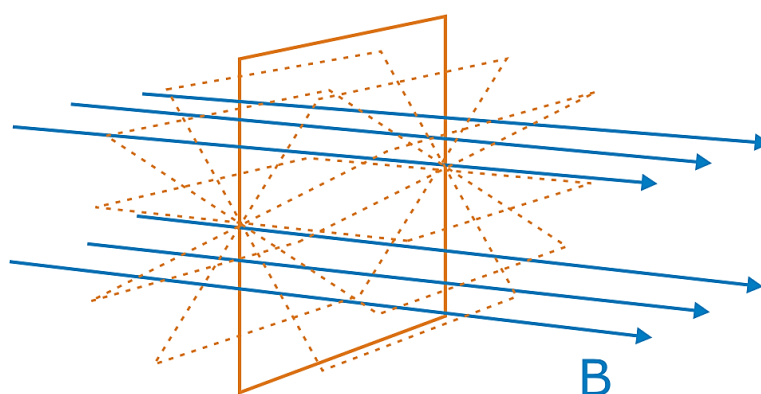
który dla płaskiego obwodu w jednorodnym polu magnetycznym upraszcza się do postaci

$$\phi_B = BS \cos \alpha \quad (24.3)$$

gdzie  $\alpha$  jest kątem między polem  $\mathbf{B}$ , a wektorem powierzchni  $\mathbf{S}$  (normalną do powierzchni). Widzimy, że możemy zmienić strumień magnetyczny, i w konsekwencji wyindukować prąd w obwodzie, zmieniając wartość pola magnetycznego w obszarze, w którym znajduje się przewodnik. Taką sytuację mamy właśnie przedstawioną na rysunku 24.1. Magnes jest zbliżany do obwodu i w wyniku tego narasta pole magnetyczne (pochodzące od magnesu) przenikające przez obwód (pętlę). Gdy magnes zostaje zatrzymany, pole wewnątrz pętli przestaje zmieniać się i nie obserwujemy zjawiska indukcji.

Również zmiana wielkości powierzchni  $S$  obwodu powoduje zmianę strumienia magnetycznego. W trakcie zwiększania (lub zmniejszania) powierzchni zmienia się liczba linii pola magnetycznego przenikających (obejmowanych) przez powierzchnię  $S$  obwodu. W rezultacie w obwodzie zostaje wyindukowany prąd.

Wreszcie, zmianę strumienia magnetycznego można uzyskać poprzez obrót obwodu w polu magnetycznym (zmiana kąta  $\alpha$ ) tak jak pokazano na rysunku poniżej.



Rys. 24.2. Powstawanie siły elektromotorycznej indukcji w obracającej się ramce (obwodzie) i zmiany strumienia magnetycznego

Zwróćmy uwagę na to, że strumień zmienia zarówno swoją wartość jak i znak, więc indukowana jest zmienna SEM. Jeżeli ramka obraca się z prędkością kątową  $\omega = \alpha/t$  to strumień (zgodnie ze wzorem 24.3) jest dany wyrażeniem

$$\phi_B = BS \cos \omega t \quad (24.4)$$

a SEM indukcji

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = \omega BS \sin \omega t \quad (24.5)$$

Indukowana jest zmienna SEM i tym samym zmienny prąd. Ten sposób jest właśnie wykorzystywany powszechnie w prądnicach (generatorach prądu).



### Ćwiczenie 24.1

Spróbuj teraz obliczyć średnią SEM jaka indukuje się w kwadratowej ramce o boku 5 cm, zawierającej 100 zwojów podczas jej obrotu o  $180^\circ$ . Ramka jest umieszczona w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $B = 1 \text{ T}$  prostopadle do linii pola i wykonuje obrót w czasie 0.1 s.

Wynik zapisz poniżej.

$\varepsilon =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

## 24.2 Reguła Lenza

Zauważmy, że w równaniu (24.1) przedstawiającym prawo Faradaya występuje znak minus. Dotyczy on kierunku indukowanej SEM w obwodzie zamkniętym. Ten kierunek możemy wyznaczyć na podstawie reguły Lenza. Według niej



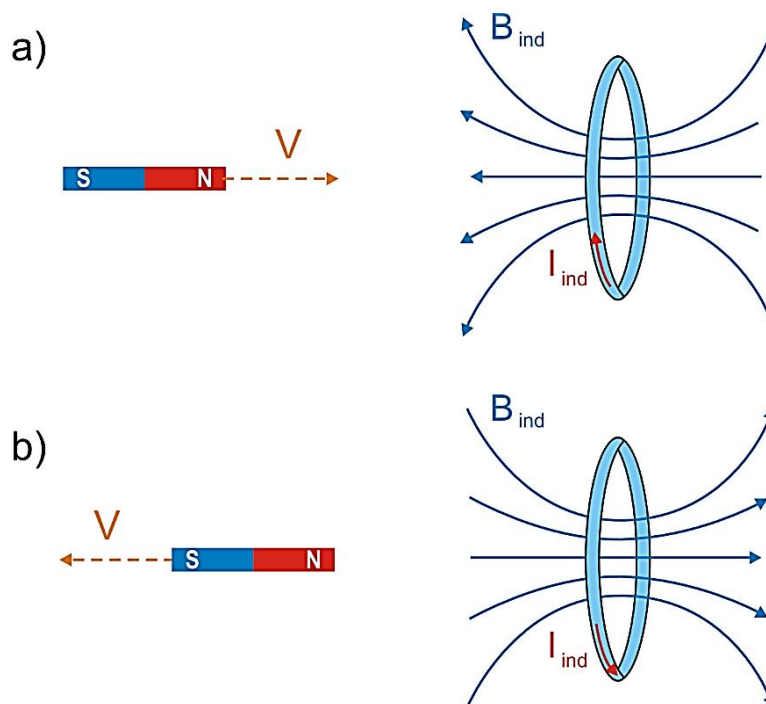
### Prawo, zasada, twierdzenie

*Prąd indukowany ma taki kierunek, że wytwarzany przez niego własny strumień magnetyczny przeciwdziała pierwotnym zmianom strumienia, które go wywołały.*

Regułę tę obrazują rysunki 24.3. Przedstawiają one efekt wywołany przemieszczeniem źródła pola magnetycznego (magnesu) względem nieruchomej pętli (obwodu) zarówno przy zbliżaniu (a) jak i przy oddalaniu magnesu (b).

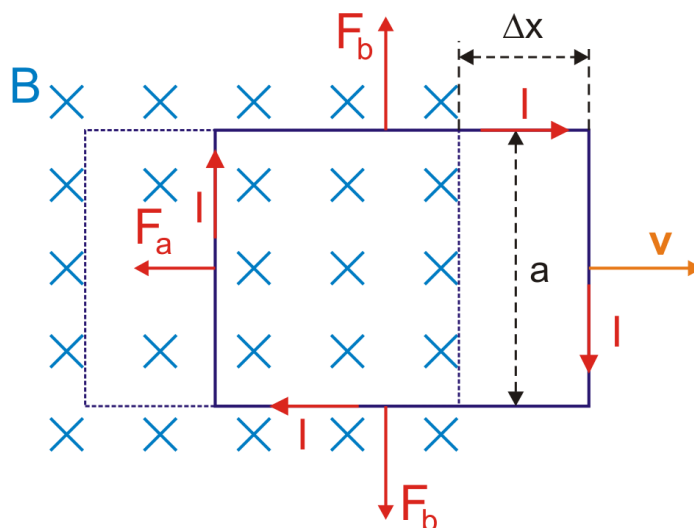
Pokazują, że kierunek prądu indukowanego w pętli i wytwarzanego przez niego pola magnetycznego zależy od tego czy strumień pola magnetycznego pochodzącego od przesuwanego magnesu rośnie czy maleje to jest od tego czy zbliżamy czy oddalamy magnes od przewodnika.

Prąd  $I$  indukowany w obwodzie ma taki kierunek, że pole indukcji  $B_{ind}$  przez niego wytworzone przeciwdziała zmianom zewnętrznego pola  $B$  (np. od magnesu). Gdy pole  $B$  narasta to pole  $B_{ind}$  jest przeciwne do niego (przeciwdziałając wzrostowi), natomiast gdy pole  $B$  maleje to pole  $B_{ind}$  jest z nim zgodne (kompensując spadek).



Rys. 24.3. Ilustracja reguły Lenza. Prąd indukowany wytwarza pole przeciwne do pola magnesu przy jego zbliżaniu, a zgodne z polem magnesu przy jego oddalaniu

Na rysunku 24.4 pokazany jest kolejny przykład ilustrujący zjawisko indukcji i regułę Lenza. Obwód w kształcie prostokątnej pętli jest wyciągany z obszaru stałego pola magnetycznego (prostopadłego do pętli) ze stałą prędkością  $v$ .



Rys. 24.4. Ramka wyciągana z obszaru pola magnetycznego ze stałą prędkością  $v$

Przestawiona sytuacja jest podobna do omawianej poprzednio i pokazanej na rysunku 24.3, tylko teraz obwód przemieszcza się względem pola magnetycznego, a nie źródło pola względem obwodu. Jak już jednak mówiliśmy dla powstania prądu indukcyjnego potrzebny jest *względny ruch* źródła pola magnetycznego i przewodnika.

W wyniku ruchu ramki maleje strumień pola przez ten obwód ponieważ malej obszar ramki, który wciąż pozostaje w polu magnetycznym; przez ramkę przenika coraz mniej linii pola  $B$ . Jeżeli ramka przesuwa się o odcinek  $\Delta x$  to obszar ramki o powierzchni  $\Delta S$  wysuwa się z pola  $B$  i strumień przenikający przez ramkę maleje o

$$\Delta\phi = B\Delta S = Ba\Delta x \quad (24.6)$$

gdzie  $a$  jest szerokością ramki. Jeżeli ta zmiana nastąpiła w czasie  $\Delta t$  to zgodnie z prawem Faradaya wyindukowała się siła elektromotoryczna

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -Ba \frac{dx}{dt} = -Bav \quad (24.7)$$

gdzie  $v$  jest prędkością ruchu ramki.

Jeżeli ramka jest wykonana z przewodnika o oporze  $R$  to w obwodzie płynie prąd indukcji (rysunek 24.4) o natężeniu

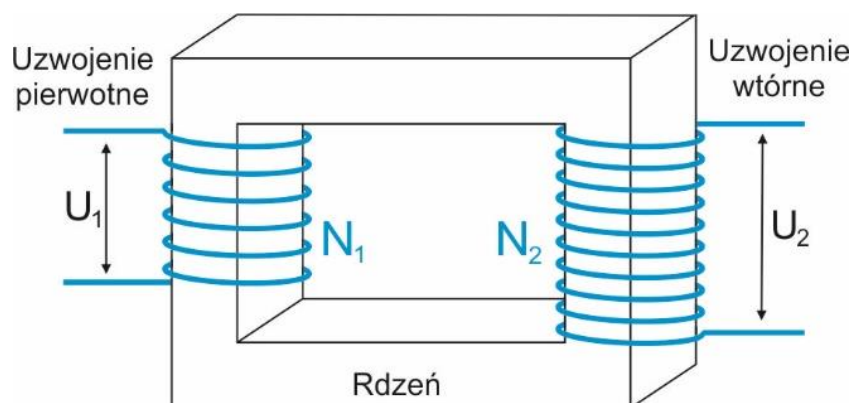
$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Bav}{R} \quad (24.8)$$

Ponieważ obwód znajduje się (częściowo) w polu magnetycznym to na boki ramki (te znajdujące się w polu  $B$ ) działa siła Lorentza (równanie 22.13). Siły te są przedstawione na rysunku 24.4. Widzimy, że siły ( $F_b$ ) działające na dłuższe boki ramki znoszą się i pozostaje nieskompensowana siła  $F_a$ , która działa *przeciwnie* do kierunku ruchu ramki. Siła  $F_a$  przeciwdziała więc, zgodnie z regułą Lenza, zmianom strumienia magnetycznego.

## 24.3 Indukcyjność

### 24.3.1 Transformator

Powszechnie stosowanym urządzeniem, w którym wykorzystano zjawisko indukcji elektromagnetycznej jest *transformator* (rysunek poniżej). W urządzeniu tym dwie cewki są nawinięte na tym samym rdzeniu (często jedna na drugiej).



Rys. 24.5. Transformator

Jedna z tych cewek jest zasilana *prądem przemiennym* wytwarzającym w niej zmienne pole magnetyczne, które z kolei wywołuje SEM indukcji w drugiej cewce. Ponieważ obie cewki obejmują te same linie pola  $B$  to zmiana strumienia magnetycznego jest w nich jednakowa. Zgodnie z prawem Faradaya

$$U_1 = -N_1 \frac{d\phi_B}{dt} \quad (24.9)$$

oraz

$$U_2 = -N_2 \frac{d\phi_B}{dt} \quad (24.10)$$

gdzie  $N_1$  jest liczba zwojów w cewce pierwotnej, a  $N_2$  liczbą zwojów w cewce wtórnej. Stosunek napięć w obu cewkach wynosi zatem

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad (24.11)$$

Widać, że regulując ilość zwojów w cewkach możemy zamieniać małe napięcia na duże i odwrotnie. Ta wygodna metoda zmiany napięć jest jednym z powodów, że powszechnie stosujemy prąd przemienny. Ma to duże znaczenie przy przesyłaniu energii. Generatory wytwarzają na ogół prąd o niskim napięciu. Chcąc zminimalizować straty mocy w liniach przesyłowych zamieniamy to niskie napięcie na wysokie, a przed odbiornikiem transformujemy je z powrotem na niskie.



### Ćwiczenie 24.2

Żeby przekonać się o celowości tego działania oblicz straty mocy przy przesyłaniu prądu z jednego bloku elektrowni o mocy 20MW linią przesyłową o oporze  $1 \Omega$ . Obliczenia wykonaj dla napięcia 100 kV (typowe dla dalekich linii przesyłowych) oraz dla napięcia 15 kV (typowe napięcie lokalnych linii przesyłowych). Porównaj uzyskane wartości. Jaki procent mocy wytworzonej stanowią straty? Wynik zapisz poniżej.

Wskazówka: Zauważ, że moc elektrowni jest stała  $P_{elektr.} = UI$  więc gdy zwiększamy napięcie to maleje natężenie prądu, a straty są właśnie związane z ciepłem jakie wydziela się podczas przepływu prądu przez opornik  $P = I^2 R$ .

$$P_1 = \qquad P_2 =$$



Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

### 24.3.2 Indukcyjność własna

W przypadku transformatora zmiany prądu w jednym obwodzie indukują SEM w drugim obwodzie. Ale o zjawisku indukcji możemy mówić również w przypadku pojedynczego obwodu. Wynika to stąd, że prąd płynący w obwodzie wytwarza własny strumień magnetyczny, który przenika przez ten obwód. Wobec tego

**Prawo, zasada, twierdzenie**

Gdy natężenie prądu przepływającego przez obwód zmienia się to zmienia się też, wytworzony przez ten prąd, strumień pola magnetycznego przenikający obwód, więc zgodnie z prawem indukcji Faradaya indukuje się w obwodzie SEM.

Tę siłę elektromotoryczną nazywamy *siłą elektromotoryczną samoindukcji* , a samo zjawisko *zjawiskiem indukcji własnej* . Jeżeli obwód (cewka) zawiera  $N$  zwojów to


$$\varepsilon = -N \frac{d\phi_B}{dt} \quad (24.12)$$

Całkowitym strumień  $N\phi_B$  zawarty w obwodzie jest proporcjonalny do natężenie prądu płynącego przez obwód

$$N\phi_B = LI \quad (24.13)$$

Stałą proporcjonalności  $L$

$$L = N \frac{\phi_B}{I} \quad (24.14)$$

nazywamy *indukcyjnością*  (współczynnikiem *indukcji własnej* lub *współczynnikiem samoindukcji*).

Zróżniczkowanie równania (24.14) prowadzi do wyrażenia

$$N \frac{d\phi_B}{dt} = L \frac{dI}{dt} \quad (24.15)$$

Łącząc równania (24.12) i (24.15) otrzymujemy wyrażenie na siłę elektromotoryczną samoindukcji

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt} \quad (24.16)$$

**Jednostki**

Jednostką indukcyjności  $L$  jest *henr* (H);  $1 \text{ H} = 1 \text{ Vs/A}$ .

**Przykład**

Jako przykład obliczmy indukcyjność cewki o długości  $l$ , przekroju poprzecznym  $S$  i  $N$  zwojach, przez którą płynie prąd o natężeniu  $I$ . Strumień magnetyczny przez każdy zwoj cewki wynosi  $\phi = BS$ . Natomiast pole magnetyczne  $B$  wewnątrz cewki wytwarzane przez płynący przez nią prąd, wynosi zgodnie ze wzorem (23.12)

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 I \frac{N}{l} \quad (24.17)$$

Zatem, strumień pola magnetycznego jest równy

$$\phi = \mu_0 \frac{NS}{l} I \quad (24.18)$$

Indukcyjność  $L$  obliczamy podstawiając to wyrażenie do wzoru (24.14)

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} \quad (24.19)$$

Zauważmy, że indukcyjność  $L$  podobnie jak pojemność  $C$  zależy tylko od geometrii układu. Indukcyjność cewki możemy zwiększyć wprowadzając do niej rdzeń z materiału o dużej względnej przenikalności magnetycznej  $\mu_r$ . Takim materiałem jest np. żelazo. Magnetyczne własności materii omówione będą w dalszych rozdziałach.



### Ćwiczenie 24.3

Jako przykład oblicz indukcyjność cewki o długości  $l = 1$  cm i średnicy  $d = 1$  cm mającej 10 zwojów. Takie cewki są stosowane w obwodach wejściowych radioodbiorników. Wynik zapisz poniżej.

$L =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

## 24.4 Energia pola magnetycznego

W rozdziale 20 pokazaliśmy, że jeżeli w jakimś punkcie przestrzeni istnieje pole elektryczne o natężeniu  $E$  to możemy uważać, że w tym punkcie jest zmagazynowana energia w ilości  $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$  na jednostkę objętości. Podobnie energia może być zgromadzona w polu magnetycznym. Rozważmy na przykład obwód zawierający cewkę o indukcyjności  $L$ . Jeżeli do obwodu włączymy źródło SEM (np. baterię) to prąd w obwodzie narasta od zera do wartości maksymalnej  $I_0$ . Zmiana prądu w obwodzie powoduje powstanie na końcach cewki różnicy potencjałów  $\Delta V$  (SEM indukcji  $\epsilon$ ) przeciwnej do SEM przyłożonej

$$\Delta V = -L \frac{dI}{dt} \quad (24.20)$$

Do pokonania tej różnicy potencjałów przez ładunek  $dq$  potrzeba jest energia (praca)  $dW$

$$dW = \Delta V dq = L \frac{dI}{dt} dq = L dI \frac{dq}{dt} = LI dI \quad (24.21)$$

Energię tę (pobraną ze źródła SEM) ładunek przekazuje cewce więc energia cewki wzrasta o  $dW$ . Całkowita energia magnetyczna zgromadzona w cewce podczas narastania prądu od zera do  $I_0$  wynosi więc

$$W_B = \int dW = \int_0^{I_0} LI dI = \frac{1}{2} LI_0^2 \quad (24.22)$$

Jeżeli rozpatrywana cewka ma długości  $l$  i powierzchnię przekroju  $S$ , to jej objętość jest równa iloczynowi  $lS$  i gęstość energii magnetycznej zgromadzonej w cewce wynosi

$$w_B = \frac{W_B}{lS} \quad (24.23)$$

lub na podstawie równania (24.22)

$$w_B = \frac{1}{2} \frac{LI^2}{lS} \quad (24.24)$$

Przypomnijmy, że dla cewki indukcyjność i pole magnetyczne dane są odpowiednio przez wyrażenia

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} \quad (24.25)$$

oraz

$$B = \mu_0 In = \mu_0 I \frac{N}{l} \quad (24.26)$$

co prowadzi do wyrażenie opisującego gęstość energii magnetycznej w postaci

$$w_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad (24.27)$$



### **Prawo, zasada, twierdzenie**

*Jeżeli w jakimś punkcie przestrzeni istnieje pole magnetyczne o indukcji  $B$  to możemy uważać, że w tym punkcie jest zmagazynowana energia w ilości  $\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$  na jednostkę objętości*



## 25 Drgania elektromagnetyczne

### 25.1 Drgania w obwodzie LC

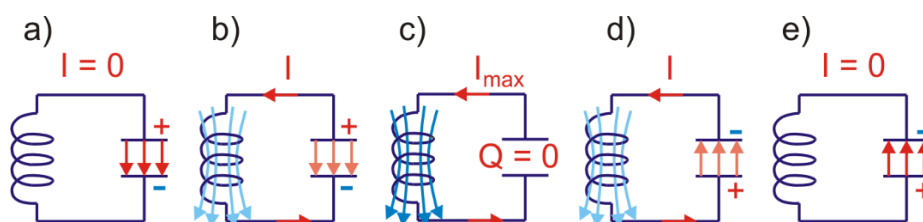
Rozpatrzmy obwód złożony z szeregowo połączonych indukcyjności  $L$  (cewki) i pojemności  $C$  (kondensatora) pokazany na rysunku 25.1. Przyjmijmy, że opór elektryczny (omowy) obwodu jest równy zero ( $R = 0$ ). Załóżmy też, że w chwili początkowej na kondensatorze  $C$  jest nagromadzony ładunek  $Q_0$ , a prąd w obwodzie nie płynie (rysunek a). W takiej sytuacji energia zawarta w kondensatorze

$$W_C = \frac{Q_0^2}{2C} \quad (25.1)$$

jest maksymalna, a energia w cewce

$$W_L = \frac{LI^2}{2} \quad (25.2)$$

jest równa zero.



Rys. 25.1. Oscylacje w obwodzie LC

Następnie kondensator zaczyna rozładowywać się (rysunek b). W obwodzie płynie prąd  $I = dQ/dt$ . W miarę jak maleje ładunek na kondensatorze maleje też energia zawarta w polu elektrycznym kondensatora, a rośnie energia pola magnetycznego, które pojawia się w cewce w miarę narastania w niej prądu.

Wreszcie gdy ładunek spadnie do zera cała energia jest przekazana do pola magnetycznego cewki (rysunek c). Jednak pomimo, że kondensator jest całkowicie rozładowany *prąd dalej płynie w obwodzie* (w tym samym kierunku). Jego źródłem jest SEM samoindukcji powstająca w cewce, która podtrzymuje słabnący prąd.

Ten prąd ładuje kondensator (przeciwnie) więc energia jest ponownie przekazywana do kondensatora (rysunek d).

Wreszcie ładunek na kondensatorze osiąga maksimum i prąd w obwodzie zanika. Stan końcowy jest więc taki jak początkowy tylko kondensator jest naładowany odwrotnie (rysunek e).

Sytuacja powtarza się, tylko teraz prąd rozładowania kondensatora będzie płynął w przeciwnym kierunku. Mamy więc do czynienia z *oscylacjami (drzganiami) ładunku (prądu)*. Zmienia się zarówno wartość jak i znak (kierunek) ładunku na kondensatorze i prądu w obwodzie.

Do opisu ilościowego tych drgań skorzystamy z prawa Kirchhoffa, zgodnie z którym

$$U_L + U_C = 0 \quad (25.3)$$

gdzie  $U_L$  i  $U_C$  są napięciami odpowiednio na cewce i kondensatorze. Korzystając z równań (24.16) i (20.1) otrzymujemy

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (25.4)$$

Ponieważ  $I = dQ/dt$  więc

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{Q}{C} \quad (25.5)$$

Jest to równanie drgań w obwodzie  $LC$ .

Równanie to opisujące oscylacje ładunku ma identyczną postać jak równanie (12.3) drgań swobodnych masy zawieszonyj na sprężynie, przy czym następujące wielkości elektryczne odpowiadają wielkościom mechanicznym: ładunek  $Q \rightarrow$  przesunięcie  $x$ ; indukcyjność  $L \rightarrow$  masa  $m$ ; pojemność  $C \rightarrow$  odwrotność współczynnika sprężystości  $1/k$ ; prąd  $I = dQ/dt \rightarrow$  prędkość  $v = dx/dt$ .

Ponieważ zagadnienie drgań swobodnych zostało rozwiązane w punkcie 12.1 więc możemy skorzystać z uprzednio wyprowadzonych wzorów i napisać rozwiązanie równania (25.5)

$$Q = Q_0 \cos \omega t \quad (25.6)$$

oraz

$$I = \frac{dQ}{dt} = Q_0 \omega \sin \omega t = I_0 \sin \omega t \quad (25.7)$$

gdzie częstość drgań jest dana wyrażeniem

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (25.8)$$

Możemy teraz obliczyć napięcie chwilowe na cewce i kondensatorze

$$U_L = -L \frac{dI}{dt} = -LI_0 \omega \cos \omega t \quad (25.9)$$



oraz

$$U_C = \frac{Q_0}{C} \cos \omega t \quad (25.10)$$

Zauważmy, że maksymalne wartości (amplitudy) tych napięć są takie same

$$LI_0 \omega = LQ_0 \omega^2 = LQ_0 \frac{1}{LC} = \frac{Q_0}{C} \quad (25.11)$$

Z powyższych wzorów wynika, że w obwodzie  $LC$  *ładunek na kondensatorze, natężenie prądu i napięcie zmieniają się sinusoidalnie* tak jak dla drgań harmoniczných. Zauważmy ponadto, że między napięciem i natężeniem prądu istnieje różnica faz, równa  $\pi/2$ . Gdy napięcie osiąga maksymalną wartość to prąd jest równy zero i na odwrót.

Podsumowując: w obwodzie  $LC$  obserwujemy oscylacje (drżania) pola elektrycznego w kondensatorze i pola magnetycznego w cewce. Mówimy, że w obwodzie  $LC$  obserwujemy *drżania elektromagnetyczne* , a sam obwód  $LC$  nazywamy *obwodem drżającym* .



### Ćwiczenie 25.1

Korzystając ze wzorów (25.1) i (25.2) oraz z podanego rozwiązania równania drżania oblicz energię jaka jest zgromadzona w dowolnej chwili  $t$  w kondensatorze i w cewce indukcyjnej. Ile wynosi energia całkowita? Wynik zapisz poniżej.

Wskazówka: Skorzystaj z relacji  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

$W =$

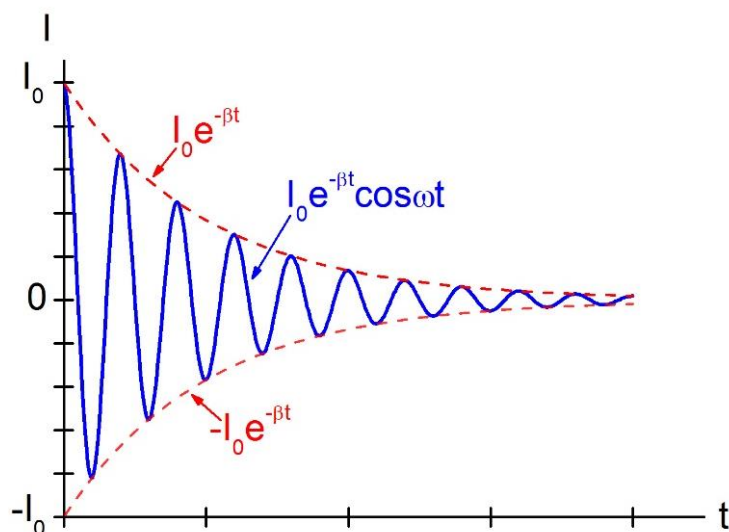
Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.



Więcej o innych obwodach ( $RC$ ,  $RL$ ), w których natężenie prądu zmienia się w czasie możesz przeczytać w *Dodatku 1*, na końcu modułu VIII.

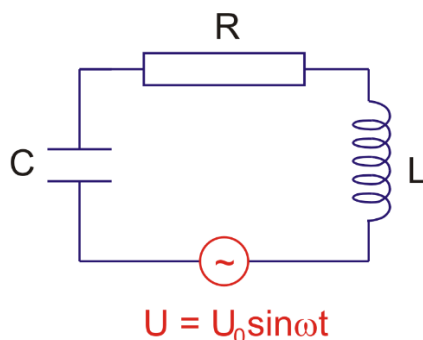
## 25.2 Obwód szeregowy RLC

Dotychczas rozważaliśmy obwód zawierający indukcyjność  $L$  oraz pojemność  $C$ . Tymczasem każdy obwód ma pewien opór  $R$ , przykładowo jest to opór drutu z którego nawinięto cewkę. Obecność oporu w obwodzie powoduje *straty energii* w postaci wydzielającego się ciepła. Energia zawarta w obwodzie maleje i otrzymujemy *drżania tłumione* analogiczne do drżania tłumionych sprężyny opisanych w rozdziale 12 (rysunek 25.2), przy czym *współczynnik tłumienia*  $\beta = 1/(2\tau)$  jest równy  $R/2L$ .



Rys. 25.2. Tłumione oscylacje prądu w obwodzie  $RLC$

Drgania w obwodzie  $RLC$  można podtrzymać jeżeli obwód będziemy zasilali zmienną SEM ze źródła zewnętrznego włączonego do obwodu na przykład tak jak pokazano na rysunku 25.3.



Rys. 25.3. Obwód  $RLC$  zawierający źródło napięcia sinusoidalnie zmiennego

Jeżeli obwód będziemy zasilali napięciem sinusoidalnie zmiennym

$$U(t) = U_0 \sin \omega t \quad (25.12)$$

to prawo Kirchhoffa dla obwodu zawierającego elementy  $R$ ,  $L$ ,  $C$  oraz źródło napięcia (SEM) ma postać

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = U_0 \sin \omega t \quad (25.13)$$

Różniczkując to wyrażenie obustronnie po  $dt$  (oraz podstawiając  $I = dQ/dt$ ) otrzymujemy równanie

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \omega U_0 \cos \omega t \quad (25.14)$$

lub

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = \frac{\omega U_0}{L} \cos \omega t \quad (25.15)$$

Równanie to jest analogiczne do równania drgań wymuszonych (12.38). Możemy więc skorzystać z uzyskanych poprzednio (punkt 12.5) wyników. Z tej analogii wynika, że rozwiązaniem równania (23.15) jest funkcja

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi) \quad (25.16)$$

Różnica faz jaka istnieje między napięciem i natężeniem prądu jest dana równaniem


$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (25.17)$$

a amplituda prądu  $I_0$  wynosi

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (25.18)$$


Zauważmy, że to wyrażenie ma postać (prawa Ohma) przy czym stała proporcjonalności pomiędzy  $U_0$  i  $I_0$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (25.19)$$

pełni analogiczną rolę jak opór  $R$  w prawie Ohma. Wielkość  $Z$  nazywamy *zawadą obwodu* .


Zauważmy, że gdy obwód zawiera tylko kondensator i źródło sinusoidalnie zmiennego napięcia to zawada jest równa

$$Z = X_c = \frac{1}{\omega C} \quad (25.20)$$

Tę wielkość nazywamy *opornością pojemnościową* lub *reaktancją pojemnościową* . W takim obwodzie różnica faz pomiędzy napięciem i natężeniem prądu wynosi  $\pi/2$ . Prąd "wyprzedza" napięcie na kondensatorze o  $\pi/2$ .

Natomiast gdyby obwód zawiera tylko cewkę i źródło napięcia sinusoidalnie zmiennego to zawada jest równa

$$Z = X_L = \omega L \quad (25.21)$$

Tę wielkość nazywamy *opornością indukcyjną* lub *reaktancją indukcyjną* . Ponownie między napięciem i natężeniem prądu istnieje różnica faz, równa  $\pi/2$ , ale teraz prąd "pozostaje" za napięciem na cewce o  $\pi/2$ .

Zauważmy, że w obwodzie  $RLC$  mamy do czynienia z *szeregowym połączeniem oporów* omowego, pojemnościowego i indukcyjnego (rysunek 25.2), a mimo to ich opór zastępczy (zawada) *nie jest sumą algebraiczną* tych oporów tak jak w przypadku łączenia szeregowego wielu oporów omowych. Ten fakt wynika ze wspomnianych przesunięć fazowych pomiędzy prądem i napięciem. Trzeba je uwzględnić przy dodawaniu napięć i w konsekwencji przy liczeniu zawady.



O obliczaniu zawady w obwodzie  $RLC$  możesz przeczytać w *Dodatku 2*, na końcu modułu VIII.



### Ćwiczenie 25.2

Oblicz teraz zawadę obwodu złożonego z opornika  $R = 10 \Omega$ , pojemności  $C = 1 \text{ pF}$  oraz indukcyjności  $L = 3 \mu\text{H}$  połączonych szeregowo jeżeli układ jest zasilany z generatora o częstotliwości  $f = 100 \text{ MHz}$ . Jaka byłaby oporność układu gdyby w obwodzie nie występowały reaktancje, a wyłącznie oporniki omowe o takich samych opornościach? Wynik zapisz poniżej.

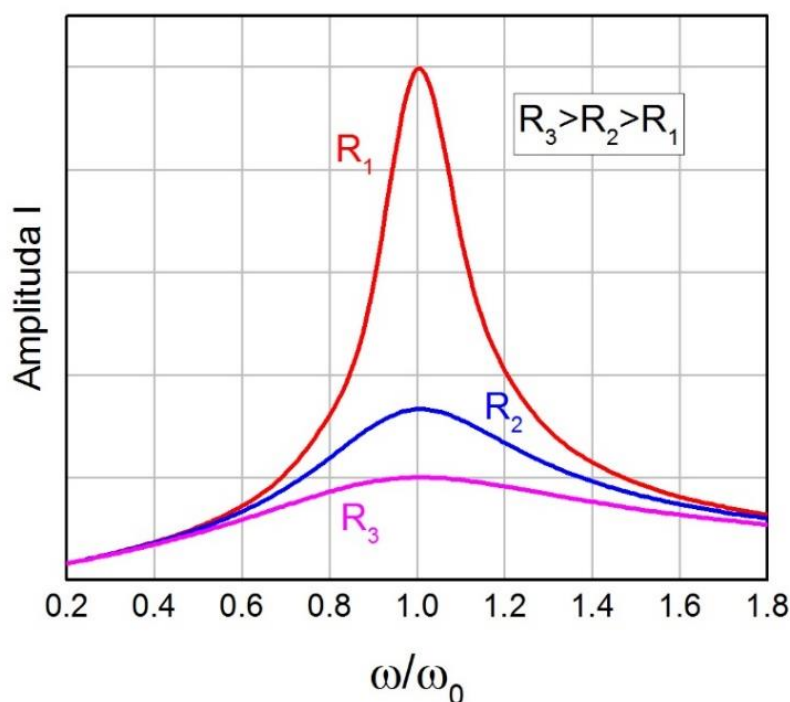
$Z =$

$R_{\text{omowy}} =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

## 25.3 Rezonans

Drgania ładunku, prądu i napięcia w obwodzie odbywają się z częstością zasilania  $\omega$  (częstością wymuszającą). Analogicznie jak dla mechanicznych drgań wymuszonych (punkt 12.5) amplituda tych drgań zależy od  $\omega$  i osiąga maksimum dla pewnej charakterystycznej wartości tej częstości, tak jak pokazano na rysunku 25.4. Przypomnijmy, że zjawisko to nazywamy *rezonansem*.



Rys. 25.4. Rezonans w obwodzie  $RLC$  zawierającym źródło napięcia sinusoidalnie zmiennego

Dla małego oporu  $R$  czyli dla małego tłumienia warunek rezonansu jest spełniony gdy

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (25.22)$$

gdzie  $\omega_0$  jest częstotliwością drgań nietłumionych (drżania w obwodzie  $LC$ ).

Natężenie prądu osiąga wtedy wartość maksymalną równą

$$I_0 = \frac{U_0}{R} \quad (25.23)$$

Widzimy, że natężenie prądu w obwodzie jest takie, jak gdyby *nie było* w nim ani *pojemności* ani *indukcyjności*.



### Ćwiczenie 25.3

Sprawdź samodzielnie ile wynosi w takiej sytuacji zawada obwodu.

Wynik zapisz poniżej.

$Z =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

W warunkach rezonansu napięcie na kondensatorze (w obwodzie  $RLC$ ) jest równe

$$U_{C,rez} = I_0 X_C = \frac{U_0}{R} \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{U_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (25.24)$$

i może być wielokrotnie większe od napięcia zasilającego. Możesz to sprawdzić rozwiązując następujące zagadnienie:

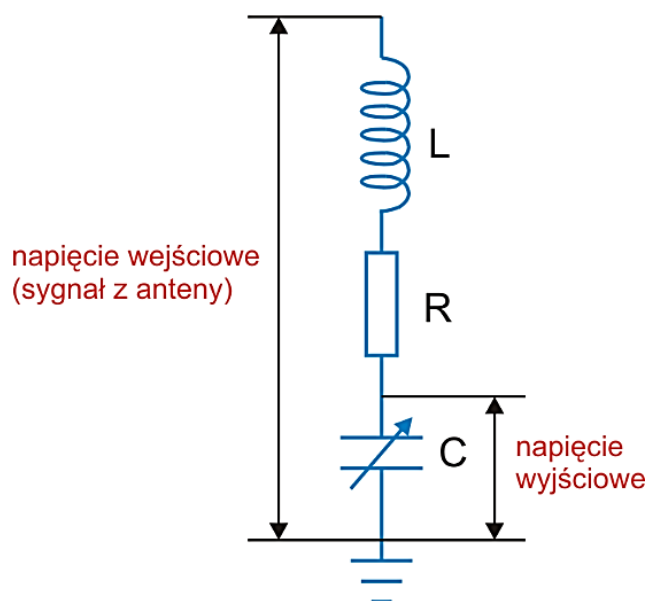


### Ćwiczenie 25.4

Drgania wymuszone w obwodzie można także wywołać bez włączania bezpośredniego źródła SEM w postaci generatora. Przykładem może być układ  $RLC$  w obwodzie wejściowym radioodbiornika (telewizora) pokazany na rysunku poniżej. Układ ten jest zasilany sygnałem z anteny.

W układzie dostrojenie do częstotliwości danej radiostacji jest osiągane przez dobranie pojemności. W ten sposób jest spełniony warunek rezonansu dla tej częstotliwości. W pokazanym układzie  $R = 10 \Omega$ , a  $L = 1 \mu\text{H}$ .

Jaka powinna być pojemność  $C$  aby uzyskać dostrojenie odbiornika (rezonans) do stacji "Jazz Radio", która w Krakowie nadaje na częstotliwości 101 MHz? Jeżeli sygnał wejściowy z anteny ma amplitudę  $100 \mu\text{V}$  to jakie jest napięcie na kondensatorze przy częstotliwości rezonansowej? Jakie napięcie na kondensatorze daje przy tych samych ustawieniach  $R, L, C$  sygnał o tej samej amplitudzie ale o częstotliwości 96.0 MHz (radio "RMF")? Wynik zapisz poniżej.



Układ rezonansowy w obwodzie wejściowym radioodbiornika ze strojoną pojemnością

Wskazówka: Skorzystaj ze warunku rezonansu (25.22) i wzoru (25.24) na napięcie na kondensatorze.

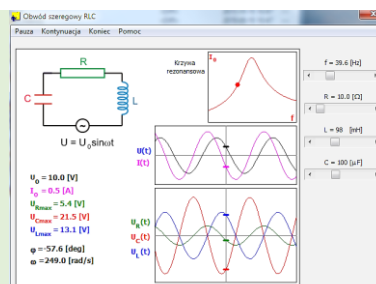
$\omega =$

$U_{Crez.} =$   $U_C =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.



Drgania wymuszone oraz zjawisko rezonansu w obwodzie RLC możesz prześledzić korzystając z programu komputerowego „Obwód szeregowy RLC”, dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.



## 25.4 Moc w obwodzie prądu zmiennego

O mocy wydzielanej w obwodzie prądu stałego mówiliśmy w rozdziale 21. W obwodzie prądu zmiennego moc dana jest takim samym wyrażeniem

$$P(t) = U(t)I(t) \quad (25.25)$$

ale wartość jej zmienia się bo zmienne jest napięcie i natężenie prądu. Dlatego też w przypadku prądu zmiennego do obliczenia mocy posłużymy się wartościami średnimi.



Zgodnie z naszymi obliczeniami moc w obwodzie  $RLC$  w dowolnej chwili  $t$  wynosi

$$P(t) = U(t)I(t) = U_0 I_0 \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) \quad (25.26)$$

Korzystając ze wzoru na sinus różnicy kątów otrzymujemy

$$\begin{aligned} P(t) &= U_0 I_0 \sin \omega t (\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi) = \\ &= U_0 I_0 (\sin^2 \omega t \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \sin \varphi) \end{aligned} \quad (25.27)$$

gdzie ponadto skorzystaliśmy z relacji  $\sin \omega t \cos \omega t = \sin 2\omega t / 2$ .

Moc średnia jest więc dana wyrażeniem

$$\bar{P} = U_0 I_0 (\overline{\sin^2 \omega t} \cos \varphi - \frac{1}{2} \overline{\sin 2\omega t} \sin \varphi) \quad (25.28)$$

Ponieważ  $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$  to  $\overline{\sin^2 \omega t} = \overline{\cos^2 \omega t} = 1/2$  (wykresy sinus i cosinus są takie same, jedynie przesunięte o  $\pi/2$ ). Ponadto  $\overline{\sin 2\omega t} = 0$  bo funkcja sinus jest na przemian dodatnia i ujemna, więc

$$\bar{P} = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi \quad (25.29)$$

Jak widzimy, średnia moc zależy od *przesunięcia fazowego* pomiędzy napięciem i prądem. Na podstawie wzoru (25.17) i korzystając ze związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta można pokazać, że  $\cos \varphi = R/Z$ . Uwzględniając, ponadto że  $U_0 = ZI_0$  możemy przekształcić wyrażenie na moc średnią do postaci

$$\bar{P} = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi = \frac{(ZI_0) I_0}{2} \frac{R}{Z} = \frac{I_0^2 R}{2} \quad (25.30)$$

Przypomnijmy, że dla prądu stałego  $P = I^2 R$ . Z porównania tych dwóch wyrażeń dochodzimy do wniosku, że moc średnia wydzielana przy przepływie prądu zmiennego o amplitudzie  $I_0$  jest taka sama jak prądu stałego o natężeniu



### Definicja

$$I_{sk} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (25.31)$$

Tę wielkość nazywamy *wartością skuteczną* natężenia *prądu zmiennego*. Analogicznie definiujemy *skuteczną wartość napięcia*.

**Definicja**

$$U_{sk} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (25.32)$$

**Ćwiczenie 25.5**

Mierniki prądu zmiennego takie jak amperomierze i woltomierze odczytują właśnie wartości skuteczne. Wartość napięcia 230 V w naszej sieci domowej to wartość skuteczna. Jaka jest wartość maksymalną tego napięcia? Wynik zapisz poniżej.

$U_0 =$



Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Obliczyliśmy moc średnią wydzielaną w całym obwodzie. Porównajmy ją teraz ze średnią mocą traconą na oporze  $R$

$$\overline{P_R} = \overline{I^2(t) R} = I_0^2 \overline{\sin^2 \omega t} R = \frac{I_0^2 R}{2} \quad (25.33)$$

Widzimy, że *cała moc wydziela się na oporze  $R$* , a to oznacza, że na kondensatorze i cewce *nie ma strat mocy*.

Ten wniosek pozostaje w zgodności z naszymi wcześniejszymi obliczeniami. Gdy w obwodzie znajduje się tylko pojemność lub indukcyjność (nie ma oporu omowego) to przesunięcie fazowe jest równe  $\pi/2$ , a ponieważ  $\cos(\pi/2) = 0$  to zgodnie z równaniem (25.29) średnia moc jest równa zero. Jednocześnie zauważmy, że moc chwilowa zmienia się z czasem; raz jest dodatnia (energia jest gromadzona w polu elektrycznym kondensatora lub magnetycznym cewki), a raz ujemna (zgromadzona moc jest oddawana do układu).

Omawiane obwody, w których elementy  $R$ ,  $L$ ,  $C$  stanowiły odrębne części nazywamy obwodami o *elementach skupionych* . W praktyce jednak mamy do czynienia z elementami, które mają złożone własności. Przykładem może tu być cewka, która oprócz indukcyjności  $L$  ma zawsze opór  $R$  oraz pojemność międzyzwojową  $C$ . Mamy wtedy do czynienia z obwodami o *elementach rozłożonych* .

## 26 Równania Maxwella

### 26.1 Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

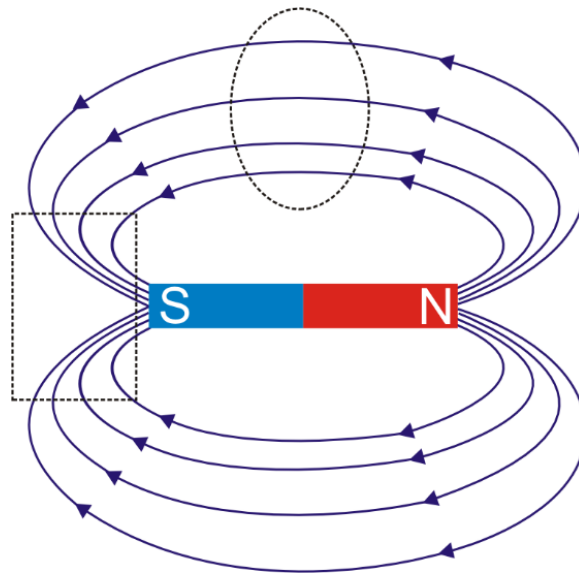
Przypomnijmy, że analogicznie jak strumień pola elektrycznego  $E$ , strumień pola magnetycznego  $B$  przez powierzchnię  $S$  jest dany ogólnym wzorem

$$\phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (26.1)$$

Jednak, jak już podkreślaliśmy istnieje zasadnicza różnica między stałym polem magnetycznym i elektrycznym, różnica pomiędzy liniami pola elektrycznego i magnetycznego.

Linie pola magnetycznego są zawsze liniami zamkniętymi podczas gdy linie pola elektrycznego zaczynają się i kończą na ładunkach.

Ponieważ linie pola  $B$  są krzywymi zamkniętymi, więc dowolna powierzchnia zamknięta otaczająca źródło pola magnetycznego jest przecinana przez tyle samo linii wychodzących ze źródła co wchodzących do niego (rysunek 26.1).



Rys. 26.1. Linie pola  $B$  przechodzące przez zamknięte powierzchnie (linie przerywane)

W konsekwencji strumień pola magnetycznego przez zamkniętą powierzchnię jest równy zero



**Prawo, zasada, twierdzenie**

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

(26.2)

Ten ogólny związek znany jako *prawo Gaussa* dla pola magnetycznego.

Wynik ten wiąże się z faktem, że nie udało się zaobserwować w przyrodzie (pomimo wielu starań) ładunków magnetycznych (pojedynczych biegunów) analogicznych do ładunków elektrycznych.

## 26.2 Indukowane wirowe pole elektryczne

W rozdziale 24 przedstawione zostało zjawisko indukcji elektromagnetycznej polegające na powstawaniu siły elektromotorycznej SEM w obwodzie podczas przemieszczania się względem siebie źródła pola magnetycznego i tego obwodu.

Ponieważ prawo Faradaya określa indukowaną SEM niezależnie od sposobu w jaki zmieniamy strumień magnetyczny, więc w szczególności zmiana strumienia magnetycznego może być wywołana zmieniającym się w czasie polem magnetycznym.

Jeżeli w tym zmiennym polu magnetycznym umieścimy przewodzącą kołową pętlę (obwód) to w tym obwodzie popłynie prąd. Oznacza to, że w miejscu gdzie znajduje się przewodnik istnieje *pole elektryczne*  $E$ , które działa na ładunki elektryczne w przewodniku wywołując ich ruch.

To *pole elektryczne*  $E$  zostało wytworzone (wyindukowane) przez zmieniające się *pole magnetyczne*  $B$ .

Ogólnie:

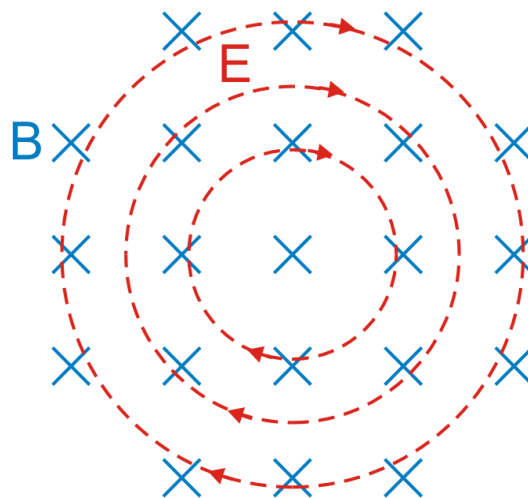


### Prawo, zasada, twierdzenie

*Zmianom pola magnetycznego towarzyszy zawsze powstanie pola elektrycznego.*

Jako przykład rozpatrzmy jednorodne pole magnetyczne  $B$ , którego wartość maleje z czasem ze stałą szybkością  $dB/dt$ . Na rysunku 26.2 poniżej pokazano natężenie pola elektrycznego  $E$  wyindukowanego przez to *malejące* pole  $B$ . Kierunek wyindukowanego pola elektrycznego określamy z reguły Lenza, analogicznie jak znajdowaliśmy kierunek indukowanego prądu (który to pole elektryczne wywołuje w przewodniku).


Zauważmy przy tym, że obecność pętli (obwodu) nie jest konieczna. Jeżeli go nie będzie, to nie będziemy obserwować przepływu prądu jednak indukowane pole elektryczne  $E$  będzie nadal istnieć.



Rys. 26.2. Linie pola elektrycznego wytworzonego przez malejące pole magnetyczne

Linie indukowanego pola elektrycznego mają kształt koncentrycznych okręgów (zamkniętych linii) co w zasadniczy sposób różni je od linii pola  $\mathbf{E}$  związanego z ładunkami, które nie mogą być liniami zamkniętymi bo zawsze zaczynają się na ładunkach dodatnich i kończą na ujemnych.

Zapamiętajmy, że *indukowane pola elektryczne* nie są związane z ładunkiem, ale ze *zmianą strumienia magnetycznego*.

Indukowane pole elektryczne nazywamy (ze względu na kształt linii) *wirowym polem elektrycznym* .

Natężenia kołowego pola elektrycznego pokazanego na rysunku 26.2 jest zgodnie z równaniem (19.7) związane z indukowaną siłą elektromotoryczną relacją

$$\varepsilon = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} \quad (26.3)$$

gdzie całkowanie odbywa się po drodze, na której działa siła to jest wzdłuż linii pola elektrycznego.

W polu elektrycznym pokazanym na rysunku 26.2 ładunki elektryczne poruszają się po torach kołowych więc równanie (26.3) przyjmuje postać  $\varepsilon = E2\pi r$

Korzystając z równania (26.3) możemy zapisać uogólnione prawo indukcji Faradaya w postaci

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} (= \varepsilon) = - \frac{d\phi_B}{dt} \quad (26.4)$$

które możemy wyrazić następująco:



#### **Prawo, zasada, twierdzenie**

*Cyrkulacja wektora natężenia pola  $\mathbf{E}$  po dowolnym zamkniętym konturze jest równa szybkości zmiany strumienia magnetycznego przechodzącego przez ten kontur.*

### **26.3 Indukowane pole magnetyczne**

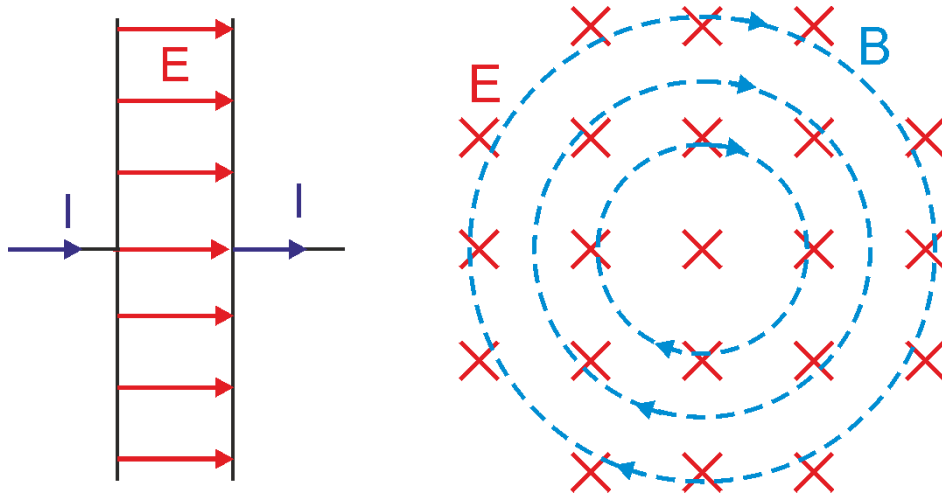
W poprzednim paragrafie dowiedzieliśmy się, że zmianom pola magnetycznego towarzyszy zawsze powstanie pola elektrycznego. Teraz zajmiemy się powiązaniem prędkości zmian pola elektrycznego z wielkością wywołanego tymi zmianami pola magnetycznego.

W tym celu rozpatrzmy obwód elektryczny zawierający kondensator cylindryczny pokazany na rysunku 26.3.

W stanie ustalonym pole elektryczne w kondensatorze jest stałe. Natomiast gdy ładujemy lub rozładowujemy kondensator to do okładek dopływa (lub z nich ubywa) ładunek i w konsekwencji zmienia się pole elektryczne  $\mathbf{E}$  w kondensatorze.

Doświadczenie pokazuje, że pomiędzy okładkami kondensatora powstaje *pole magnetyczne* wytworzone przez *zmieniające się pole elektryczne*. Linie pola, pokazane na rysunku 26.3, mają kształt okręgów tak jak linie pola wokół przewodnika z prądem.

Pole magnetyczne jest wytwarzane w kondensatorze tylko podczas jego ładowania lub rozładowania.



Rys. 26.3. Pole magnetyczne  $\mathbf{B}$  utworzone przez zmienne pole elektryczne  $\mathbf{E}$  pomiędzy okładkami kondensatora

Tak więc pole magnetyczne może być wytwarzane zarówno przez przepływ prądu (prawo Ampère'a) jak i przez zmienne pole elektryczne.

Na tej podstawie Maxwell uogólnił prawo Ampère'a do postaci

$$\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} + \mu_0 I \quad (26.5)$$

Sprawdźmy czy stosując tę modyfikację uzyskamy poprawny wynik na pole  $B$  pomiędzy okładkami. Z prawa Gaussa wynika, że strumień pola elektrycznego pomiędzy okładkami kondensatora wynosi

$$\phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (26.6)$$

Różniczkując to wyrażenie obustronnie po  $dt$  otrzymujemy

$$\frac{d\phi_E}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{dQ}{dt} = \frac{I}{\varepsilon_0} \quad (26.7)$$

Przypomnijmy, że zgodnie z prawem Ampère'a

$$\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (26.8)$$

Podstawiając za prąd  $I$  (równanie 26.7) otrzymujemy wyrażenie

$$\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \quad (26.9)$$

identyczne z wyrazem dodanym przez Maxwella do prawa Ampère'a.

Podsumowując:



**Prawo, zasada, twierdzenie**

*Zmianom pola elektrycznego towarzyszy zawsze powstanie pola magnetycznego.*



Mówiąc o polu magnetycznym wytwarzanym przez zmienne pole elektryczne, możemy posłużyć się pojęciem *prądu przesunięcia*. Więcej na ten temat możesz przeczytać w *Dodatku 3*, na końcu modułu VIII.

## 26.4 Równania Maxwella

W tabeli 26.1 zestawione są poznane przez nas dotychczas cztery prawa, które opisują ogół zjawisk elektromagnetycznych. Są to *równania Maxwella*. Przedstawione równania sformułowano dla próżni to jest gdy w ośrodku nie ma dielektryków i materiałów magnetycznych.

Tab. 26.1 Równania Maxwella (dla próżni)

	Prawo	Równanie
1	prawo Gaussa dla elektryczności	$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{S} = Q/\varepsilon_0$
2	prawo Gaussa dla magnetyzmu	$\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 0$
3	uogólnione prawo Faradaya	$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{l} (= \varepsilon) = -\frac{d\phi_B}{dt}$
4	uogólnione prawo Ampère'a	$\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} + \mu_0 I$

Wszystkie powyższe prawa są słuszne zarówno w przypadku statycznym (pola niezależne od czasu) jak i w przypadku pól zależnych od czasu.



Więcej o równaniach Maxwella w przypadku statycznym jak i w przypadku pól zależnych od czasu przeczytasz w *Dodatku 4*, na końcu modułu VIII. Natomiast w *Dodatku 5* poznasz formę różniczkową równań Maxwella.

Zauważmy, że w przypadku statycznym prawa opisujące pola elektryczne i magnetyczne są od siebie niezależne natomiast w przypadku pól zależnych od czasu równania Maxwella łączą ze sobą pola elektryczne i magnetyczne.

## 27 Fale elektromagnetyczne

### 27.1 Widmo fal elektromagnetycznych


Maxwell nie tylko połączył w jedną całość podstawowe równania opisujące zjawiska elektromagnetyczne, ale wyciągnął z tych równań szereg wniosków o znaczeniu fundamentalnym.

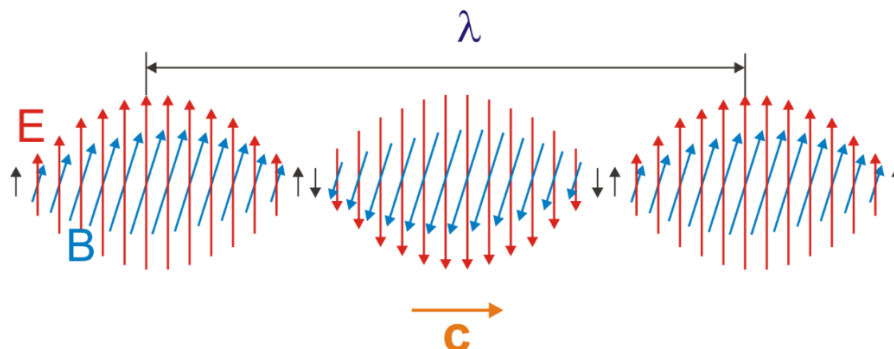
Z równań wiążących ze sobą pola elektryczne i magnetyczne

$$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{l} (= \varepsilon) = - \frac{d\phi_B}{dt} \quad (27.1)$$

oraz

$$\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} + \mu_0 I \quad (27.2)$$

wynika, że każda zmiana w czasie pola elektrycznego wywołuje powstanie zmiennego pola magnetycznego, które z kolei indukuje wirowe pole elektryczne itd. Taki ciąg sprzężonych pól elektrycznych i magnetycznych tworzy *falę elektromagnetyczną*  (rysunek 27.1).



Rys. 27.1. Pole elektryczne  $\mathbf{E}$  i magnetyczne  $\mathbf{B}$  fali elektromagnetycznej o długości  $\lambda$

Maxwell wykazał, że wzajemnie sprzężone pola elektryczne i magnetyczne są do siebie prostopadłe i prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali, i że prędkość fal elektromagnetycznych w próżni jest dana wyrażeniem

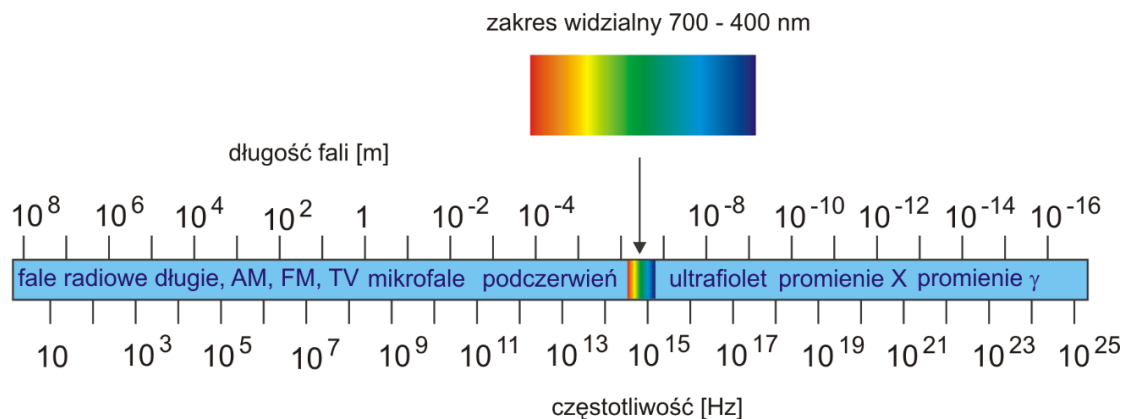
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 2.9979 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (27.3)$$

Pokazał też, że przyspieszony ładunek elektryczny będzie promieniować pole elektryczne i magnetyczne w postaci fali elektromagnetycznej oraz, że w wypromieniowanej fali stosunek amplitudy natężenia pola elektrycznego do amplitudy indukcji magnetycznej jest równy prędkości  $c$

$$c = \frac{E_0}{B_0} \quad (27.4)$$



Znany nam obecnie zakres widma fal elektromagnetycznych przedstawia rysunek 27.2. Wszystkie wymienione fale są falami elektromagnetycznymi i rozchodzą się w próżni z prędkością  $c$ . Różnią się natomiast częstotliwością (długością) fal. Przedstawiony podział wiąże się z zastosowaniem określonych fal lub sposobem ich wytwarzania.



Rys. 27.2. Widmo fal elektromagnetycznych

Poszczególne zakresy długości fal zachodzą na siebie, ich granice nie są ściśle określone.

Możesz prześledzić rozchodzenie się fali elektromagnetycznej korzystając z programu komputerowego „Wizualizacja fali elektromagnetycznej”, dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.

## 27.2 Równanie falowe

Przypomnijmy sobie równanie ruchu falowego (13.15) dla struny

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (27.5)$$

Równanie to opisuje falę poprzeczną rozchodzącą się w kierunku  $x$  (cząstki ośrodka wychylały się w kierunku  $y$ ).

W rozdziale 13 mówiliśmy, że równanie falowe w tej postaci, stosuje się do wszystkich rodzajów rozchodzących się fal, np. fal dźwiękowych i fal elektromagnetycznych. Możemy więc przez analogię napisać (pomijając wyprowadzenie) równanie falowe dla fali elektromagnetycznej (rozchodzącej się w kierunku osi  $x$ )

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \quad (27.6)$$

Oczywiście pole elektryczne  $E$  spełnia takie samo równanie

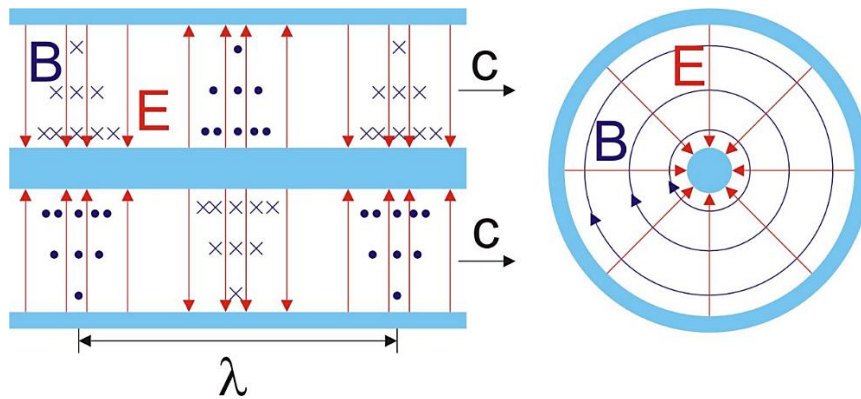
$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (27.7)$$

Pola  $E$  i  $B$  są do siebie prostopadłe.

### 27.3 Rozchodzenie się fal elektromagnetycznych

Dla zilustrowania rozchodzenia się fal elektromagnetycznych i wzajemnego sprzężenia pól elektrycznych i magnetycznych rozpatrzmy jedną z najczęściej stosowanych *linii transmisyjnych* jaką jest *kabel koncentryczny*.

Na rysunku 27.3 pokazany jest rozkład pola elektrycznego i magnetycznego w kablu koncentrycznym w danej chwili  $t$ . Pole elektryczne jest radialne, a pole magnetyczne tworzy współosiowe koła wokół wewnętrznego przewodnika. Pola te poruszają się wzdłuż kabla z prędkością  $c$  (zakładamy, że linia transmisyjna ma zerowy opór). Mamy do czynienia z falą bieżącą.



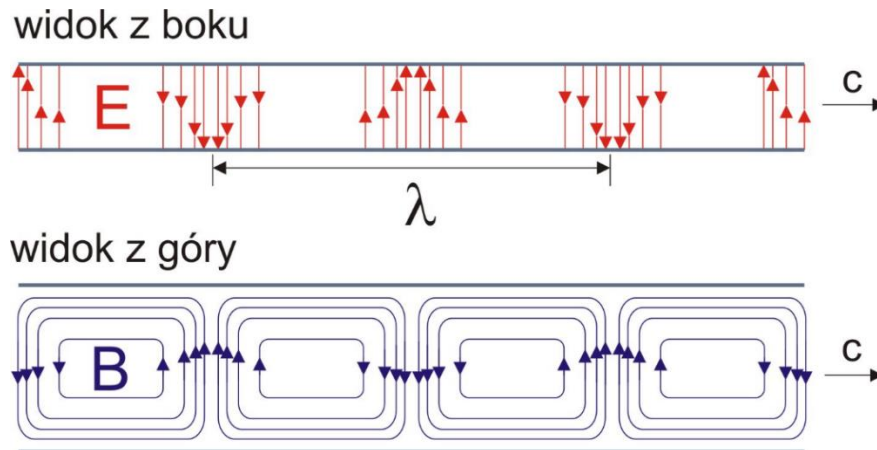
Rys. 27.3. Rozkład pól magnetycznego i elektrycznego w fali elektromagnetycznej w kablu koncentrycznym

Rysunek pokazuje tylko jedną z możliwych konfiguracji pól odpowiadającą jednej z różnych fal jakie mogą rozchodzić wzdłuż kabla. Pola  $E$  i  $B$  są do siebie prostopadłe w każdym punkcie.

Innym przykładem linii transmisyjnej (obok kabli koncentrycznych) są tzw. *falowody* , które stosuje się do przesyłania fal elektromagnetycznych w zakresie mikrofal.

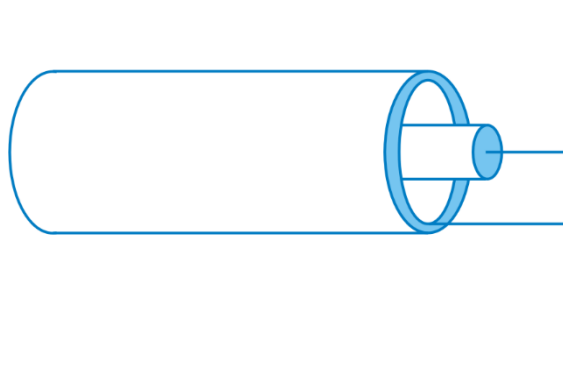
Falowody wykonywane są w postaci pustych rur metalowych o różnych kształtach przekroju poprzecznego (bez przewodnika wewnętrznego). Ściany takiego falowodu mają znikomą oporność. Jeżeli do końca falowodu przyłożymy generator mikrofalowy (klistron) to przez falowód przechodzi fala elektromagnetyczna. Przykładowy rozkład pól  $E$ ,  $B$  takiej fali jest pokazany na rysunku 27.4 dla falowodu, którego przekrój jest prostokątem. Fala rozchodzi się w kierunku zaznaczonym strzałką.

Typ transmisji czyli rozkład pól (typ fali) w falowodzie zależy od jego rozmiarów. Zwróćmy uwagę, że rozkład pól nie musi być sinusoidalnie zmienny.



Rys. 27.4. Rozkład pól magnetycznego i elektrycznego fali elektromagnetycznej w prostokątnym falowodzie (dla polepszenia czytelności na rysunku górnym pominięto linie  $B$  a na dolnym linie  $E$ )

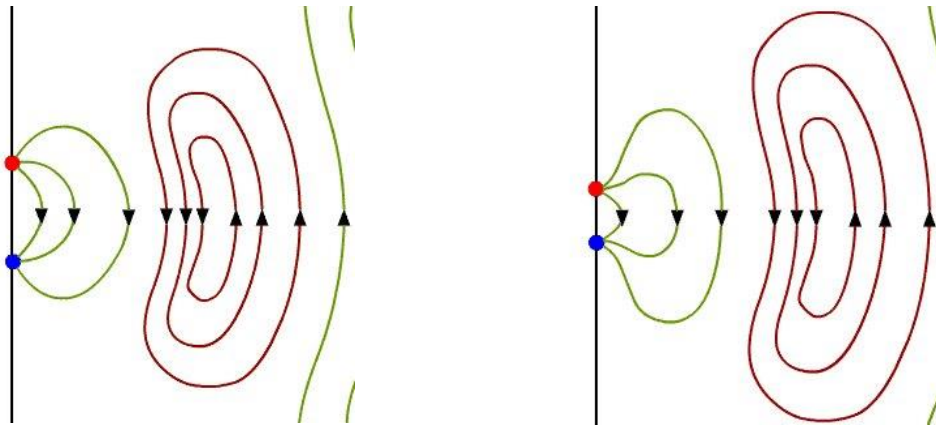
Elektromagnetyczna linia transmisyjna może być zakończona w sposób umożliwiający wypromieniowanie energii elektromagnetycznej do otaczającej przestrzeni. Przykładem takiego zakończenia jest antena dipolowa umieszczona na końcu kabla koncentrycznego pokazana na rysunku 27.5.



Rys. 27.5. Elektryczna antena dipolowa na końcu kabla koncentrycznego

Jeżeli różnica potencjałów pomiędzy między drutami zmienia się sinusoidalnie to taka antena zachowuje się jak *dipol elektryczny*, którego moment dipolowy zmienia się co do wielkości jak i kierunku.

Energia elektromagnetyczna przekazywana wzdłuż kabla jest wypromieniowywana przez antenę tworząc falę elektromagnetyczną w ośrodku otaczającym antenę. Na rysunku 27.6 pokazane jest pole  $E$  wytwarzane przez taki oscylujący dipol (przez taką antenę) w dwu przykładowo wybranych chwilach. Rysunek przedstawia położenie ładunków dipola i pole elektryczne wokół niego.



Rys. 27.6. Fala elektromagnetyczna emitowana przez drgający dipol elektryczny

Zwróćmy uwagę na jeszcze jedną bardzo istotną cechę fal elektromagnetycznych. *Fale elektromagnetyczne mogą rozchodzić się w próżni* w przeciwieństwie do fal mechanicznych, na przykład fal akustycznych, które wymagają ośrodka materialnego. Prędkość fal elektromagnetycznych w próżni jest dana wzorem


$$c = \lambda \nu \quad (27.8)$$

lub

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{E_0}{B_0} \quad (27.9)$$

gdzie  $\nu$  jest częstotliwością,  $\lambda$  długością fali,  $\omega$  częstością kołową, a  $k$  liczbą falową.

## 27.4 Wektor Poyntinga

Fale elektromagnetyczne posiadają zdolność do przenoszenia energii od punktu do punktu. Szybkość przepływu energii przez jednostkową powierzchnię płaskiej fali elektromagnetycznej opisujemy wektorem  $\mathbf{S}$  zwanym *wektorem Poyntinga* . Wektor  $\mathbf{S}$  definiujemy za pomocą iloczynu wektorowego

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (27.10)$$

W układzie SI jest on wyrażony w  $\text{W/m}^2$ , kierunek  $\mathbf{S}$  pokazuje kierunek przenoszenia energii. Wektory  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  są chwilowymi wartościami pola elektromagnetycznego w rozpatrywanym punkcie.



### Przykład

Na zakończenie rozpatrzmy radiostację o mocy  $P_0 = 30 \text{ kW}$  wysyłającą fale izotropowo (jednakowo w każdym kierunku). Obliczmy jakie natężenie sygnału (moc na jednostkę powierzchni) odbieramy w odległości  $r = 10 \text{ km}$  od nadajnika i jaka jest amplituda pola elektrycznego i pola magnetycznego docierającej fali elektromagnetycznej.

Ponieważ moc emitowana jest we wszystkich kierunkach to znaczy jest równomiernie rozłożona na powierzchni sfery więc średnia wartość wektora Poyntinga w odległości  $r$  od źródła ma wartość

$$\bar{S} = \frac{P_0}{4\pi r^2} \quad (27.11)$$

Podstawiając dane otrzymujemy  $\bar{S} = 24 \mu\text{W}/\text{m}^2$

Na podstawie wyrażenia (27.4)  $E = cB$ , więc możemy zapisać średnią wartość wektora Poyntinga w postaci

$$\bar{S} = \frac{1}{\mu_0} \overline{EB} = \frac{1}{\mu_0 c} \overline{E^2} \quad (27.12)$$

Jeżeli natężenie pola  $E$  zmienia się sinusoidalnie to wartość średnia  $\overline{E^2} = E_0^2/2$ , a stąd

$$\bar{S} = \frac{P_0}{4\pi r^2} = \frac{1}{\mu_0 c} \frac{E_0^2}{2} \quad (27.13)$$

na tej podstawie

$$E_0 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu_0 c P_0}{2\pi}} \quad (27.14)$$

Podstawiając dane otrzymujemy  $E_0 = 0.13 \text{ V/m}$ .

Wreszcie obliczamy pole  $B_0$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} \quad (27.15)$$

Otrzymujemy wartość  $B_0 = 4 \cdot 10^{-10} \text{ T}$ . Zauważmy jak małe jest pole magnetyczne.

Ten rozdział kończy moduł ósmy; możesz teraz przejść do podsumowania i zadań testowych.

## Podsumowanie

- Z prawa Faradaya wynika, siła elektromotoryczna indukcji zależy od szybkość zmian strumienia magnetycznego  $\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$ . Prąd indukcyjny obserwujemy gdy źródło pola magnetycznego porusza się względem nieruchomej pętli (obwodu), ale również gdy przewód w kształcie pętli porusza się w obszarze pola magnetycznego.
- Reguła Lenza stwierdza, że prąd indukowany ma taki kierunek, że wytwarzany przez niego własny strumień magnetyczny przeciwdziała zmianom strumienia, które go wywołały.
- W transformatorze stosunek napięcia w uzwojeniu pierwotnym do napięcia w uzwojeniu wtórnym jest równy stosunkowi liczby zwojów  $\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$ .
- Siła elektromotoryczna samoindukcji jest równa  $\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$ , gdzie  $L$  jest współczynnikiem indukcji własnej.
- Gęstość energii zgromadzonej w polu magnetycznym o indukcji  $\mathbf{B}$  wynosi  $\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$ .
- W obwodzie  $LC$  ładunek, natężenie prądu i napięcie oscylują sinusoidalnie z częstotliwością  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .
- W obwodzie szeregowym  $RLC$  zasilanym sinusoidalnie zmiennym napięciem  $V(t) = V_0 \sin \omega t$  płynie prąd  $I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$  o amplitudzie  $I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$  i przesunięciu fazowym  $\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$ . Stała proporcjonalności  $Z$  pomiędzy  $V_0$  i  $I_0$  nosi nazwę zawady obwodu  $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ .
- Średnia moc wydzielona w obwodzie wynosi  $\bar{P} = \frac{V_0 I_0}{2} \cos \varphi = \frac{I_0^2 R}{2}$ . Cała moc wydzielona się na oporze  $R$ , na kondensatorze i cewce nie ma strat mocy.
- Prędkość fal elektromagnetycznych w próżni jest dana wyrażeniem  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$
- Równanie falowe dla fali elektromagnetycznej rozchodzącej się wzdłuż osi  $x$  ma postać  $\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$  lub (dla pola  $\mathbf{E}$ )  $\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$ . Pola  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  są do siebie prostopadłe.
- Szybkość przepływu energii płaskiej fali elektromagnetycznej opisujemy wektorem Poyntinga  $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ .

- Równania Maxwella w postaci uogólnionej

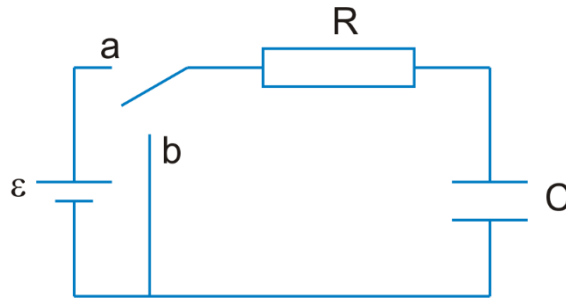
	Prawo	Równanie
1	prawo Gaussa dla elektryczności	$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{S} = Q/\varepsilon_0$
2	prawo Gaussa dla magnetyzmu	$\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 0$
3	uogólnione prawo Faradaya	$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{l} (= \varepsilon) = -\frac{d\phi_B}{dt}$
4	uogólnione prawo Ampère'a	$\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} + \mu_0 I$

## Materiały dodatkowe do Modułu VIII

### Obwody RC i RL, stałe czasowe

#### Obwód RC

Na rysunku poniżej pokazany jest obwód złożony z opornika  $R$ , pojemności  $C$  i idealnego (bez oporu wewnętrznego) źródła napięcia (SEM)  $\varepsilon$ .



Obwód RC

Celem naładowania kondensatora zamykamy wyłącznik do pozycji (a). Prąd jaki popłynie w obwodzie RC obliczamy korzystając z prawa Kirchoffa, zgodnie z którym

$$\varepsilon = U_R + U_C \quad (\text{VIII.1.1})$$

lub

$$\varepsilon = IR + \frac{Q}{C} \quad (\text{VIII.1.2})$$

Ponieważ  $I = dQ/dt$  więc

$$\varepsilon = \frac{dQ}{dt} R + \frac{Q}{C} \quad (\text{VIII.1.3})$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja  $Q(t)$  postaci

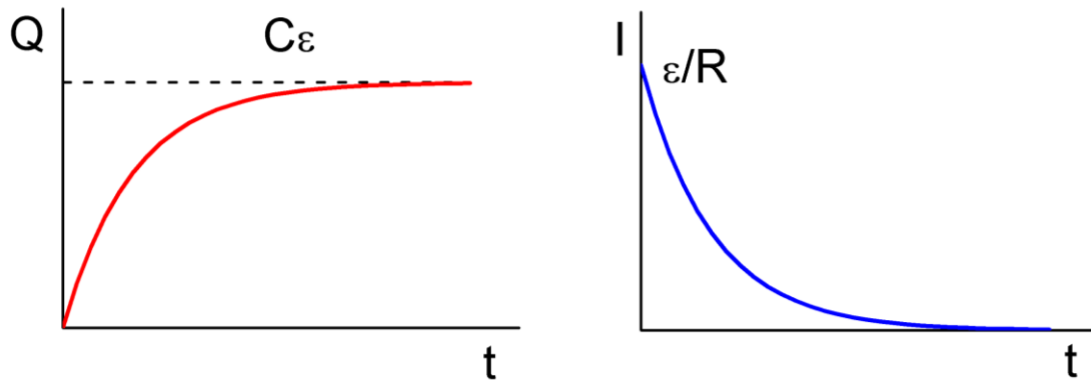
$$Q = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC}) \quad (\text{VIII.1.4})$$

Natomiast prąd w obwodzie obliczamy z zależności  $I = dQ/dt$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} \quad (\text{VIII.1.5})$$

Obie zależności zostały pokazane na rysunku poniżej.





Ładowanie kondensatora: ładunek na kondensatorze i prąd w obwodzie

Z przedstawionych wykresów widać, że ładunek na kondensatorze narasta, a prąd maleje eksponencjalnie z czasem. Szybkość tych zmian zależy od wielkości  $\tau = RC$ , która ma wymiar czasu i jest nazywana *stałą czasową* obwodu.

Jeżeli teraz w obwodzie przełączymy wyłącznik do pozycji (b) to będziemy rozładowywać kondensator. Teraz w obwodzie nie ma źródła SEM i prawo Kirchoffa dla obwodu przyjmuje postać

$$U_R + U_C = 0 \quad (\text{VIII.1.6})$$

lub

$$IR + \frac{Q}{C} = 0 \quad (\text{VIII.1.7})$$

Ponieważ  $I = dQ/dt$  więc

$$\frac{dQ}{dt} R + \frac{Q}{C} = 0 \quad (\text{VIII.1.8})$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja  $Q(t)$  postaci

$$Q = Q_0 e^{-t/RC} \quad (\text{VIII.1.9})$$

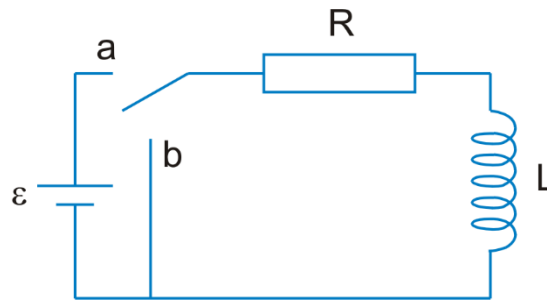
Natomiast prąd w obwodzie obliczamy z zależności  $I = dQ/dt$

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} \quad (\text{VIII.1.10})$$

Zarówno ładunek jak i prąd maleją eksponencjalnie ze stałą czasową  $\tau = RC$ .

**Obwód  $RL$** 

Analogicznie, jak w obwodzie  $RC$ , opóźnienie w narastaniu i zanikaniu prądu obserwuje się w obwodzie  $RL$  (rysunek) przy włączaniu lub wyłączaniu źródła SEM.

Obwód  $RL$ 

Gdyby w obwodzie znajdował się tylko opornik  $R$ , to po ustawieniu wyłącznika w pozycji (a) prąd osiągnąłby natychmiast wartość  $\varepsilon/R$ . Obecność indukcyjności  $L$  w obwodzie powoduje, że pojawia się dodatkowo SEM samoindukcji  $\varepsilon_L$ , która zgodnie z regułą Lenza przeciwdziała wzrostowi prądu co oznacza, że jej zwrot jest przeciwny do  $\varepsilon$ .

Zgodnie z prawem Kirchoffa

$$\varepsilon = U_R - U_L \quad (\text{VIII.1.11})$$

lub

$$\varepsilon = IR + L \frac{dI}{dt} \quad (\text{VIII.1.12})$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja  $I(t)$  postaci

$$I = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \quad (\text{VIII.1.13})$$

Prąd w obwodzie narasta eksponencjalnie ze stałą czasową  $\tau = L/R$ . Podobnie rośnie napięcie na oporniku  $R$

$$U_R = IR = \varepsilon (1 - e^{-Rt/L}) \quad (\text{VIII.1.14})$$

Natomiast napięcie na indukcyjności  $L$  maleje z tą samą stałą czasową

$$U_L = -L \frac{dI}{dt} = -\varepsilon e^{-Rt/L} \quad (\text{VIII.1.15})$$

Jeżeli po ustaleniu się prądu w obwodzie przestawimy przełącznik do pozycji (b) to wyłączymy źródło SEM i spowodujemy zanik prądu w obwodzie. Ponownie jednak indukcyjność  $L$  powoduje, że prąd nie zanika natychmiastowo.

Spadek prądu obliczamy ponownie na podstawie prawa Kirchoffa (równanie VIII.1.12) uwzględniając, że  $\varepsilon = 0$

$$IR + L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (\text{VIII.1.16})$$

Rozwiązanie tego równania ma postać

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-Rt/L} \quad (\text{VIII.1.17})$$

Obserwujemy zanik prądu, ponownie ze stałą czasową  $\tau = L/R$ .

### Zawada w obwodzie RLC

W omawianym obwodzie RLC pomimo szeregowego połączenia oporów omowego, pojemnościowego i indukcyjnego opór zastępczy (zawada) nie jest sumą algebraiczną tych oporów. Wynika to bezpośrednio z występujących w obwodzie przesunięć fazowych pomiędzy prądem i napięciem, które trzeba uwzględnić przy dodawaniu napięć i w konsekwencji przy liczeniu zawady.

Żeby to sprawdzić obliczmy napięcie wypadkowe w obwodzie RLC

$$U = U_R + U_C + U_L \quad (\text{VIII.2.1})$$

Po podstawieniu odpowiednich wyrażeń i uwzględnieniu przesunięć fazowych pomiędzy prądem i napięciem dla poszczególnych elementów obwodu otrzymujemy

$$U = RI_0 \sin(\omega t - \varphi) - X_C I_0 \sin(\omega t - \varphi + \pi/2) + X_L I_0 \sin(\omega t - \varphi - \pi/2) \quad (\text{VIII.2.2})$$

lub

$$U = RI_0 \sin(\omega t - \varphi) - X_C I_0 \cos(\omega t - \varphi) + X_L I_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (\text{VIII.2.3})$$

Zwróćmy uwagę, że na kondensatorze napięcie  $U$  pozostaje za prądem  $I$ , a na cewce  $U$  wyprzedza  $I$ .

Równanie (2b) można przekształcić do postaci

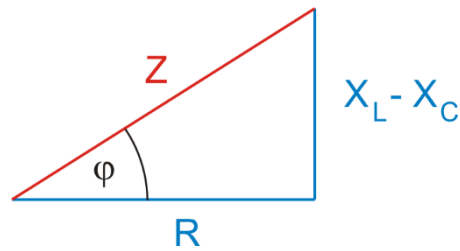
$$\frac{U}{I_0} = R \sin(\omega t - \varphi) + (X_L - X_C) \cos(\omega t - \varphi) \quad (\text{VIII.2.4})$$

Mamy więc teraz dodać do siebie dwie funkcje, sinus i cosinus.

W tym celu skorzystamy z wyrażenia (25.17), zgodnie z którym  $(X_L - X_C)/R = \text{tg } \varphi$ . Relacja ta, pokazana na rysunku poniżej, przedstawia związek między reaktancjami  $X_L$ ,  $X_C$  oporem  $R$  oraz kątem fazowym  $\varphi$ .

Zauważmy, że przeciwprostokątna trójkąta na rysunku jest równa zawadzie

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$



Związek między reaktancjami  $X_L$ ,  $X_C$  oporem  $R$ , zawadą  $Z$  oraz kątem fazowym  $\varphi$

Dzielimy teraz obustronnie równanie (VII.2.4) przez  $Z$  i otrzymujemy

$$\frac{1}{Z} \frac{U}{I_0} = \frac{R}{Z} \sin(\omega t - \varphi) + \frac{(X_L - X_C)}{Z} \cos(\omega t - \varphi) \quad (\text{VIII.2.5})$$

Zgodnie z rysunkiem

$$\frac{R}{Z} = \cos \varphi \quad (\text{VIII.2.6})$$

oraz

$$\frac{(X_L - X_C)}{Z} = \sin \varphi \quad (\text{VIII.2.7})$$

Tak więc ostatecznie

$$\frac{1}{Z} \frac{U}{I_0} = \cos \varphi \sin(\omega t - \varphi) + \sin \varphi \cos(\omega t - \varphi) = \sin \omega t \quad (\text{VIII.2.8})$$

Otrzymaliśmy ponownie relację

$$U = Z I_0 \sin \omega t \quad (\text{VIII.2.9})$$

z której wynika, że napięcie  $U$  wyprzedza prąd  $I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$  o kąt fazowy  $\varphi$  oraz, że zawada  $Z$  jest stałą proporcjonalności pomiędzy  $U_0$  i  $I_0$ .

### **Prąd przesunięcia**

Widzieliśmy (rysunek 26.3), że linie pola  $B$  mają taki sam kształt jak linie wytworzone przez przewodnik z prądem. Zauważmy ponadto, że w uogólnionym prawie Ampère'a

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} + \mu_0 I \quad (\text{VIII.3.1})$$

wyraz  $\varepsilon_0 d\phi_E/dt$  ma wymiar prądu.

Mimo, że nie mamy tu do czynienia z ruchem ładunków w obszarze pomiędzy okładkami kondensatora, to wyraz ten z przyczyn wymienionych powyżej nazywamy *prądem przesunięcia*  $\mathbb{P}$ .

Mówimy, że pole  $B$  może być wytworzone przez prąd przewodzenia  $I$  lub przez prąd przesunięcia  $I_p$ .

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0(I_p + I) \quad (\text{VIII.3.2})$$

Koncepcja prądu przesunięcia pozwala na zachowanie ciągłości prądu w przestrzeni gdzie nie jest przenoszony ładunek. Przykładowo w trakcie ładowania kondensatora prąd dopływa do jednej okładki i odpływa z drugiej więc wygodnie jest przyjąć, że płynie on również pomiędzy okładkami tak aby była zachowana ciągłość prądu w obwodzie.

### Równania Maxwella

W przypadku statycznym (pola niezależne od czasu) dwa równania Maxwella

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = Q/\varepsilon_0 \quad (\text{VIII.4.1})$$

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0 \quad (\text{VIII.4.2})$$

opisują prawa elektrostatyki. Z pierwszego równania wynika prawo Coulomba, które jest słuszne tylko w przypadku statycznym bo nie opisuje oddziaływania pomiędzy ładunkami w ruchu.

Równanie (VIII.4.2) pokazuje, że gdy nie występuje zmienny (w czasie) strumień magnetyczny, to praca pola  $\mathbf{E}$  wzdłuż dowolnej zamkniętej drogi jest równa zero - pole elektrostatyczne jest polem zachowawczym i do jego opisu możemy posłużyć się pojęciem potencjału.

Natomiast w przypadku pól zależnych od czasu równanie to ma postać

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l}(=\varepsilon) = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad (\text{VIII.4.3})$$

i pole  $\mathbf{E}$  nie jest polem zachowawczym - nie możemy go opisać za pomocą potencjału.

Kolejne dwa równania Maxwella, w przypadku statycznym (pola niezależne od czasu) opisują prawa magnetostatyki

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{VIII.4.4})$$

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (\text{VIII.4.5})$$

Pierwsze z tych równań (VIII.4.4) mówi, że nie istnieją ładunki magnetyczne (pojedyncze bieguny) analogiczne do ładunków elektrycznych. Natomiast równanie (VIII.4.5) pokazuje, że źródłem pola magnetostatycznego są stałe prądy elektryczne.

Natomiast w przypadku pól zależnych od czasu równanie to ma postać

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} + \mu_0 I \quad (\text{VIII.4.6})$$

i uwzględnia efekt zmieniających się pól elektryczny.

Zauważmy, że w przypadku statycznym prawa opisujące pola elektryczne i magnetyczne są od siebie niezależne natomiast w przypadku pól zależnych od czasu równania Maxwella łączą ze sobą pola elektryczne i magnetyczne.

### Równania Maxwella w postaci różniczkowej (operatorowej)

Istnieje kilka równoważnych sformułowań równań Maxwella. Poza, przedstawioną w paragrafie 26.4 i dodatku VIII.4 postacią całkową, równania Maxwella często przedstawiane są postaci *różniczkowej*. Tę formę równań można otrzymać bezpośrednio z formy całkowej w wyniku przekształceń matematycznych w oparciu o twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego i Stokesa.

W paragrafie 6.4 omówiliśmy, na przykładzie sił grawitacyjnych, ważne w fizyce *pojęcie pola*. Analogicznie w paragrafie 17.3 zdefiniowaliśmy natężenie pola elektrycznego. W obu przypadkach mamy do czynienia z wektorowym polem sił (grawitacyjnej, elektrostatycznej). W każdym punkcie takiej przestrzeni/pola określona jest pewna funkcja wektorowa  $\vec{v}(\vec{r})$ , określony jest *wektor pola*  $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ . Takie pole nazywamy *polem wektorowym* (patrz dodatek VI.2). Kierunek pola jest wyznaczony poprzez *linie pola wektorowego*, do których wektor pola jest styczny w każdym punkcie.

Skorzystamy teraz, z wprowadzonego w dodatku VI.2, *operatora wektorowego nabla*  $\nabla \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)$  do zdefiniowania *operatorów dywergencji*  $\mathcal{P}$  i *rotacji*  $\mathcal{P}$ .

*Operator dywergencji* to wynik *iloczynu skalarnego* operatora nabla i wektora pola  $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$  (działanie na funkcję wektorową). W wyniku otrzymujemy pole *skalarne*

$$\text{div } \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \quad (\text{VIII.5.1})$$

Dywergencja jest miarą *źródłowości pola* (oznacza intensywność źródła), wskazuje na lokalne źródła pola wektorowego i wiąże się z twierdzeniem Gaussa-Ostrogradskiego, które umożliwia zamianę całki powierzchniowej na objętościową:

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{v}) dV \quad (\text{VIII.5.2})$$

gdzie  $V$  jest obszarem ograniczonym powierzchnią zamkniętą  $S$ .

Operator rotacji to wynik iloczynu wektorowego operatora nabra i wektora pola  $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$  (działanie na funkcję wektorową). W wyniku otrzymujemy pole wektorowe

$$\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \hat{i} \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \quad (\text{VIII.5.3})$$

Rotacja określa obrót wektora pola, np. dla płynącej cieczy,  $\text{rot } \vec{v}$  oznacza, że mamy do czynienia z wirami. Rotacja jest miarą obecności lokalnych *zawirowań pola* i wiąże się z twierdzeniem Stockesa, które wiąże całkę liniową z pola wektorowego po zamkniętym konturze  $L$  z całką powierzchniową po płacie powierzchniowym  $S$  ograniczonym przez kontur  $L$ :

$$\int_L \vec{v} \cdot d\vec{L} = \oint_L (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{VIII.5.4})$$

Teraz na podstawie twierdzenia Gaussa – Ostrogradskiego zamieniamy całkę powierzchniową na całkę objętościową, a na podstawie twierdzenia Stokesa zamieniamy całkę liniową (cyrkulację) na całkę powierzchniową i przekształcamy równania Maxwella do postaci różniczkowej (operatorowej)

$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q/\epsilon_0$	+	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV$	$\rightarrow$	$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$
$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	+	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV$	$\rightarrow$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} (= \mathcal{E}) = -\frac{d\phi_B}{dt}$	+	$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{L} = \oint_L (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$	$\rightarrow$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} + \mu_0 I$	+	$\int_L \vec{B} \cdot d\vec{L} = \oint_L (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}$	$\rightarrow$	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}$

gdzie  $\rho$  jest gęstością ładunku, a  $J$  gęstością prądu.

## Rozwiązania ćwiczeń z modułu VIII

### Ćwiczenie 24.1

Dane:  $d = 5 \text{ cm}$ ,  $N = 100$  zwojów,  $\alpha_1 = 0^\circ$ ,  $\alpha_2 = 180^\circ$ ,  $B = 1 \text{ T}$ ,  $t = 0.1 \text{ s}$ .

Jeżeli zmiana strumienia magnetycznego  $\Delta\phi_B$  nastąpiła w czasie  $t$  to średnia SEM jaka wyindukuje się wynosi zgodnie ze wzorem (24.1)

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi_B}{t}$$

Jeżeli mamy obwód złożony z  $N$  zwojów to powyższy wzór przyjmuje postać

$$\varepsilon = -N \frac{\Delta\phi_B}{t}$$

Zmianę strumienia obliczamy jako różnicę strumienia końcowego i początkowego

$$\Delta\phi_B = \phi_2 - \phi_1 = BS(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$$

Podstawiając to wyrażenie do równania na SEM otrzymujemy

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi_B}{t} = -N \frac{Bd^2(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)}{t}$$

gdzie uwzględniono, że  $S = d^2$ .

Ostatecznie po podstawieniu danych otrzymujemy  $\varepsilon = 5 \text{ V}$ .

### Ćwiczenie 24.2

Dane:  $P_{\text{elektr.}} = 20 \text{ MW}$ ,  $R = 1 \Omega$ ,  $U_1 = 100 \text{ kV}$ ,  $U_2 = 15 \text{ kV}$ .

Straty energii są związane z ciepłem jakie wydziela się podczas przepływu prądu przez opornik (linię przesyłową)

$$P = I^2 R$$

Ponieważ moc elektrowni

$$P_{\text{elektr.}} = UI$$

jest stała, więc łącząc powyższe równania otrzymujemy

$$P = \left( \frac{P_{\text{elektr.}}}{U} \right)^2 R$$



Podstawiając dane otrzymujemy  $P_1 = 40 \text{ kW}$  (dla  $U_1 = 100 \text{ kV}$ ) co stanowi 0.2% mocy elektrowni oraz  $P_2 = 1.78 \text{ kW}$  (dla  $U_2 = 15 \text{ kV}$ ) co stanowi 8.9% mocy elektrowni.

### Ćwiczenie 24.3

Dane:  $l = 1 \text{ cm}$ ,  $d = 1 \text{ cm}$ ,  $N = 10$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$ .

Indukcyjność cewki obliczamy ze wzoru (24.19)

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} = \mu_0 \frac{N^2 \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}{l}$$

Podstawiając dane otrzymujemy  $L = 10^{-6} \text{ H} = 1 \text{ }\mu\text{H}$ .

### Ćwiczenie 25.1

Energię jaka jest zgromadzona w dowolnej chwili  $t$  w kondensatorze obliczmy ze wzoru

$$W_C = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_0^2 \cos^2 \omega t}{2C}$$

a w cewce indukcyjnej z wyrażenia

$$W_L = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_0^2 \sin^2 \omega t}{2}$$

Całkowita energia jest sumą energii  $W_C$  i  $W_L$

$$W = W_C + W_L = \frac{Q_0^2 \cos^2 \omega t}{2C} + \frac{LI_0^2 \sin^2 \omega t}{2}$$

Korzystając z zależności (25.11)  $LI_0 \omega = LQ_0 \omega^2 = LQ_0 \frac{1}{LC} = \frac{Q_0}{C}$  oraz  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  możemy przekształcić powyższe równanie do postaci

$$W = W_C + W_L = \frac{LI_0^2 \cos^2 \omega t}{2} + \frac{LI_0^2 \sin^2 \omega t}{2} = \frac{LI_0^2}{2}$$

Całkowita energia jest stała (niezależna od  $t$ ).

### Ćwiczenie 25.2

Dane:  $R = 10 \text{ }\Omega$ ,  $L = 3 \text{ }\mu\text{H} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ H}$ ,  $C = 1 \text{ pF} = 1 \cdot 10^{-12} \text{ F}$ ,  $f = 100 \text{ MHz} = 1 \cdot 10^8 \text{ Hz}$ .

Zawadę obwodu obliczamy z zależności  $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

gdzie  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  oraz  $X_L = \omega L$ .

Podstawiając dane i uwzględniając, że  $\omega = 2\pi f$  otrzymujemy  $X_L = 1885 \Omega$ ,  $X_C = 1591 \Omega$  oraz  $Z = 294 \Omega$ .

Gdyby w obwodzie nie występowały reaktancje, a wyłącznie oporniki omowe o takich samych opornościach to opór zastępczy (wypadkowy) byłby sumą tych oporności równą  $R_{omowy} = 3486 \Omega$ .

### Ćwiczenie 25.3

W warunkach rezonansu  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Podstawiając tę wartość do wyrażenia na zawadę  $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$  otrzymujemy

$$Z = R$$

Zawada w warunkach rezonansu (i przy małym tłumieniu) jest równa oporowi omowemu obwodu.

### Ćwiczenie 25.4

Dane:  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 1 \mu\text{H} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ H}$ ,  $U_0 = 100 \mu\text{V} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ V}$ ,  $f_1 = 101 \text{ MHz} = 1 \cdot 10^8 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 96 \text{ MHz} = 9.6 \cdot 10^7 \text{ Hz}$ .

Pojemność  $C$ , przy której odbiornik jest dostrojony do częstotliwości  $f$  obliczamy z warunku rezonansu

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Uwzględniając, że  $\omega = 2\pi f$  otrzymujemy

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L}$$

Dla częstotliwości  $f_1$  pojemność  $C = 2.48 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 2.48 \text{ pF}$ .

Napięcie na kondensatorze przy częstotliwości rezonansowej (tj. gdy  $Z = R$ ) wynosi

$$U_{C,rez} = I_0 X_C = \frac{U_0}{R} \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{U_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Podstawiając dane, dla częstotliwości  $f_1$  otrzymujemy napięcie  $U_{C,rez} = 6.35 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 6.35 \text{ mV}$ . Napięcie wyjściowe jest więc około 60 razy większe od sygnału wejściowego.

Natomiast gdy pozostawimy te same ustawienia  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , ale zmienimy częstotliwość  $f$  to wówczas nie jest spełniony warunek rezonansu i napięcie na kondensatorze obliczamy z zależności

$$U_c = I_0 X_c = \frac{U_0}{Z} \frac{1}{\omega C} = \frac{U_0}{Z} \frac{1}{2\pi f C}$$

gdzie zawada  $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

Podstawiając dane i uwzględniając, że  $\omega = 2\pi f$  otrzymujemy dla częstotliwości  $f_2$  napięcie  $U_c = 9.62 \cdot 10^{-4} \text{ V} = 0.96 \text{ mV}$ . Niewielkie odstępstwo od rezonansu (zmiana częstotliwości o około 5%) spowodowało spadek sygnału wyjściowego o rząd wielkości.

### Ćwiczenie 25.5

Dane:  $U_{sk} = 230 \text{ V}$ .

Wartość skuteczna napięcia jest dana wyrażeniem  $U_{sk} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ .

Stąd wartość maksymalna napięcia  $U_0 = U_{sk} \sqrt{2} = 325 \text{ V}$ .

**Test VIII**

1. Jaka siła elektromotoryczna indukuje się w metalowym pręcie o długości  $l = 20$  cm, jeżeli przewodnik ten obraca się w polu magnetycznym o indukcji  $B = 0.5$  T, w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku pola magnetycznego wokół osi przechodzącej przez koniec pręta. Pręt wykonuje 60 obrotów w ciągu sekundy.
2. W cewce o współczynniku samoindukcji  $L = 0.1$  H natężenie prądu maleje jednostajnie od wartości  $I = 0.5$  A do zera w czasie 0.01 s. Jaka siła elektromotoryczna indukcji powstaje podczas wyłączania prądu?
3. W kołowej pętli o średnicy 10 cm płynie prąd 100 A. Jaka jest gęstość energii w środku tej pętli?
4. Transformator osiedlowy dostarcza średnio 100 kW mocy przy napięciu skutecznym 230 V. Napięcie skuteczne po stronie pierwotnej transformatora wynosi 10 kV. Jaki jest stosunek zwojów  $N_1/N_2$  w transformatorze i jaki jest wypadkowy opór obciążenia w uzwojeniu wtórnym? Zakładamy, że transformator jest idealny, a obciążenie czysto opornościowe.
5. Obwód drgający składa się z kondensatora o pojemności  $C = 1$  pF oraz cewki o współczynniku samoindukcji  $L = 1$   $\mu$ H. Jaki jest okres, częstotliwość i częstość oscylacji w obwodzie? Jaka jest długość fali elektromagnetycznej wypromieniowywanej przez ten obwód i z jakiego pasma pochodzi?
6. Obwód składa się z połączonych szeregowo oporu  $R = 10$   $\Omega$ , cewki o współczynniku samoindukcji  $L = 1$  H i kondensatora o pojemności  $C = 10$   $\mu$ F. Przy jakiej częstości  $\omega$  napięcia zasilającego wystąpi rezonans, a przy jakiej prąd w obwodzie wyniesie połowę wartości maksymalnej?
7. Napięcie skuteczne w obwodzie prądu zmiennego o częstotliwości  $f = 50$  Hz wynosi 230 V. Natężenie skuteczne  $I = 1$  A, a moc średnia  $P = 110$  W. Jakie jest przesunięcie w fazie pomiędzy prądem i napięciem w tym obwodzie?
8. Przedstaw równania Maxwella w postaci uogólnionej. Omów fakty doświadczalne związane z tymi prawami.
9. W jakim zakresie widma promieniowania elektromagnetycznego leżą fale o długościach 1m, 1cm, 0.5  $\mu$ m,  $10^{-10}$  m?

# MODUŁ IX

## 28 Optyka geometryczna i falowa

### 28.1 Wstęp

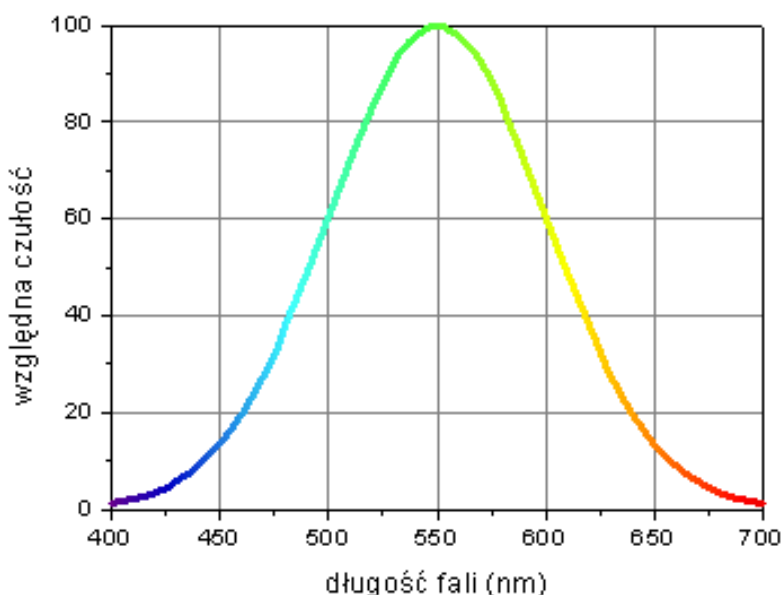
Promieniowanie świetlne, o którym będziemy mówić w poniższych rozdziałach jest pewnym, niewielkim wycinkiem widma elektromagnetycznego wyróżnionym przez fakt, że oko ludzkie reaguje na ten zakres promieniowania.



#### Ćwiczenie 28.1

Spróbuj podać zakres długości fal jaki obejmuje światło widzialne. Jakim barwom odpowiadają różne długości fal z tego zakresu?

Jeżeli rozwiązałeś powyższe ćwiczenie możesz porównać ten wynik z przedstawioną na rysunku 28.1 względną czułością oka ludzkiego.



Rys. 28.1. Względna czułość oka ludzkiego

Maksimum czułości oka ludzkiego przypada dla barwy zielono-żółtej dla  $\lambda = 550$  nm.



Więcej o widzeniu barwnym możesz przeczytać w *Dodatku 1*, na końcu modułu IX.

W kolejnych rozdziałach omówione zostaną zjawiska związane ze światłem widzialnym. Powinniśmy jednak pamiętać, że wszystkie przedstawione fakty są również słuszne w odniesieniu do pozostałych części widma fal elektromagnetycznych.

## 28.2 Odbicie i załamanie

### 28.2.1 Współczynnik załamania, droga optyczna, dyspersja światła

Wiemy już, że światło rozchodzi się w próżni z prędkością  $c$ . Natomiast, jak pokazują wyniki doświadczeń, w ośrodkach materialnych prędkość światła jest mniejsza. Jeżeli w jednorodnym ośrodku światło przebędzie w czasie  $t$  drogę  $l_1 = vt$  to droga  $l$  jaką w tym samym czasie światło przebyłoby w próżni wynosi

$$l = ct = c \frac{l_1}{v} = nl_1 \quad (28.1)$$

gdzie

$$n = \frac{c}{v} \quad (28.2)$$

nosi nazwę *bezwzględnego współczynnika załamania*  $n$ . Natomiast iloczyn *drogi geometrycznej*  $l_1$  i *współczynnika załamania*  $n$  nosi nazwę *drogi optycznej*. Poniżej w tabeli 28.1 podane zostały bezwzględne współczynniki załamania wybranych substancji.

Tab. 28.1 Bezwzględne współczynniki załamania wybranych ośrodków  
(dla  $\lambda = 589 \text{ nm}$  - żółte światło sodu)

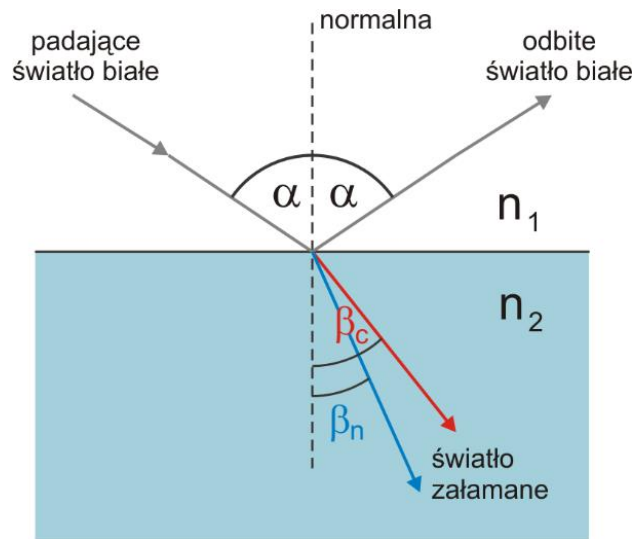
Ośrodek	Współczynnik załamania
powietrze	1.003
woda	1.33
alkohol etylowy	1.36
kwarc topiony	1.46
szkło zwykłe	1.52
szafir	1.77
diament	2.42

W nagłówku powyższej tabeli podano dla jakiej fali zostały wyznaczone współczynniki załamania. Jest to ważna informacja bo, jak pokazuje doświadczenie, prędkość fali przechodzącej przez ośrodek zależy od częstotliwości światła. Zjawisko to nazywamy *dyspersją światła*. Dla większości materiałów obserwujemy, że wraz ze wzrostem częstotliwości fali świetlnej maleje jej prędkość czyli rośnie współczynnik załamania (rys. 28.2).

### 28.2.2 Prawo odbicia i prawo załamania

Jeżeli światło pada na granicę dwóch ośrodków to ulega zarówno odbiciu na powierzchni granicznej jak i załamaniu przy przejściu do drugiego ośrodka tak jak pokazano to na rysunku 28.2 dla powierzchni płaskiej.

Na rysunku pokazana jest też dyspersja światła; promień niebieski jest bardziej załamany niż czerwony. Światło białe, złożone z fal o wszystkich długościach z zakresu widzialnego, uległo *rozszczepieniu* to jest rozdzieleniu na barwy składowe. Na rysunku pokazano promienie świetlne tylko dla dwu skrajnych barw niebieskiej i czerwonej.



Rys. 28.2. Odbicie i załamanie światła białego na granicy dwóch ośrodków ( $n_2 > n_1$ )

Odbiciem i załamaniem rządzą dwa następujące prawa:



**Prawo, zasada, twierdzenie**

*Prawo odbicia: Promień padający, promień odbity i normalna do powierzchni granicznej wystawiona w punkcie padania promienia leżą w jednej płaszczyźnie i kąt padania równa się kątowi odbicia  $\alpha_1 = \alpha_2$ .*



**Prawo, zasada, twierdzenie**

*Prawo załamania: Stosunek sinusa kąta padania do sinusa kąta załamania jest równy stosunkowi bezwzględnego współczynnika załamania ośrodka drugiego  $n_2$  do bezwzględnego współczynnika załamania ośrodka pierwszego  $n_1$ , czyli współczynnikowi względnemu  $n_{2,1}$  załamania światła ośrodka drugiego względem pierwszego.*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = n_{2,1} \quad (28.3)$$

lub

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} \quad (28.4)$$


gdzie skorzystaliśmy z definicji bezwzględnego współczynnika załamania  $n = c/v$ .

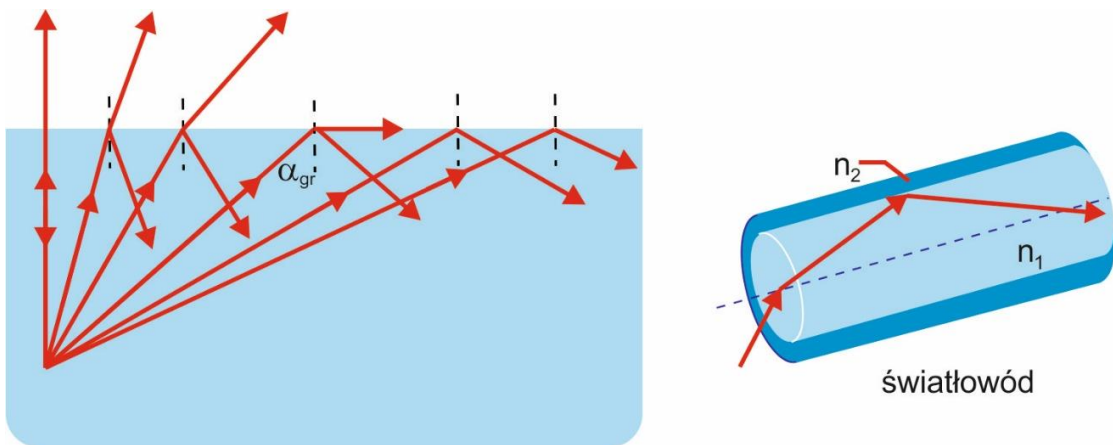
Powyższe prawa dotyczące fal elektromagnetycznych można wyprowadzić z równań Maxwella, ale jest to matematycznie trudne. Można też skorzystać z prostej (ale ważnej) zasady odkrytej w XVII w. przez Fermata.





Więcej o zasadzie Fermata możesz przeczytać w *Dodatku 2*, na końcu modułu IX.

Z prawa załamania (wzór 28.3) wynika, że gdy promień świetlny przechodzi z ośrodka gęstszego optycznie do ośrodka rzadszego, np. z wody do powietrza, to kąt załamania promienia jest większy od kąta padania:  $\sin \beta > \sin \alpha$ , bo  $n_2 < n_1$ . Wynika stąd, że istnieje taki graniczny kąt padania  $\alpha_{gr}$ , przy którym kąt załamania  $\beta = 90^\circ$  i promień załamany biegnie wzdłuż granicy ośrodków. Natomiast dla kąta padania  $\alpha > \alpha_{gr}$ , promień nie ulega załamaniu tylko odbija się od granicy ośrodków (rysunek poniżej). Zjawisko to nosi nazwę *całkowitego wewnętrznego odbicia* . Zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia wykorzystywane jest między innymi w pryzmatach całkowitego odbicia w aparatach fotograficznych, lornetkach oraz światłowodach (rysunek poniżej).

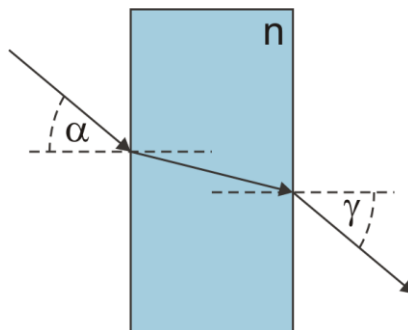


Rys. 28.3. Całkowite wewnętrzne odbicie na granicy dwóch ośrodków ( $n_2 < n_1$ )



### Ćwiczenie 28.2

Spróbuj teraz prześledzić bieg promienia świetlnego padającego pod kątem  $\alpha$  na umieszczoną w powietrzu prostopadłościenną szklaną płytkę wykonaną ze szkła o współczynniku załamania  $n$  tak jak pokazano na rysunku poniżej. Korzystając z prawa załamania oblicz kąt  $\gamma$  pod jakim promień opuszcza płytkę. Wynik zapisz poniżej.



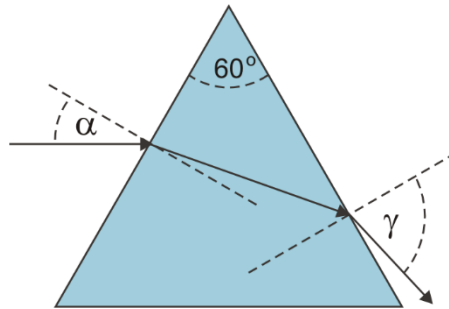
$\gamma =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.



### Ćwiczenie 28.3

Podobnie jak w poprzednim ćwiczeniu, promień światła załamuje się dwukrotnie tym razem przechodzący przez równoboczny pryzmat, pokazany na rysunku obok. Promień biegnie początkowo równoległe do podstawy pryzmatu, a opuszcza go pod kątem  $\gamma$ . Oblicz ten kąt wiedząc, że pryzmat jest wykonany z materiału o współczynniku załamania  $n = 1.5$ . Wynik zapisz poniżej.



$\gamma =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Omawiając odbicie i załamanie ograniczyliśmy się do *fal płaskich* i do *płaskich powierzchni*. Uzyskane wyniki stosują się jednak do bardziej ogólnego przypadku fal kulistych. Stosują się również do kulistych powierzchni odbijających - *zwierciadeł kulistych* i kulistych powierzchni załamujących - *soczewek* . Te ostatnie mają szczególne znaczenie ze względu na to, że stanowią część układu optycznego oka i wielu przyrządów optycznych takich jak np. lupa, teleskop, mikroskop.

### 28.2.3 Soczewki

Soczewkami nazywamy ciała przezroczyste ograniczone dwoma powierzchniami o promieniach krzywizn  $R_1$  i  $R_2$ .

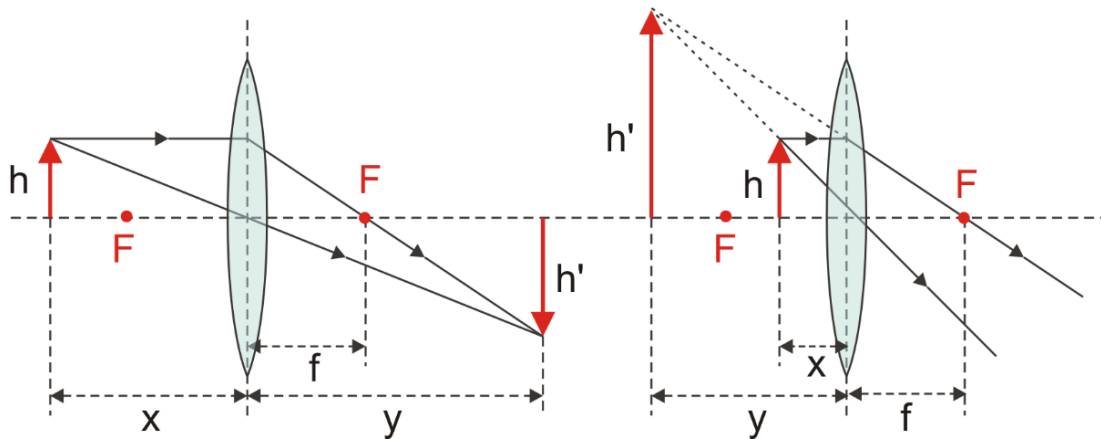
Nasze rozważania własności optycznych soczewek ograniczymy do soczewek cienkich to znaczy takich, których grubość jest znacznie mniejsza od promieni krzywizn  $R_1$  i  $R_2$  powierzchni ograniczających soczewkę. Ponadto zakładamy, że promienie świetlne padające na soczewkę tworzą małe kąty z osią soczewki to jest prostą przechodzącą przez środki krzywizn obu powierzchni. Takie promienie (prawie prostopadłe do powierzchni soczewki) leżące w pobliżu osi soczewki nazywamy *promieniami przyosiowymi* .

Z wyjątkiem promienia biegnącego wzdłuż osi soczewki, każdy promień przechodzący przez soczewkę ulega dwukrotnemu załamaniu na obu powierzchniach soczewki.

Jeżeli przy przejściu przez soczewkę promienie równoległe do osi soczewki zostają odchylone *w stronę tej osi* to soczewkę nazywamy *skupiającą* , a jeżeli odchylają się *od osi*, soczewka jest *rozpraszająca* . Soczewka skupiająca odchyła promienie równoległe w taki sposób, że są one skupiane w punkcie  $F$ , w odległości  $f$  od soczewki. Punkt  $F$  nosi nazwę *ogniska* , a odległość  $f$  nazywamy *ogniskową soczewki* .

Na rysunku 28.3 pokazany jest sposób wyznaczania położenia obrazu przedmiotu rozciągniętego (strzałki). W celu jego wyznaczenia rysujemy promień równoległy do osi

soczewki. Promień ten po przejściu przez soczewkę przechodzi przez ognisko  $F$ . Drugi promień przechodzi przez środek soczewki i nie zmienia swojego kierunku. Jeżeli obraz powstaje w wyniku przecięcia się tych promieni, to taki obraz nazywamy *rzeczywistym* (rysunek 28.4a). Natomiast gdy promienie po przejściu przez soczewkę są rozbieżne to obraz otrzymujemy z przecięcia się promieni przedłużonych i taki obraz nazywamy *pozornym* (rysunek 28.4 b).



Rys. 28.4. Powstawanie obrazu w soczewce skupiającej: a) rzeczywistego, b) pozornego

Bieg promienia świetlnego w soczewce zależy od kształtu soczewki tzn. od  $R_1$  i  $R_2$ , od współczynnika załamania  $n$  materiału z jakiego wykonano soczewkę oraz od współczynnika załamania  $n_o$  ośrodka, w którym umieszczono soczewkę. Ogniskowa soczewki jest dana równaniem

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n}{n_o} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (28.5)$$

Możesz prześledzić geometryczną metodę wyznaczania obrazu wytwarzanego przez soczewkę skupiającą i rozpraszającą korzystając z programu komputerowego „Soczewki”, dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.

Przy opisie soczewek przyjmujemy konwencję, że promienie krzywizn wypukłych powierzchni są wielkościami dodatnimi, a promienie krzywizn wklęsłych powierzchni są wielkościami ujemnymi; powierzchni płaskiej przypisujemy nieskończony promień krzywizny.


Gdy ogniskowa jest dodatnia  $f > 0$  to soczewka jest skupiająca, a gdy  $f < 0$  to soczewka jest rozpraszająca.

Odległość  $x$  przedmiotu od soczewki i odległość  $y$  obrazu od soczewki (rysunek 28.3) są powiązane równaniem dla *ciennych soczewek*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f} \quad (28.6)$$

a powiększenie liniowe obrazu jest dane wyrażeniem

$$P = \frac{h'}{h} = \left| \frac{y}{x} \right| \quad (28.7)$$

Przyjmuje się umowę, że odległości obrazów pozornych od soczewki są ujemne. Odwrotność ogniskowej soczewki  $D = 1/f$  nazywa się *zdolnością zbierającą soczewki* .





### Jednostki

Jednostką zdolności zbierającej soczewki jest *dioptria (D)*;  $1 \text{ D} = 1/\text{m}$ .

Dla układu blisko siebie leżących soczewek ich zdolności skupiające dodają się

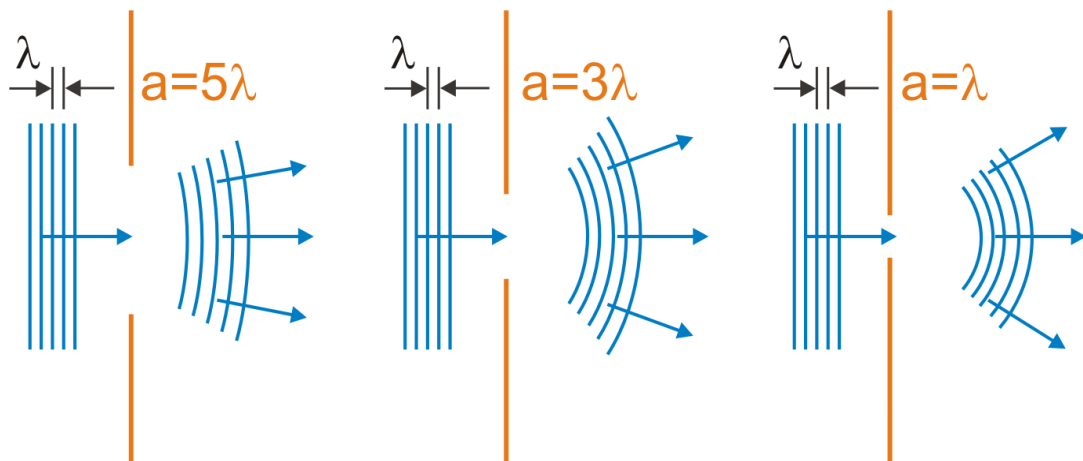
$$D = D_1 + D_2 \quad (28.8)$$

Wszystkie powyżej podane związki są prawdziwe dla cienkich soczewek i dla promieni przyosiowych.

Tymczasem dla soczewek w rzeczywistych układach optycznych mamy do czynienia z aberracjami to jest ze zjawiskami zniekształcającymi obrazy i pogarszającymi ich ostrość. Przykładem takiego zjawiska jest *aberracja sferyczna* . Polega ona na tym, że w miarę oddalania się od osi zwierciadła promienie zaczynają odchyłać się od ogniska. W ten sposób zamiast otrzymać obraz punktowy (jak dla promieni przyosiowych) otrzymujemy obraz rozciągnięty (plamkę). Inną wadą soczewek jest *aberracja chromatyczna* . Jest ona związana ze zjawiskiem dyspersji. Światło o różnych barwach (różnych częstotliwościach) ma różne prędkości, więc i różne współczynniki załamania w szkle, z którego zrobiono soczewkę. W konsekwencji różne barwy są różnie ogniskowane i obraz białego punktu jest barwny. Te jak i jeszcze inne wady soczewek można korygować stosując zestawy soczewek oraz wykonując soczewki o odpowiednich krzywiznach i z materiału o odpowiednim współczynniku załamania.

### 28.3 Warunki stosowalności optyki geometrycznej

Omawiając odbicie i załamanie fal zakładaliśmy, że energia świetlna rozprzestrzenia się wzdłuż linii prostych. Posługiwanie się pojęciem promienia świetlnego było przydatne do opisu tych zjawisk ale nie możemy się nim posłużyć przy opisie ugięcia światła. Żeby to sprawdzić prześledźmy zachowanie fali płaskiej padającej na szczeliny o różnej szerokości. To zachowanie jest przedstawione schematycznie na rysunku poniżej dla szczelin o szerokości  $a = 5\lambda$ ,  $a = 3\lambda$  oraz  $a = \lambda$ .



Rys. 28.5. Ugięcie fali na szczelinach o różnej szerokości

Widzimy, że światło padające na szczelinę *ulega ugięciu*. Wiązka staje się rozbieżna i nie możemy wydzielić z niej pojedynczego promienia metodą zmniejszania szerokości szczeliny tym bardziej, że ugięcie staje się coraz bardziej wyraźne gdy szczelina staje się coraz węższa ( $a/\lambda \rightarrow 0$ ). W tym zjawisku ujawnia się *falowa natura światła*. To ugięcie jest charakterystyczne dla wszystkich rodzajów fal. Dzięki temu możemy np. słyszeć rozmowę (fale głosowe) znajdując się za załomem muru. Ugięcie fal na szczelinie (albo na przeszkodzie) opisuje zasada Huygensa.

### 28.3.1 Zasada Huygensa

Huygens podał swoją teorię rozchodzenia się światła w XVII w., znacznie przed sformułowaniem teorii Maxwella. Nie znał więc elektromagnetycznego charakteru światła ale założył, że światło jest falą. Teoria Huygensa oparta jest na konstrukcji geometrycznej (zwanej zasadą Huygensa), która pozwala przewidzieć położenie czoła fali w dowolnej chwili w przyszłości, jeżeli znamy jego obecne położenie.

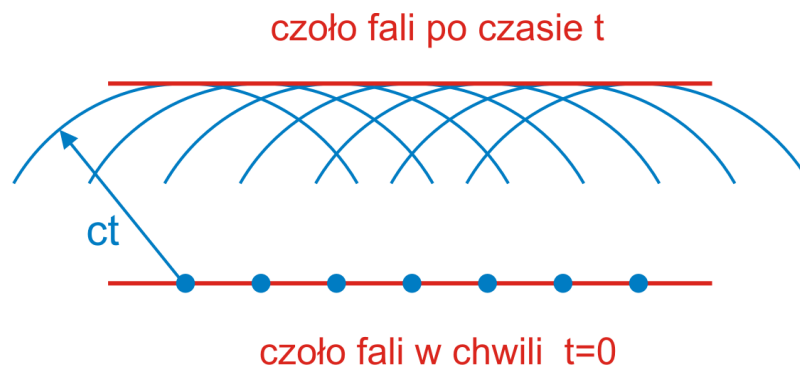


#### **Prawo, zasada, twierdzenie**

*Zasada Huygensa mówi, że wszystkie punkty czoła fali można uważać za źródła nowych fal kulistych. Położenie czoła fali po czasie  $t$  będzie dane przez powierzchnię styczną do tych fal kulistych.*

Jako przykład prześledźmy jak za pomocą elementarnych fal Huygensa można przedstawić rozchodzenie się fali płaskiej w próżni.

Na rysunku 28.6 widzimy czoło fali płaskiej rozchodzącej się w próżni. Fala na rysunku biegnie w górę. Zgodnie z zasadą Huygensa kilka dowolnie wybranych punktów na tej powierzchni traktujemy jako źródła fal kulistych. Ponieważ fala w próżni rozchodzi się z prędkością  $c$  to po czasie  $t$  promienie tych kul będą równe  $ct$ . Powierzchnia styczna do tych kul po czasie  $t$  jest nową powierzchnią falową. Oczywiście powierzchnia falowa fali płaskiej jest płaszczyzną rozchodzącą się z prędkością  $c$ .



Rys. 28.6. Elementarne fale Huygensa dają w wyniku falę płaską

Zauważmy, że w oparciu o tę zasadę można by oczekiwać, że fala Huygensa może się rozchodzić zarówno do tyłu jak i do przodu. Tę „niezgodność” modelu z obserwacją eliminuje się poprzez założenie, że natężenie fal kulistych Huygensa zmienia się w sposób ciągły od maksymalnego dla kierunku "do przodu" do zera dla kierunku "do tyłu”.

Metoda Huygensa daje się zastosować jakościowo do wszelkich zjawisk falowych. Można przedstawić za pomocą elementarnych fal Huygensa zarówno odbicie fal jak i ich załamanie. My zastosujemy je do wyjaśnienia ugięcia fal na szczeliny (lub przeszkodzie) pokazanych wcześniej na rysunku 28.5.

Rozpatrzmy czoło fali dochodzącej do szczeliny. Każdy jej punkt możemy potraktować jako źródło fal kulistych Huygensa. Jednak przez szczelinę przechodzi tylko część fal. Fale leżące poza brzegami szczeliny zostają wyeliminowane i nie dają fali płaskiej razem z falami przechodzącymi. Z tym właśnie związane jest uginanie wiązki.

Szczegóły dotyczące fal ugiętych zostaną przedstawione dokładnie w dalszych rozdziałach. Tutaj zwróćmy jedynie uwagę na to, że gdy szerokość szczeliny staje się duża w stosunku do długości fali  $a \gg \lambda$  to ugięcie można zaniedbać. Możemy przyjąć wówczas, że światło rozchodzi się po liniach prostych (zwanych promieniami) podlegających prawom odbicia i załamania. Mówimy, że stosujemy *optykę geometryczną* <sup>P</sup>. Warunkiem stosowalności optyki geometrycznej jest więc aby *wymiary liniowe wszystkich obiektów* (soczewek, pryzmatów, szczelin itp.) *były o wiele większe od długości fali*.

Jeżeli tak nie jest to nie możemy przy opisie światła posługiwać się promieniami, lecz trzeba wziąć pod uwagę *falowy charakter* światła. Widać jak znaczące jest ugięcie fali gdy szczelina ma rozmiar porównywalny z długością fali. Mówimy wtedy, że stosujemy *optykę falową* <sup>P</sup>. Optyka geometryczna jest szczególnym (granicznym) przypadkiem optyki falowej. W kolejnych rozdziałach zajmiemy się właśnie optyką falową.


## 29 Interferencja

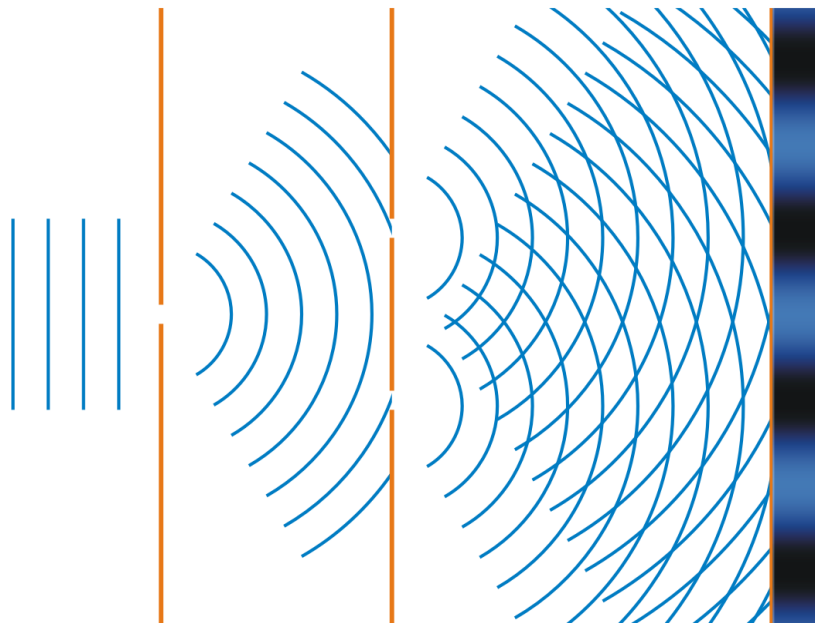
### 29.1 Doświadczenie Younga

W rozdziale dotyczącym fal w ośrodkach sprężystych omawialiśmy nakładanie się (interferencję) fal. Doświadczenie wykonane, przez Younga (w 1801 r.) wykazało istnienie takiej interferencji dla światła. Był to pierwszy eksperyment wskazujący na *falowy charakter światła*.

W swoim doświadczeniu, Young oświetlił światłem słonecznym ekran, w którym był zrobiony mały otwór  $S_0$ . Przechodzące światło padało następnie na drugi ekran z dwoma szczelinami  $S_1$  i  $S_2$  i dalej rozchodziły się dwie, nakładające się na siebie fale kuliste tak jak na rysunku 29.1.

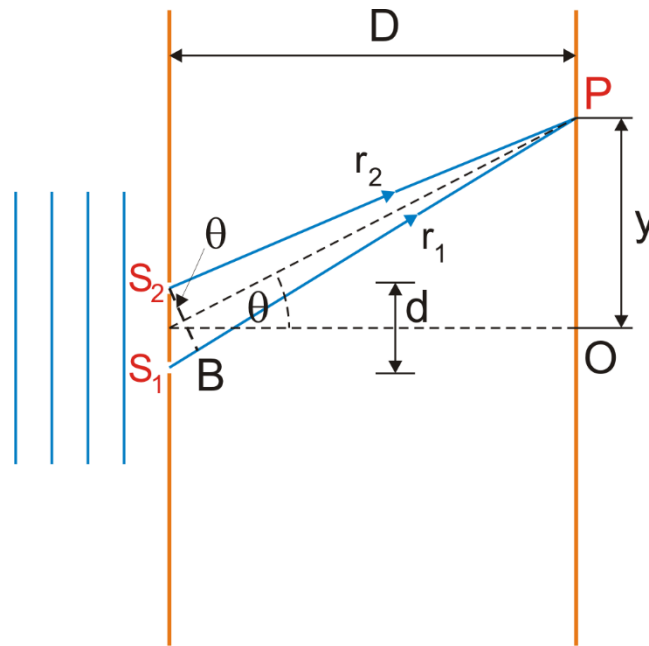
Warunki stosowalności optyki geometrycznej nie są spełnione i na szczelinach następuje *ugięcie fal*. Mamy do czynienia z optyką falową.

Jeżeli umieścimy ekran w jakimkolwiek miejscu, tak aby przecinał on nakładające się na siebie fale to możemy oczekiwać pojawienia się na nim miejsc ciemnych i jasnych następujących po sobie kolejno w zależności od wyniku nakładania się fal (rysunek 29.1). Miejsca ciemne powstają w wyniku wygaszania się interferujących fal, a jasne w wyniku ich wzajemnego wzmocnienia. Obserwujemy tak zwane *prążki interferencyjne*  (rysunek 29.1).



Rys. 29.1. Schemat doświadczenia Younga

Przeanalizujemy teraz doświadczenie Younga ilościowo. Zakładamy, że światło padające zawiera tylko jedną długość fali (jest monochromatyczne). Na rysunku 29.2 poniżej punkt  $P$  jest dowolnym punktem na ekranie, odległym o  $r_1$  i  $r_2$  od wąskich szczelin  $S_1$  i  $S_2$ .



Rys. 29.2. Interferencja, w punkcie  $P$ , fal wychodzących ze szczelin  $S_1$  i  $S_2$

Linia  $S_2B$  została poprowadzona tak, aby  $PS_2 = PB$ . Zwrócić uwagę, że dla przejrzystości na rysunku nie zachowano proporcji  $d/D$ . Naprawdę  $d \ll D$  i wtedy kąt  $S_1S_2B$  jest równy  $\theta$  z dużą dokładnością.

Oba promienie wychodzące ze szczelin  $S_1$  i  $S_2$  są zgodne w fazie, gdyż pochodzą z tego samego czoła fali płaskiej. Jednak drogi, po których docierają do punktu  $P$  są różne więc i ich fazy w punkcie  $P$  mogą być różne. Odcinki  $PB$  i  $PS_2$  są identyczne (tak to skonstruowaliśmy) więc o różnicy faz decyduje różnica dróg optycznych tj. odcinek  $S_1B$ .

Aby w punkcie  $P$  wystąpiło maksimum natężenia światła, odcinek  $S_1B$  musi zawierać całkowitą liczbę długości fal. Jest tak dlatego, że po przebyciu odcinka równego  $\lambda$  faza fali powtarza się więc po przebyciu drogi równej  $m\lambda$  ( $m$  - liczba całkowita) fala ma fazę taką jak na początku tej drogi. Odcinek  $S_1B$  nie wpływa na różnicę faz, a ponieważ fale były zgodne w źródle więc będą zgodne w fazie w punkcie  $P$ .

Warunek na maksimum możemy zatem zapisać w postaci

$$S_1B = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (29.1)$$

Zgodnie z rysunkiem 29.2,  $S_1B = d \sin \theta$  więc

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, \dots \text{ (maksima)} \quad (29.2)$$

Zauważmy, że każdemu maksimum powyżej środkowego punktu  $O$  odpowiada położone symetrycznie maksimum poniżej punktu  $O$ . Istnieje też centralne maksimum opisywane przez  $m = 0$ .

Dla uzyskania minimum natężenia światła w punkcie  $P$ , odcinek  $S_1B$  musi zawierać połówkową liczbę długości fal, to jest



$$S_1B = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (29.3)$$

czyli

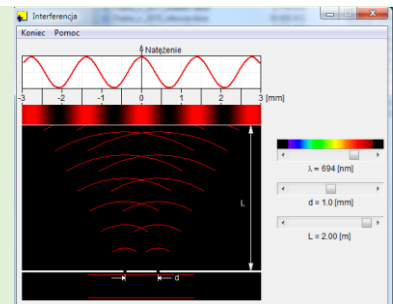
$$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 1, 2, \dots \text{ (minima)} \quad (29.4)$$

lub inaczej

$$d \sin \theta = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, \dots \text{ (minima)} \quad (29.5)$$



Możesz prześledzić wynik interferencji dwóch spójnych fal świetlnych powstałych w wyniku przejścia płaskiej fali świetlnej przez przesłonę z dwoma punktowymi szczelinami (doświadczenie Younga) korzystając z programu komputerowego „Interferencja” dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.



### Przykład

Jako przykład rozpatrzmy dwie szczeliny odległe od siebie o 1 mm, które oświetlono żółtym światłem sodu o długości  $\lambda = 589 \text{ nm}$ . Obliczymy odległość między sąsiednimi prążkami interferencyjnymi obserwowanymi na ekranie umieszczonym w odległości 1 m od szczelin. Najpierw sprawdzamy położenie katowe pierwszego maksimum. Dla  $m = 1$  ze wzoru (29.2) otrzymujemy

$$d \sin \theta = \lambda \quad (29.6)$$

skąd

$$\sin \theta = \lambda/d = \frac{589 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{10^{-3} \text{ m}} = 0.000589 \quad (29.7)$$

co daje  $\theta \approx 0.03^\circ$ .

Dla tak małych kątów dobrym przybliżeniem jest

$$\sin \theta \cong \text{tg } \theta \cong \theta \quad (29.8)$$

Z rysunku 29.2 wynika, że  $\text{tg } \theta = y/D$ . Podstawiając to wyrażenie zamiast  $\sin \theta$  do równania (29.2) na maksimum interferencyjne otrzymujemy dla  $m$ -tego prążka

$$y_m = m \frac{\lambda D}{d} \quad (29.9)$$

a dla następnego kolejnego

$$y_{m+1} = (m+1) \frac{\lambda D}{d} \quad (29.10)$$

Odległość między nimi wynosi

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda D}{d} = \frac{(589 \cdot 10^{-9} \text{ m})(1 \text{ m})}{10^{-3} \text{ m}} = 0.589 \text{ mm} \quad (29.11)$$

Jeżeli  $\theta$  jest małe to odległość między prążkami nie zależy od  $m$ , prążki są rozmieszczone na ekranie równomiernie. Jeżeli natomiast mamy fale o różnych długościach  $\lambda$  to powstaną oddzielne układy prążków (dla każdej z długości fal) o różnym odstępnie między prążkami.



### Ćwiczenie 29.1

Rozpatrzmy układ dwóch punktowych szczelin, odległych od siebie o 2 mm, oświetlony światłem białym. Oblicz jak oddalone od siebie są prążki odpowiadające pierwszemu maksimum dla światła czerwonego ( $\lambda = 700 \text{ nm}$ ) i fioletowego ( $\lambda = 400 \text{ nm}$ ) tj. skrajnych długości fal w widmie światła białego. Prążki są obserwowane na ekranie odległym o 1 m od szczeliny. Wynik zapisz poniżej.

$R_{sz} =$

$R_r =$


Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Równanie (29.2) opisujące położenie kątowne maksimum interferencyjnych może posłużyć do wyznaczenia długości fali

$$\lambda = \frac{d \sin \theta}{m} \quad (29.12)$$

Tak właśnie Young wyznaczył długości fal światła widzialnego.

## 29.2 Spójność (koherencja) fal świetlnych

Podstawowym warunkiem powstania dobrze określonego obrazu interferencyjnego jest, aby interferujące fale świetlne miały *dokładnie określoną różnicę faz  $\varphi$  stałą w czasie*. Przypomnijmy, że faza określa stan fali w danym miejscu i czasie. Przykładowo, jeżeli w jakimś miejscu na ekranie różnica faz interferujących fal wynosi  $\pi$  to oznacza fizycznie, że fale docierające tam wygaszają się (przy założeniu równych amplitud); mamy ciemny prążek. I tak jest przez cały czas o ile różnica faz nie zmieni się. Gdyby taka zmiana nastąpiła to w tym miejscu natężenie światła nie będzie już dłużej równe zero. Widzimy, że warunkiem stabilności obrazu jest *stałość w czasie różnicy faz* fal wychodzących ze źródeł  $S_1$  i  $S_2$ . Mówimy, że te źródła są *koherentne* czyli *spójne* .

Jeżeli szczeliny  $S_1$  i  $S_2$  zastąpimy przez dwa niezależne źródła fal (np. żarówki) to nie otrzymamy prążków interferencyjnych, ekran będzie oświetlony prawie równomiernie. Interpretujemy to w ten sposób, że różnica faz dla fal pochodzących z niezależnych źródeł zmienia się w czasie w sposób nieuporządkowany. W jednej chwili są spełnione warunki dla

maksimum za moment warunki pośrednie, a jeszcze za chwilę warunki dla minimum. I tak dla każdego punktu na ekranie *wypadkowe natężenie światła jest sumą natężeń od poszczególnych źródeł*. Mówimy, że te źródła są *niespójne, niekoherentne*.

Wynika z tego ważny wniosek, że

- Dla fal spójnych najpierw dodajemy amplitudy (uwzględniając stałą różnicę faz), a potem celem obliczenia natężenia podnosimy otrzymaną amplitudę wypadkową do kwadratu. (przypomnijmy sobie, że dla drgań harmonicznycych i fal energia  $\sim A^2$ ).
- Dla fal niespójnych najpierw podnosimy do kwadratu amplitudy, żeby obliczyć natężenia poszczególnych fal, a dopiero potem sumujemy te natężenia celem otrzymania natężenia wypadkowego.

Na zakończenie zapamiętajmy, że zwykłe źródła światła takie jak żarówki (żarzące się włókna) dają światło niespójne bo emitujące światło atomy działają zupełnie niezależnie. Natomiast współcześnie szeroko stosowanymi źródłami światła spójnego są lasery. Szczegóły dotyczące emisji światła przez lasery jak i zasada działania lasera są omówione w dalszych rozdziałach.

### 29.3 Natężenie światła w doświadczeniu Younga

W tym punkcie określimy ilościowo wypadkowe natężenie interferujących fal spójnych. Opisując interferencję fal elektromagnetycznych zajmiemy się wyłącznie opisem pola elektrycznego  $E$  tych fal ponieważ działanie pola  $B$  na detektory światła (w tym oko ludzkie) jest znikomo małe.

Założmy, że składowe pola elektrycznego obu fal w punkcie  $P$ , w którym rozpatrujemy wynik interferencji (rysunek 29.2) zmieniają się następująco

$$E_1 = E_0 \sin \omega t \quad (29.13)$$

oraz

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (29.14)$$

gdzie  $\omega = 2\pi\nu$  jest częstością kołową fal, a  $\varphi$  różnicą faz między nimi.

Zauważmy, że różnica faz w punkcie  $P$  zależy od położenia tego punktu na ekranie, a tym samym od kąta  $\theta$ . Przyjmijmy natomiast, że amplituda  $E_0$  nie zależy od kąta  $\theta$ . Jeżeli wektory  $E$  interferujących fal są do siebie równoległe to wypadkowe pole elektryczne w punkcie  $P$  obliczymy jako sumę algebraiczną poszczególnych zaburzeń

$$E = E_1 + E_2 \quad (29.15)$$

Podstawiając równania obu fal obliczamy pole wypadkowe

$$E = E_0 \sin \omega t + E_0 \sin(\omega t + \varphi) = 2E_0 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \left( \omega t + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (29.16)$$

lub

$$E = E_\theta \sin(\omega t + \beta) \quad (29.17)$$

gdzie  $\beta = \varphi/2$  oraz  $E_\theta = 2E_0\cos\beta = E_m\cos\beta$ .

Energia drgań harmoniczných jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy więc natężenie fali wypadkowej

$$I_\theta \sim E_\theta^2 \quad (29.18)$$

Obliczmy teraz stosunek natężeń fali wypadkowej do fali pojedynczej

$$\frac{I_\theta}{I_0} = \left( \frac{E_\theta}{E_0} \right)^2 \quad (29.19)$$

czyli

$$I_\theta = 4I_0 \cos^2 \beta = I_m \cos^2 \beta \quad (29.20)$$

Zgodnie z tym wyrażeniem natężenie wypadkowe zmienia się od zera, dla punktów, w których różnica faz  $\varphi = 2\beta = \pi$ , do maksymalnego, dla punktów, w których różnica faz  $\varphi = 2\beta = 0$ .

Różnica faz wiąże się z różnicą dróg poprzez prostą relację

$$\frac{\text{różnica faz}}{2\pi} = \frac{\text{różnica dróg}}{\lambda} \quad (29.21)$$

czyli dla sytuacji pokazanej na rysunku 29.2

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{d \sin \theta}{\lambda} \quad (29.22)$$

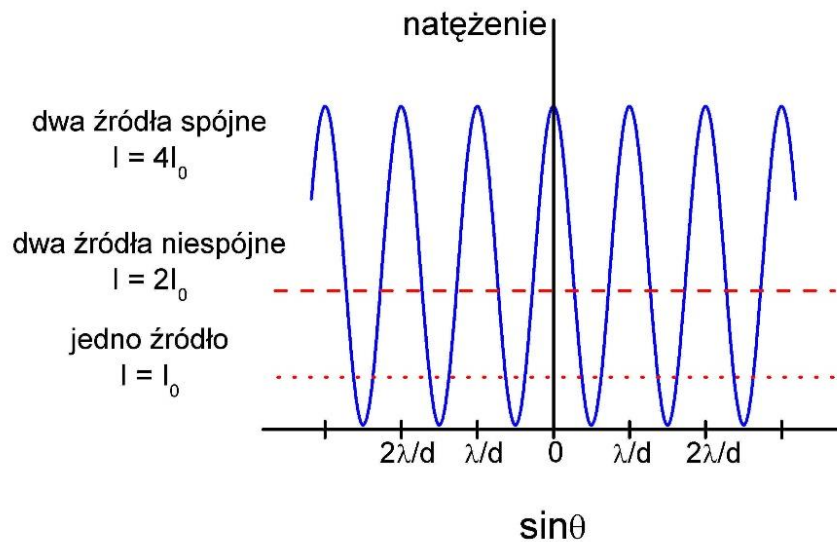
skąd

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (d \sin \theta) \quad (29.23)$$

oraz

$$\beta = \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \quad (29.24)$$

To równanie wyraża zależność przesunięcia fazowego, a tym samym i natężenia fali wypadkowej od kąta  $\theta$  (miejsca na ekranie). Poniżej, na rysunku 29.3 wykreślony został rozkład natężeń otrzymany w wyniku interferencji światła spójnego wychodzącego z dwóch szczelin w porównaniu z wynikiem dla źródeł niespójnych (równomierne oświetlenie ekranu) jak i dla pojedynczego źródła.

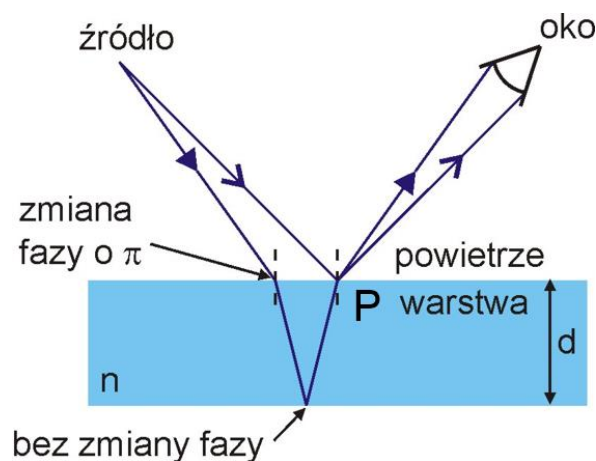


Rys. 29.3. Rozkład natężeń w obrazie interferencyjnym dwóch punktowych szczelin

Możesz prześledzić rozkład natężeń w obrazie interferencyjnym dwóch spójnych fal świetlnych powstałych w wyniku przejścia płaskiej fali świetlnej przez przesłonę z dwoma punktowymi szczelinami (doświadczenie Younga) korzystając z programu komputerowego „Interferencja” dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.

### 29.4 Interferencja w cienkich warstwach

Dobrze nam znane tęczęwe zabarwienie cienkich warstewek, np. baniek mydlanych czy plam oleju na wodzie jest wynikiem interferencji. Na rysunku 29.4 pokazana jest warstwa o grubości  $d$  i współczynniku załamania  $n$ .



Rys. 29.4. Interferencja światła w cienkiej warstwie

Warstwa jest oświetlona przez rozciągle źródło światła monochromatycznego. Dwa promienie wychodzące ze źródła docierają do oka po przejściu przez punkt  $P$ . Promienie te

przebiegają różne drogi gdyż jeden odbija się od górnej, a drugi od dolnej powierzchni błonki. To czy punkt  $P$  widzimy jako jasny czy ciemny zależy od wyniku interferencji fal w tym punkcie.

Fale te są spójne, bo pochodzą z tego samego punktu źródła światła. Jeżeli światło pada prawie prostopadle to geometryczna różnica dróg pomiędzy obu promieniami wynosi z dobrym przybliżeniem  $2d$ . Można by więc oczekiwać, że maksimum interferencyjne (punkt  $P$  jasny) wystąpi gdy odległość  $2d$  będzie całkowitą wielokrotnością długości fali. Tymczasem wynik doświadczenia jest inny. Dzieje się tak z dwóch powodów:

- Długość fali w warstwie  $\lambda_n$  jest różna od jej długości w powietrzu  $\lambda$

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} \quad (29.25)$$

- Okazuje się ponadto, że fala odbijając się od ośrodka optycznie gęstszego (o większym współczynniku załamania  $n$ ) *zmienia swoją fazę o  $\pi$* . Natomiast gdy odbicie zachodzi od powierzchni ośrodka rzadszego optycznie fala odbija się *bez zmiany fazy*. Oznacza to, że promień odbity od górnej powierzchni błonki zmienia fazę, a promień odbity od dolnej granicy nie. Dlatego musimy rozważać drogi optyczne, a nie geometryczne.

Chcemy teraz uwzględnić oba czynniki to jest różnice dróg optycznych oraz zmiany fazy przy odbiciu. Dla dwóch promieni pokazanych na rysunku 29.4 warunek na maksimum ma więc postać

$$2d = m\lambda_n + \frac{\lambda_n}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (29.26)$$

Czynnik  $\lambda_n/2$  opisuje zmianę fazy przy odbiciu (od górnej powierzchni) bo zmiana fazy o  $180^\circ$  ( $\pi$ ) jest równoważna, zgodnie z równaniem (29.21), różnicy dróg równej połowie długości fali. Ponieważ  $\lambda_n = \lambda/n$  otrzymujemy ostatecznie

$$2dn = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots (\text{maksima}) \quad (29.27)$$

Analogiczny warunek na minimum ma postać

$$2dn = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots (\text{minima}) \quad (29.28)$$



### Ćwiczenie 29.2


Rozpatrzmy teraz bańkę mydlaną ( $n = 1.33$ ) o grubości 320 nm znajdująca się w powietrzu. Napisz poniżej, jaki kolor ma światło odbite, gdy bańka jest oświetlona światłem białym padającym prostopadle do jej powierzchni?

Wskazówka: Sprawdź dla jakiej długości fali z zakresu widzialnego (400 ÷ 700 nm) spełniony jest warunek maksimum interferencyjnego.

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.


## 30 Dyfrakcja


### 30.1 Wstęp

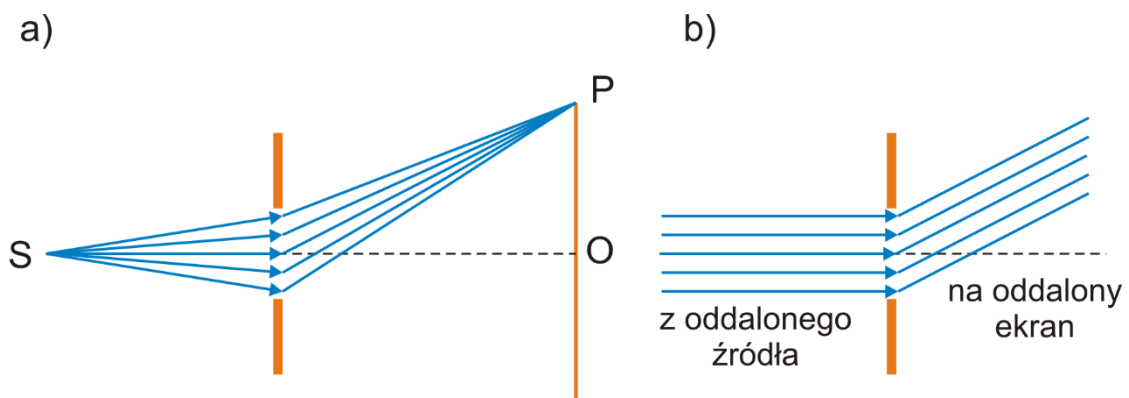
W doświadczeniu Younga i doświadczeniu z siatką dyfrakcyjną mamy do czynienia z interferencją fal ugiętych na dwóch i wielu szczelinach (przeszkodach). Doświadczenia te stanowią więc dowód nie tylko interferencji, ale także *dyfrakcji* czyli *ugięcia światła* . O zjawisku ugięcia promieni świetlnych przechodzących w pobliżu przeszkody (np. brzeg szczeliny) mówiliśmy już w poprzednim rozdziale podając jakościowe wyjaśnienie tego zjawiska w oparciu o zasadę Huygensa.

Na rysunku 30.1a pokazano na czym polega dyfrakcja. Fala ze źródła  $S$  przechodzi przez otwór w przesłonie i pada na ekran. Natężenie w punkcie  $P$  na ekranie można obliczyć dodając do siebie wszystkie zaburzenia falowe (wektory pola elektrycznego  $E$ ) docierające z różnych punktów szczeliny. Nie jest to łatwe bo te elementarne fale mają różne amplitudy i fazy. Wynika to z tego że:

- Elementarne źródła Huygensa (punkty w szczelinie) są w różnych odległościach od punktu  $P$  na ekranie.
- Światło opuszcza te punkty pod różnymi kątami.

Taka sytuacja, gdy fale opuszczające otwór nie są płaskie, (promienie nie są równoległe) pojawia się gdy źródło fal i ekran, na którym powstaje obraz znajdują się w skończonej odległości od przesłony ze szczeliną. Taki przypadek nosi nazwę *dyfrakcji Fresnela* .

Całość upraszcza się, gdy źródło  $S$  i ekran odsuniemy na bardzo duże odległości od otworu uginającego. Ten graniczny przypadek nazywamy *dyfrakcją Fraunhofera* . Czoła fal padających jak i ugiętych są płaszczyznami (promienie są równoległe) tak jak na rysunku 30.1b.



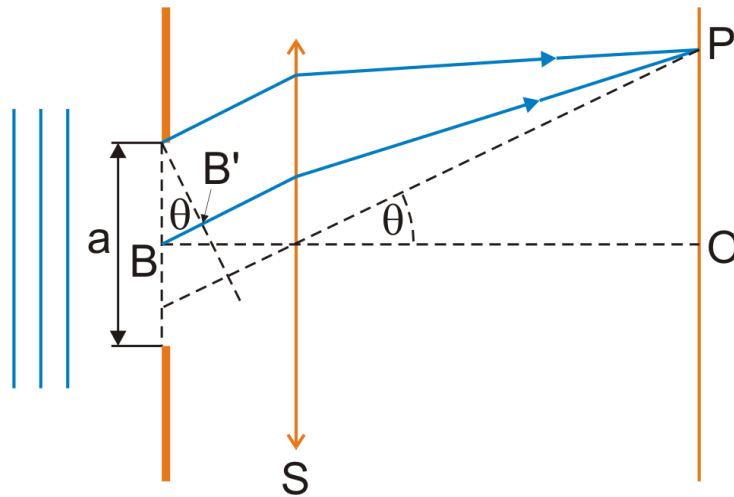
Rys. 30.1. Dyfrakcja Fresnela (a) i dyfrakcja Fraunhofera (b)

Dyfrakcję Fraunhofera można zrealizować w laboratorium za pomocą dwu soczewek skupiających. Pierwsza soczewka zmienia falę rozbieżną w równoległą, a druga skupia, w punkcie  $P$ , fale płaskie opuszczające otwór w przesłonie. W dalszej części będziemy zajmować się tylko dyfrakcją Fraunhofera.

### 30.2 Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie

Rozpatrzmy falę płaską padającą prostopadle na szczelinę tak jak na rysunku 30.2. Zaczniemy od najprostszego przypadku tj. rozpatrzenia punktu środkowego  $O$  na ekranie. W tym punkcie są skupiane przez soczewkę  $S$  równoległe promienie wychodzące ze szczeliny. Te równoległe promienie przebywają do tego punktu te same drogi optyczne (choć różne geometryczne) tzn. promienie zawierają tę samą ilość długości fal. Ponieważ w szczelinie promienie są zgodne w fazie to po przebyciu takich samych dróg optycznych nadal pozostają zgodne w fazie. Dlatego w środkowym punkcie  $O$  będziemy obserwować maksimum.

Rozpatrzmy teraz inny punkt  $P$  na ekranie pokazany na rysunku 30.2. Promienie docierające do  $P$  wychodzą ze szczeliny o szerokości  $a$  pod kątem  $\theta$ . Jeden promień ma początek u góry szczeliny, a drugi w jej środku. Dodatkowo pokazany jest (linią przerywaną) promień przechodzący przez środek soczewki. Promień ten nie jest odchylany i dlatego określa kąt  $\theta$ .



Rys. 30.2. Powstawanie obrazu dyfrakcyjnego (dyfrakcja Fraunhofera)

Jeżeli wybierzemy punkt  $P$  tak, żeby różnica dróg  $BB'$  wynosiła  $\lambda/2$  to promienie, które mają zgodne fazy w szczelinie będą miały w punkcie  $P$  fazy przeciwne i wygaszą się. Podobnie każdy inny promień wychodzący z górnej połowy szczeliny będzie się wygaszał z odpowiednim promieniem z dolnej połowy leżącym w odległości  $a/2$  poniżej. Punkt  $P$  będzie miał natężenie zerowe (pierwsze minimum dyfrakcyjne). Warunek opisujący to minimum ma następującą postać

$$\frac{1}{2} a \sin \theta = \frac{1}{2} \lambda \quad (30.1)$$

Zauważmy, że gdyby szerokość szczeliny była równa  $\lambda$  wtedy pierwsze minimum pojawiłoby się dla  $\theta = 90^\circ$  czyli środkowe maksimum wypełniłoby cały ekran.

Podobne rozważania możemy powtórzyć dla wielu punktów szczeliny i otrzymamy ogólne wyrażenie dla minimów obrazu dyfrakcyjnego w postaci

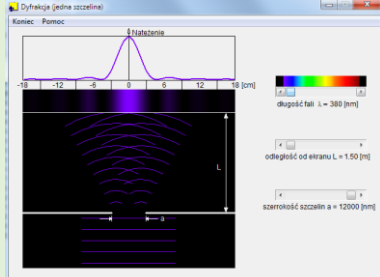
$$a \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, \dots \text{ (minima)} \quad (30.2)$$



Mniej więcej w połowie między każdą parą sąsiednich minimów występują oczywiście maksima natężenia określone przez warunek

$$a \sin \theta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, \dots \text{ (maksima)} \quad (30.3)$$

Możesz prześledzić wynik dyfrakcji fali płaskiej na pojedynczej szczelinie korzystając z programu komputerowego „Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie” dostępnego na stronie WWW autora i na stronie OpenAGH.

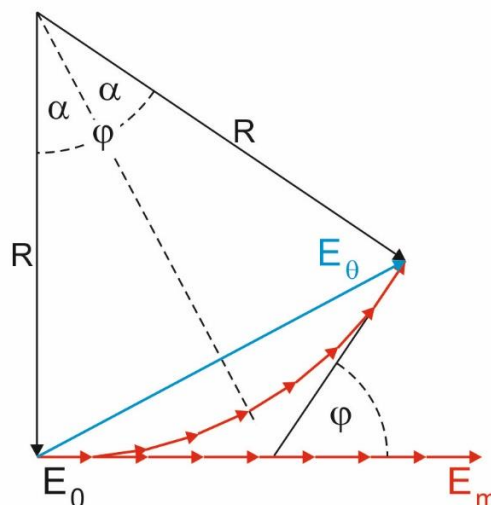


### 30.3 Natężenie światła w obrazie dyfrakcyjnym

Chcemy teraz znaleźć wyrażenie na rozkład natężenia na całym ekranie w funkcji kąta  $\theta$ . Szczelinę dzielimy na  $N$  odcinków i każdy z nich traktujemy jak źródło zaburzenia falowego. Zakładamy, że dla małych kątów  $\theta$  zaburzenia falowe docierające do punktu  $P$  z różnych miejsc szczeliny mają jednakowe amplitudy  $E_0$ . Wtedy w punkcie  $P$  dodaje się  $N$  wektorów natężenia pola elektrycznego  $\mathbf{E}$  o tej samej amplitudzie  $E_0$  i tej samej częstotliwości. Różnica faz między falami pochodzącymi z sąsiednich odcinków szczeliny wynosi  $\varphi$ . Szukamy zatem zaburzenia wypadkowego dla różnych punktów  $P$ , to jest dla różnych kątów  $\theta$ , co równocześnie odpowiada różnym wartościom  $\varphi$ .

Skorzystamy tu z graficznej metody dodawania amplitud zaburzeń falowych. W tej metodzie każdej fali odpowiada wektor (nazywany wskazem), którego długość reprezentuje amplitudę fali, a kąt względem osi  $x$  fazę. Amplitudę wypadkową fali znajdujemy jako sumę wektorów amplitud (wskazów) uwzględniając tym samym amplitudy fal składowych jak i różnice faz między falami.

Na rysunku 30.3 poniżej jest przedstawiona konstrukcja geometryczna, za pomocą której obliczymy natężenie światła w przypadku dyfrakcji na jednej szczelinie.



Rys. 30.3. Graficzne dodawanie wektorów amplitud w przypadku dyfrakcji na jednej szczelinie

Łuk okręgu jest utworzony z wektorów amplitud fal pochodzących z  $N$  elementarnych źródeł w szczelinie. Długość łuku wynosi  $E_m$  czyli jest równa maksymalnej amplitudzie w środku obrazu dyfrakcyjnego (linia prosta strzałek). Kąt  $\varphi$  w dolnej części rysunku przedstawia różnicę fazy między skrajnymi wektorami w łuku to znaczy  $\varphi$  jest różnicą faz pomiędzy promieniami wychodzącymi z góry i dołu szczeliny.

Z rysunku 30.3 widać, że zachodzi związek

$$\frac{E_\theta}{R} = \sin \frac{\varphi}{2} \quad (30.4)$$

skąd

$$E_\theta = 2R \sin \frac{\varphi}{2} \quad (30.5)$$

W mierze łukowej kąt  $\varphi = E_m/R$  więc

$$R = \frac{E_m}{\varphi} \quad (30.6)$$

Podstawiając tę zależność do równania (30.5) otrzymujemy

$$E_\theta = \frac{E_m}{\frac{\varphi}{2}} \sin \frac{\varphi}{2} \quad (30.7)$$

lub

$$E_\theta = \frac{E_m}{\alpha} \sin \alpha \quad (30.8)$$

gdzie  $\alpha = \varphi/2$ .

Wektory na rysunku 30.3 odpowiadają amplitudom pola elektrycznego. Żeby otrzymać natężenie światła trzeba amplitudy podnieść do kwadratu, więc na podstawie równania (30.8) otrzymujemy

$$I_\theta = I_m \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \quad (30.9)$$

Jak widzimy, w przeciwieństwie do obrazu interferencyjnego, natężenia kolejnych maksimów dyfrakcyjnych *nie są jednakowe*.

Ponieważ  $\varphi$  jest różnicą faz dla promieni wychodzących z brzegów szczeliny o szerokości  $a$ , więc różnica dróg jakie przebywają te promienie do punktu  $P$  wynosi  $a \sin \theta$ . Korzystając z relacji

$$\frac{\text{różnica faz}}{2\pi} = \frac{\text{różnica dróg}}{\lambda} \quad (30.10)$$

otrzymujemy

$$\alpha = \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \quad (30.11)$$

Łącząc równania (30.9) i (30.12) możemy obliczyć natężenie światła dla obrazu dyfrakcyjnego otrzymanego dla pojedynczej szczeliny. Widzimy, że natężenie  $I_\theta$  przyjmuje wartości minimalne dla

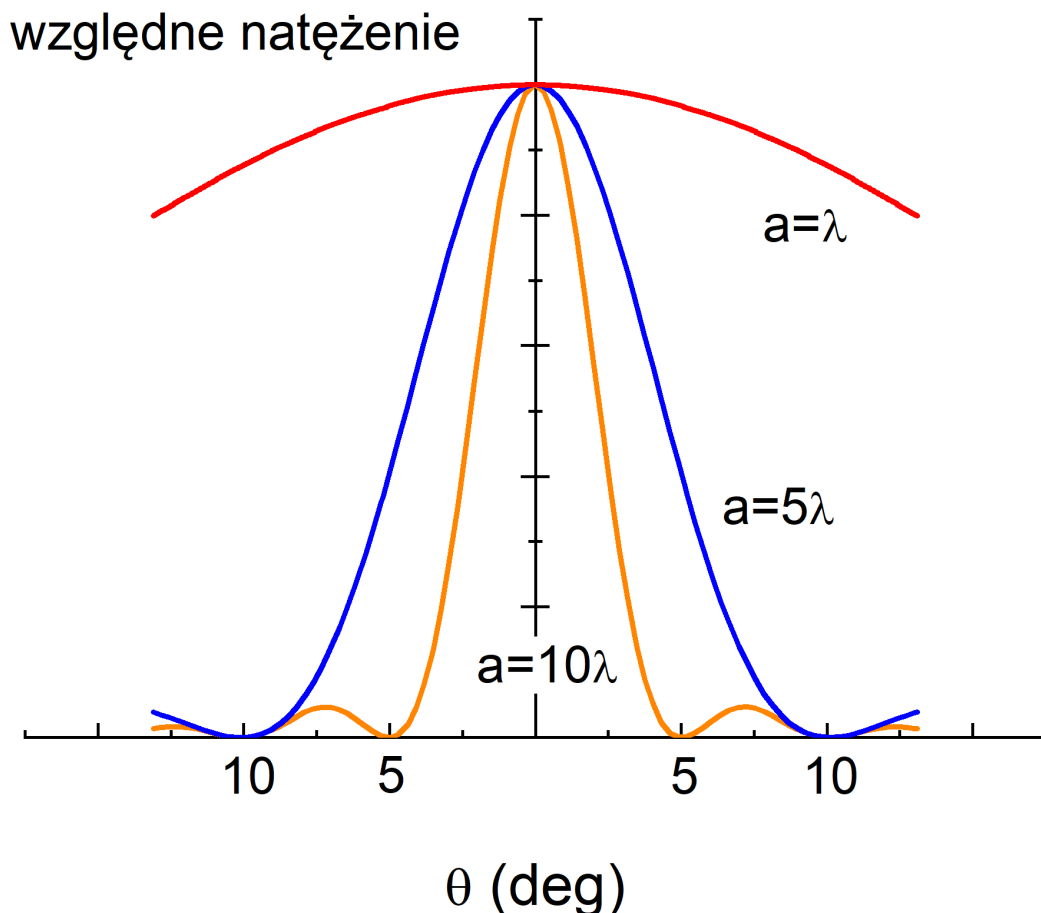
$$\alpha = m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (30.12)$$

Podstawiając tę zależność do równania (30.11) otrzymujemy wynik zgodny z uzyskaną poprzednio zależnością (30.2).

Podobnie jest z wartościami maksymalnymi natężenia, które otrzymujemy dla

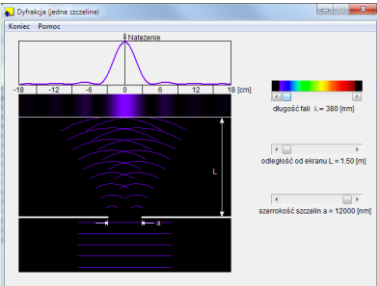
$$\alpha = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (30.13)$$

Na rysunku 30.4 poniżej przedstawiono rozkład natężenia światła (krzywe  $I_\theta$ ) w funkcji położenia na ekranie (kąta  $\theta$ ) dla różnych szerokości szczeliny (w stosunku do długości fali  $\lambda$ ).



Rys. 30.4. Natężenie światła w obrazie dyfrakcyjnym pojedynczej szczeliny

Możesz prześledzić rozkład natężenia światła dla obrazu dyfrakcyjnego otrzymanego dla pojedynczej szczeliny. korzystając z programu komputerowego „Dyfrakcja na pojedynczej szczeliny” dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.




### Ćwiczenie 30.1

Jak widzieliśmy na rysunku 30.4 natężenia kolejnych maksimum w obrazie dyfrakcyjnym nie są jednakowe. Oblicz stosunek natężeń trzech kolejnych maksimum do natężenia maksimum środkowego w obrazie dyfrakcyjnym dla pojedynczej szczeliny. Wynik zapisz poniżej. Wskazówka: Skorzystaj z warunku na maksimum (dla  $m = 1, 2, 3$ ) i wyrażenia (30.9) na natężenie światła.

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$I_{\theta}/I_m$			

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

### 30.4 Interferencja i dyfrakcja na dwóch szczelinach

W doświadczeniu Younga przyjmowaliśmy, że szczeliny są punktowe tj.  $a \ll \lambda$ . W wyniku interferencji fal spójnych ugiętych na takich szczelinach otrzymywaliśmy prążki interferencyjne o jednakowym natężeniu. Dla realnych szczelin trudno jest zrealizować warunek  $a \ll \lambda$ . Oznacza to, że pojedyncza szczelina będzie dawała obraz dyfrakcyjny i w wyniku interferencji fal z dwóch szczelin otrzymamy obraz, w którym natężenia prążków nie będą stałe (jak w doświadczeniu Younga) ale zależne od tego obrazu dyfrakcyjnego. Przypomnijmy, że natężenie światła w obrazie interferencyjnym dla dwóch punktowych szczelin dane jest wyrażeniem

$$I_{\theta,\text{int}} = I_{m,\text{int}} \cos^2 \beta \quad (30.14)$$

oraz

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \quad (30.15)$$

gdzie  $d$  jest odległością między szczelinami.

Natomiast natężenie fali ugiętej na szczeliny jest dane równaniem

$$I_{\theta,\text{dyf}} = I_{m,\text{dyf}} \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \quad (30.16)$$

oraz

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \quad (30.17)$$

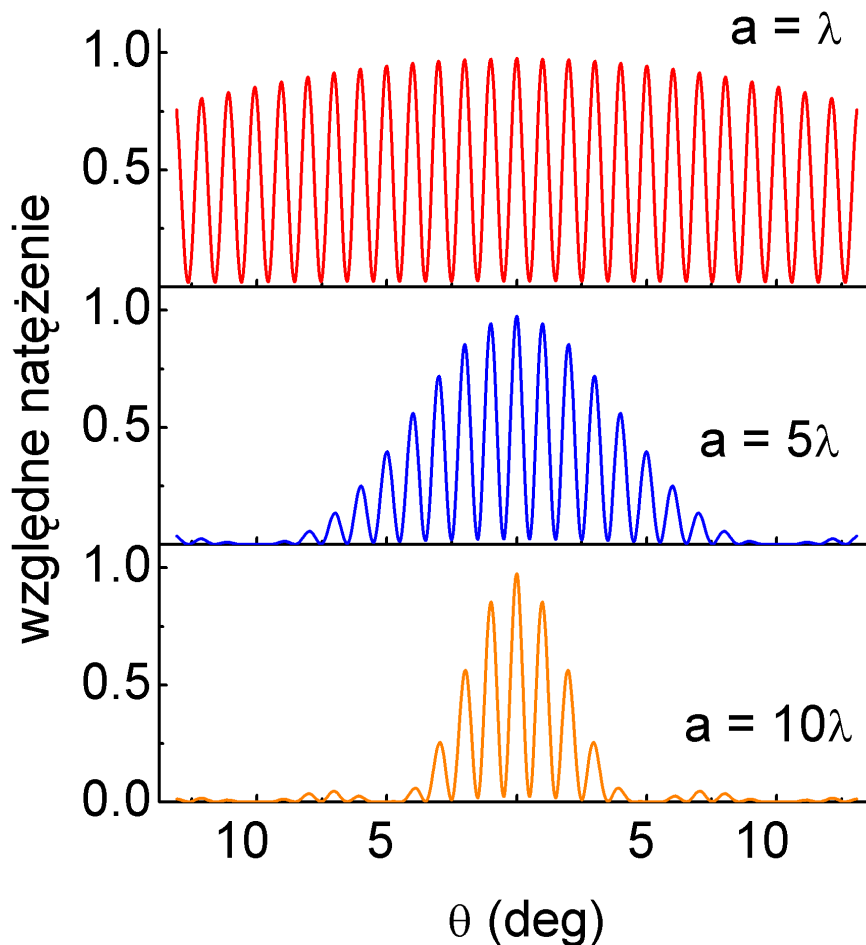
gdzie  $a$  jest szerokością szczeliny.

Teraz chcemy otrzymać łączny efekt. Dlatego w równaniu (30.14) stałą amplitudę obrazu interferencyjnego (dla wąskich szczelin) zastępujemy realnym natężeniem dyfrakcyjnym (30.16). Otrzymujemy

$$I_{\theta} = I_m (\cos \beta)^2 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \quad (30.18)$$

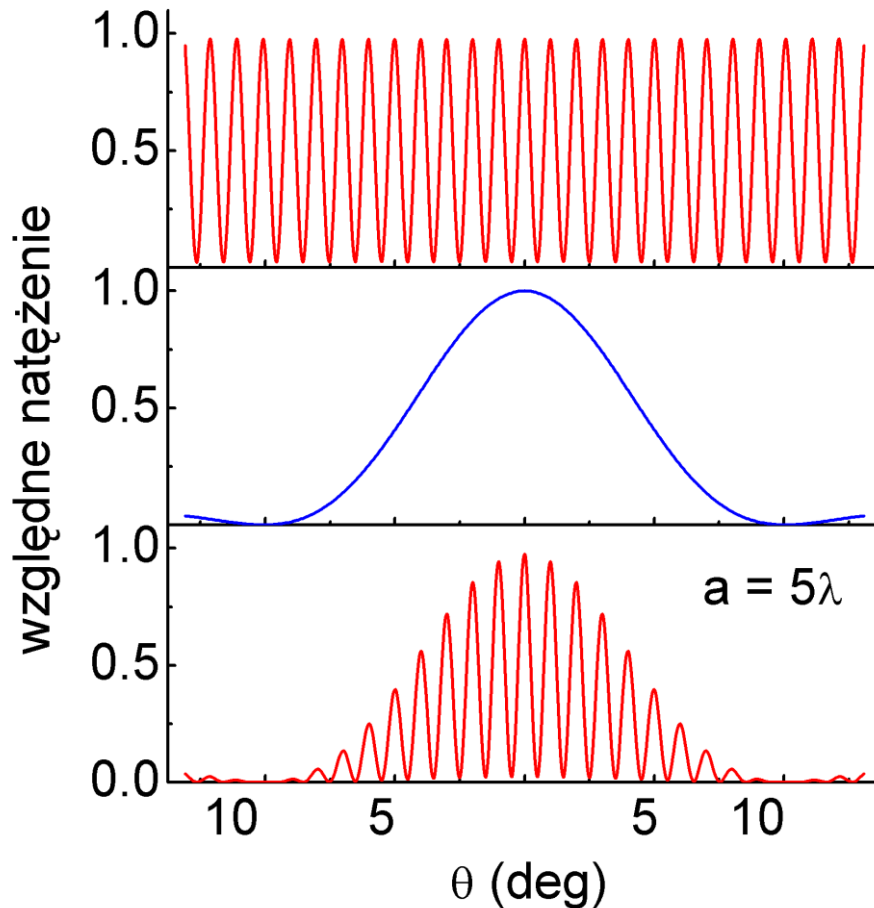
Ten wynik opisuje następujące fakty. W danym punkcie na ekranie natężenie światła, z każdej szczeliny osobno, jest dane przez obraz dyfrakcyjny tej szczeliny. Obrazy dyfrakcyjne dwóch szczelin rozpatrywanych oddzielnie nakładają się, fale interferują.

Na rysunku 30.5 pokazany jest ten wynik dla  $d = 50\lambda$  i trzech wartości stosunku  $a/\lambda$ . Widzimy, że im szersze szczeliny tym wpływ dyfrakcji jest silniejszy (natężenia prążków są bardziej zmienione). Uzyskany obraz jest zgodnie z równaniem (30.18) iloczynem czynnika interferencyjnego i dyfrakcyjnego.



Rys. 30.5. Prążki interferencyjne dla dwóch szczelin o skończonej szerokości

To nakładanie się czynnika interferencyjnego i dyfrakcyjnego jest jeszcze lepiej widoczne na rysunku 30.6. Czynniki interferencyjny  $\sim \cos^2\beta$  jest pokazany na górnym wykresie, czynnik dyfrakcyjny  $\sim (\sin\alpha/\alpha)^2$  na środkowym, a ich iloczyn na dolnym. Widzimy, że obwiednie prążków interferencyjnych pokrywają się dokładnie z obrazem dyfrakcyjnym.



Rys. 30.6. Obraz interferencyjny dwóch punktowych szczelin, obraz dyfrakcyjny pojedynczej szczeliny i ich iloczyn

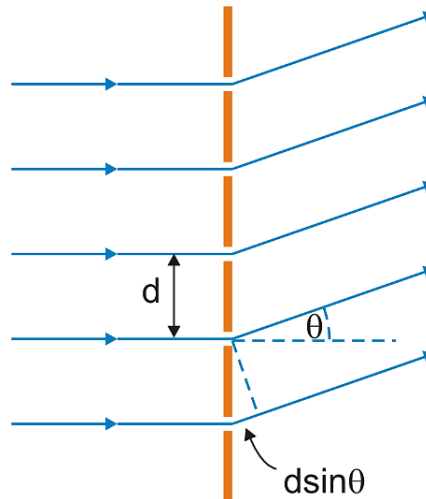
Możesz prześledzić wynik interferencji dla dwóch szczelin o skończonej szerokości korzystając z programu komputerowego „Dyfrakcja na dwóch szczelinach” dostępnego na stronie WWW autora na stronie Open AGH.

### 30.5 Interferencja fal z wielu źródeł, siatka dyfrakcyjna

Równanie (29.2) opisujące położenie kątowe maksimów interferencyjnych w doświadczeniu Younga z *dwoma punktowymi szczelinami* może posłużyć do wyznaczenia długości fali światła monochromatycznego. W praktyce jest to jednak trudne, bo ze względu

na małe natężenia światła nie można w sposób dokładny wyznaczyć położenia maksimów interferencyjnych. Dlatego do wyznaczenia długości fali świetlnej stosuje się układ *wielu równoległych do siebie szczelin* czyli *siatkę dyfrakcyjną*.

Na rysunku 30.7 pokazany jest układ  $N$  szczelin odległych od siebie o  $d$ . Odległość  $d$  nazywamy *stałą siatki dyfrakcyjnej*  $\text{P}$ .



Rys. 30.7. Siatka dyfrakcyjna

Obraz powstały przy oświetleniu siatki dyfrakcyjnej składa się z serii prążków interferencyjnych podobnie jak dla dwóch szczelin. Na rysunku 30.8 poniżej, rozkład natężeń dla  $N = 5$  szczelin jest porównany z wynikiem uzyskanym w doświadczeniu Younga dla dwóch szczelin.

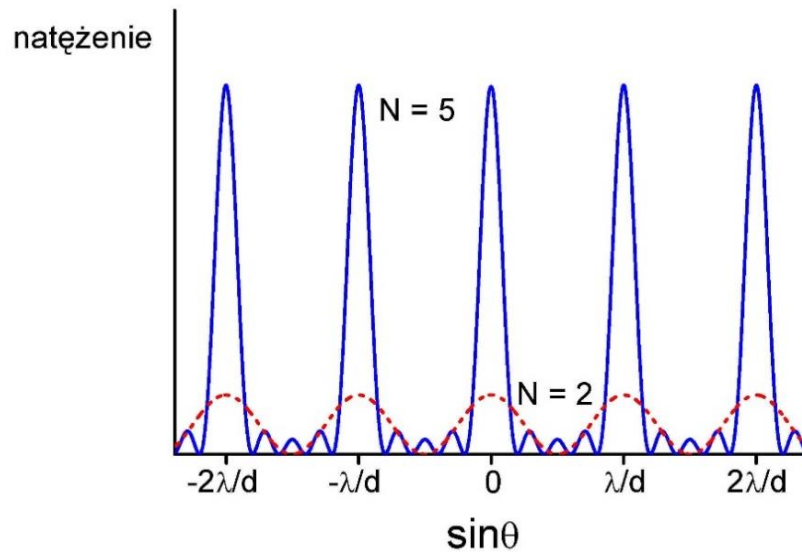
Z tego porównania wynika, że nie zmienia się odległości pomiędzy głównymi maksimami (przy zachowaniu odległości między szczelinami  $d$  i długości fali  $\lambda$ ). Położenia maksimów głównych nie zależą więc od  $N$ . Nastąpił natomiast bardzo wyraźny *wzrost natężenia maksimów głównych*, ich zwężenie oraz pojawiły się wtórne maksima pomiędzy nimi.

Maksima główne występują gdy różnica dróg optycznych promieni wychodzących z sąsiednich szczelin (rysunek 30.7) zawiera całkowitą liczbę długości fal  $\lambda$  czyli gdy spełniony jest warunek

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, \dots \text{ (główne maksima)} \quad (30.19)$$

Wzór ten jest identyczny jak równanie (29.2) opisujące położenie kątowe maksimów interferencyjnych dla dwóch szczelin. Tym razem jednak ściśle określenie położenia maksimów interferencyjnych jest łatwiejsze ze względu na ich większe natężenie i mniejszą szerokość.

W miarę wzrostu liczby szczelin siatki maksima główne stają się coraz węższe, a maksima wtórne zanikają i dlatego w praktyce stosuje się siatki dyfrakcyjne zawierające nawet kilka tysięcy szczelin, w których odległość między szczelinami jest rzędu tysięcznych części milimetra. Natężenie maksimów głównych ma wartość  $I = I_0 N^2$  czyli  $N^2$  razy większe niż dla pojedynczego źródła.

Rys. 30.8. Rozkład natężenia światła uzyskany dla siatki dyfrakcyjnej o  $N = 5$  szczelinach**Przykład**

Jako przykład rozpatrzmy siatkę dyfrakcyjną, która ma 4000 nacięć na 1 cm. Pada na nią prostopadle światło żółte z lampy sodowej (stosowanej w oświetleniu ulic). W świetle tym występują dwie fale o długościach 589.00 i 589.59 nm. Obliczmy odległość kątową pomiędzy maksimum pierwszego rzędu dla tych linii.

Położenie kątowe maksimum pierwszego rzędu otrzymujemy z warunku (29.29) dla  $m = 1$

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{d} \quad (30.20)$$

gdzie stała siatki dyfrakcyjnej  $d = 1\text{cm}/4000 = 2.5 \mu\text{m}$ .

Wykonujemy teraz obliczenia kąta  $\theta$  kolejno dla obu długości fal, a następnie obliczamy ich różnicę. Otrzymujemy kolejno  $\theta = 13.6270^\circ$  (dla  $\lambda = 589.00 \text{ nm}$ ) i  $\theta = 13.6409^\circ$  (dla  $\lambda = 589.59 \text{ nm}$ ). Stąd

$$\Delta\theta = 0.0139^\circ$$

**Ćwiczenie 30.2**

Oceń czy ta odległość kątowa jest wystarczająca, żeby rozróżnić te dwie linie na ekranie odległym o  $D = 1 \text{ m}$  od siatki? W jakiej odległości  $D'$  trzeba ustawić ekran, żeby odległość między tymi prążkami wyniosła  $\Delta y' = 1\text{mm}$ ? Wynik zapisz poniżej.


Wskazówka: Położenie  $y$  linii na ekranie możemy obliczyć ze związku  $\text{tg}\theta = y/D$ .

$\Delta y =$

$D' =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.



Możliwość rozróżnienia maksimum obrazów dyfrakcyjnych dla dwóch fal o niewiele różniących się długościach decyduje o jakości siatki dyfrakcyjnej. Mówimy, że siatka powinna mieć dużą *zdolność rozdzielczą* , którą definiujemy jako




### Definicja

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

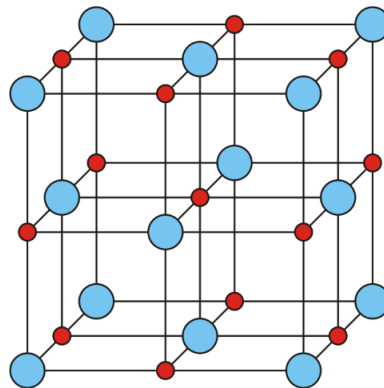
(30.21)

gdzie  $\lambda$  jest średnią długością fali dwóch linii ledwie rozróżnialnych, a  $\Delta\lambda$  różnicą długości fal między nimi. Widać, że im mniejsza  $\Delta\lambda$  tym lepsza zdolność rozdzielcza.

## 30.6 Dyfrakcja promieni Roentgena (promieni X)


W krystalicznych ciałach stałych atomy ułożone są w przestrzeni w sposób regularny tworząc tzw. sieć krystaliczną. Na rysunku 30.9 pokazane jest rozmieszczenie atomów w kryształ NaCl. Małe kule przedstawiają atomy (jony) sodu, a duże jony chloru. Na rysunku pokazana jest tzw. *komórka elementarna* . Jest to najmniejsza jednostka (cegiełka), z której można zbudować kryształ.

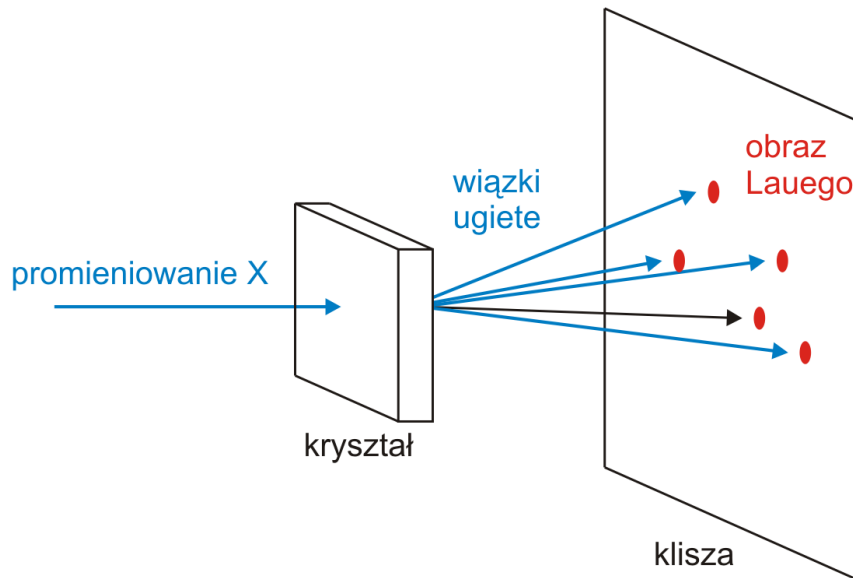
Takie ułożenie atomów w powtarzający się regularny wzór powoduje, że krystaliczne ciało stałe stanowi naturalny, trójwymiarowy układ szczelin (przeszkód) czyli trójwymiarową siatkę dyfrakcyjną.



Rys. 30.9. Rozmieszczenie jonów w komórce elementarnej NaCl

Jednak w tym przypadku światło widzialne jest bezużyteczne bo długość jego fal jest dużo większa od odległości między atomami  $\lambda \gg a$ . Przykładowo, światło żółte ma długość równą 589 nm, a odległość między najbliższymi atomami w kryształ NaCl wynosi  $a \approx 0.281$  nm.

Musimy więc posłużyć się promieniowaniem X (promieniowanie rentgenowskie). Więcej o promieniowaniu rentgenowskim dowiemy się w dalszych rozdziałach, teraz zapamiętajmy jedynie, że jest to promieniowanie elektromagnetyczne o długościach fal rzędu 0.1 nm, to jest tego samego rzędu co odległości międzyatomowe w kryształach. Na rysunku 30.8 poniżej pokazana jest wiązka promieni X padająca na kryształ. Wiązki fal ugiętych na atomach padają na kliszę tworząc na niej w wyniku interferencji charakterystyczny obraz (układ punktów) zwany od nazwiska niemieckiego fizyka odkrywcy tej metody *obrazem Lauego* .



Rys. 30.10. Ugięcie wiązki promieni X na kryształe

Natężenia linii w obrazie dyfrakcyjnym zależą od geometrii pojedynczej szczeliny. W idealnym przypadku zależą od szerokości szczeliny. Tak samo natężenia wiązek rozproszonych na kryształach zależą od geometrii pojedynczej rozpraszającej komórki elementarnej. Analiza położenia i natężenia tych punktów pozwala na określenie struktury kryształu.

Kierunki (kąty  $\theta$ ), dla których otrzymujemy wzmocnienie promieni X ugiętych na kryształach, określa prawo Bragga



#### Prawo, zasada, twierdzenie

$$2d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots (\text{maksima})$$

(30.22)

gdzie  $d$  jest odległością między sąsiednimi płaszczyznami zawierającymi atomy, a  $\theta$  kątem pomiędzy tymi płaszczyznami i padającym promieniowaniem.



Więcej o prawie Bragga możesz przeczytać w *Dodatku 3*, na końcu modułu IX.

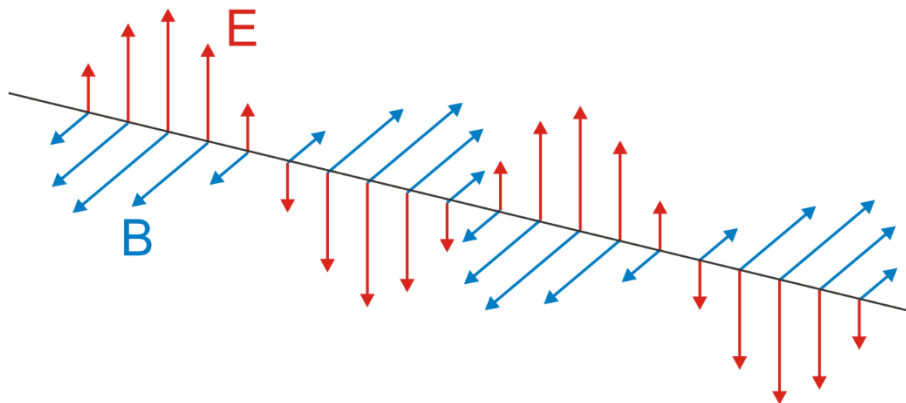
Widzimy, że znając długość fali  $\lambda$  możemy z prawa Bragga wyznaczyć odległości międzyatomowe. Dyfrakcja promieni X jest ważną metodą doświadczalną w badaniu ciała stałego.

## 31 Polaryzacja

### 31.1 Wstęp

Teoria Maxwella przewiduje, że światło jest falą poprzeczną tzn. kierunki drgań wektorów  $E$  i  $B$  są prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali.

Na rysunku 31.1 poniżej przedstawiono falę elektromagnetyczną, która wyróżnia się tym, że wektory  $E$  są do siebie *równoległe* we wszystkich punktach fali. Dotyczy to również wektorów  $B$ . O takiej fali mówimy, że jest *plasko spolaryzowana* lub *spolaryzowana liniowo*. Wektory  $E$  tworzą z kierunkiem ruchu fali płaszczyznę zwaną płaszczyzną drgań.



Rys. 31.1. Fala elektromagnetyczna plasko spolaryzowana (spolaryzowana liniowo)

Przykładem fal spolaryzowanych liniowo są fale elektromagnetyczne radiowe emitowane przez antenę dipolową omawiane w rozdziale 27 (moduł 8).

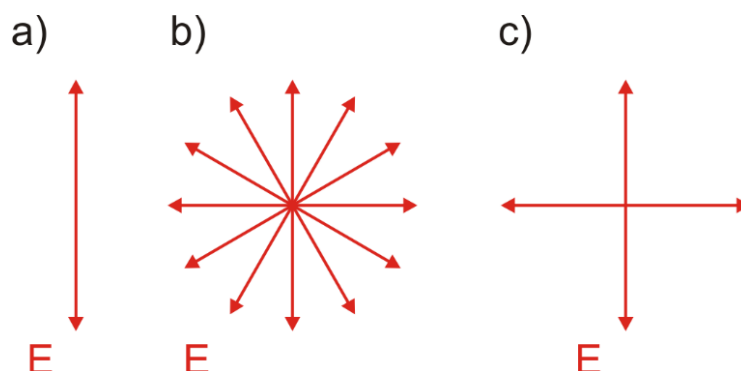
W dużej odległości od dipola, wektor pola elektrycznego jest równoległy do osi dipola, anteny (rysunek 27.6). Emitowana fala jest więc spolaryzowana liniowo. Kiedy taka fala pada na antenę odbiorczą wówczas zmienne pole elektryczne (zmienny wektor  $E$  fali) wywołuje w antenie odbiorczej drgania elektronów w górę i w dół. W efekcie prąd zmienny popłynie w układzie wejściowym odbiornika. Jeżeli jednak obrócimy antenę o  $90^\circ$  wokół kierunku padania fali, to wektor  $E$  będzie prostopadły do anteny i nie wywoła ruchu elektronów (antena nie odbiera sygnału).

Źródła światła widzialnego różnią się od źródeł fal radiowych między innymi tym, że atomy (cząsteczki) emitujące światło działają niezależnie. W konsekwencji rozchodzące się światło składa się z *niezależnych ciągów fal*, których płaszczyzny drgań zorientowane są *przypadkowo* wokół kierunku ruchu fali. Takie światło chociaż jest falą poprzeczną jest *niespolaryzowane*.

Na rysunku 31.2 pokazana jest schematycznie różnica między falą poprzeczną spolaryzowaną liniowo (a) i falą poprzeczną niespolaryzowaną (b). Na rysunku (a) wektor  $E$  drga w jednej płaszczyźnie, podczas gdy w sytuacji pokazanej na rysunku (b) płaszczyzny drgań wektora  $E$  zorientowane są przypadkowo.

Rysunek (c) przedstawia inny równoważny opis niespolaryzowanej fali poprzecznej: traktujemy ją jako złożenie dwóch spolaryzowanych liniowo fal o przypadkowo zmiennej


różnicy faz. Oznacza to, że wypadkowy wektor  $E$  ma zmienną (ale prostopadłą) orientację względem kierunku rozchodzenia się fali. Orientacja kierunków drgań składowych pól  $E$  jest też przypadkowa chociaż zawsze prostopadła względem kierunku rozchodzenia się fali.

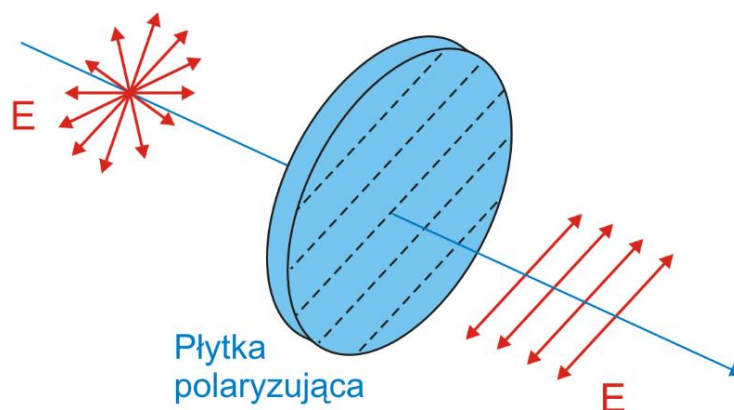


Rys. 31.2. Orientacja wektora elektrycznego  $E$  (a) w fali spolaryzowanej liniowo (b) w fali niespolaryzowanej (c) równoważny opis fali niespolaryzowanej

Z dotychczas omawianych doświadczeń z interferencją i dyfrakcją nie wynika poprzeczny charakter fal świetlnych bo fale podłużne też interferują i ulegają ugięciu. Natomiast zjawisko polaryzacji jest charakterystyczne dla fal poprzecznych. Jednak, aby móc odróżnić od siebie różne fale poprzeczne biegnące w tym samym kierunku potrzebna jest metoda, która pozwoliłaby rozdzielić fale o różnych płaszczyznach drgań. Dotyczy to również badania fal świetlnych niespolaryzowanych.

### 31.2 Płytki polaryzujące

Na rys. 31.3 pokazana jest niespolaryzowana fala świetlna padająca na płytkę z materiału polaryzującego, zwanego *polaroidem* .

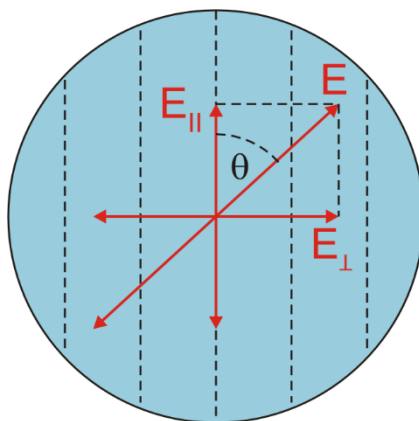


Rys. 31.3. Przechodzenie światła przez polaroid

W płytce istnieje pewien charakterystyczny kierunek polaryzacji zaznaczony równoległymi liniami przerywanymi. Kierunek polaryzacji polaroidu ustala się w procesie produkcji.

Cząsteczki o strukturze łańcuchowej osadza się na elastycznej warstwie plastycznej, a następnie warstwę rozciąga się co powoduje równoległe ułożenie cząsteczek.

Płytkę przepuszcza tylko te fale, dla których kierunki drgań wektora elektrycznego są równoległe do kierunku polaryzacji, a pochłania te fale, w których kierunki te są prostopadłe. Jeżeli wektor  $E$  wyznaczający płaszczyznę drgań tworzy kąt  $\theta$  z kierunkiem polaryzacji płytki to przepuszczana jest składowa równoległa  $E_{\parallel} = E \cos \theta$  podczas gdy składowa prostopadła  $E_{\perp} = E \sin \theta$  jest pochłaniana (rysunek 31.4).



Rys. 31.4. Polaroid

Jeżeli więc oprócz płytki polaryzującej (*polaryzatora*  $\mathbb{P}$ ) ustawimy na drodze światła drugą taką płytkę (nazywaną *analizatorem*  $\mathbb{P}$ ) to obracając analizator wokół kierunku padania światła możemy zmieniać natężenie światła przechodzącego przez obie płytki. Jeżeli amplituda pola elektrycznego fali padającej na analizator jest równa  $E_0$  to amplituda fali wychodzącej z analizatora wynosi  $E_0 \cos \theta$ , gdzie  $\theta$  jest kątem pomiędzy kierunkami polaryzacji obu płytek.

Ponieważ natężenie światła jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy więc



#### Prawo, zasada, twierdzenie

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

(31.1)

Równanie (31.1) nazywane jest *prawem Malusa*.

Zauważmy, że natężenie światła osiąga maksimum dla  $\theta = 0^\circ$  lub  $\theta = 180^\circ$  to jest dla równoległych kierunków polaryzacji, a minimum dla  $\theta = 90^\circ$  lub  $\theta = 270^\circ$  to jest dla prostopadłych kierunków polaryzacji.



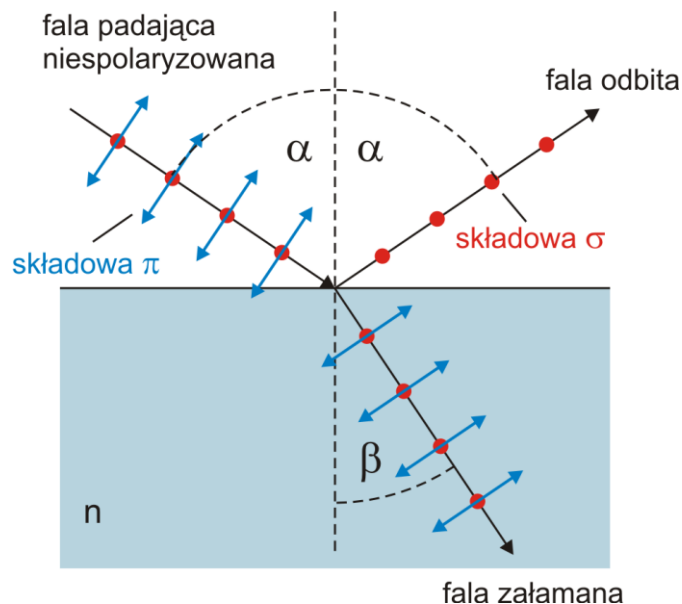
#### Ćwiczenie 31.1

Spróbuj odpowiedzieć jaka część energii wiązki światła niespolaryzowanego padającego na polaroid jest w nim pochłaniana, a jaka przepuszczana?

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

### 31.3 Polaryzacja przez odbicie

Innym sposobem, w jaki światło może być spolaryzowane, częściowo lub całkowicie, jest odbicie od powierzchni dielektryka (np. szkła). Na rysunku 31.5 pokazana jest wiązka niespolaryzowana padająca na powierzchnię szkła.



Rys. 31.5. Polaryzacja światła przez odbicie

Doświadczalnie stwierdzono, że istnieje pewien kąt padania, nazywany *kątem całkowitej polaryzacji*  $\alpha_p$   $\text{P}$ , dla którego wiązka odbita jest całkowicie spolaryzowana liniowo w kierunku prostopadłym do płaszczyzny padania. Oznacza to, że odbiciu ulega tylko składowa  $\sigma$  prostopadła do płaszczyzny padania (płaszczyzny rysunku 31.5) natomiast współczynnik odbicia składowej  $\pi$  leżącej w płaszczyźnie padania jest równy zero. Natomiast wiązka przechodząca jest tylko częściowo spolaryzowana (składowa  $\pi$  jest całkowicie załamana, a składowa  $\sigma$  tylko częściowo).

Doświadczalnie stwierdzono, że gdy kąt padania jest równy kątowi całkowitej polaryzacji to wówczas wiązka odbita i załamana tworzą kąt prosty czyli

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad (31.2)$$

Ponieważ zgodnie z prawem załamania

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad (31.3)$$

więc łącząc oba te równania otrzymujemy

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin(90^\circ - \alpha) = n_2 \cos \alpha \quad (31.4)$$

lub



### Prawo, zasada, twierdzenie

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n_2}{n_1} = n_{2,1}$$

(31.5)

To ostatnie równanie jest nazywane *prawem Brewstera*. Prawo to zostało znalezione doświadczalnie ale można je wyprowadzić ściśle przy pomocy równań Maxwella.



### Ćwiczenie 31.2

Oblicz jaki jest kąt całkowitej polaryzacji dla płytki wykonanej z materiału o współczynniku załamania  $n = 1.5$ . Oblicz też kąt załamania. Wynik zapisz poniżej.

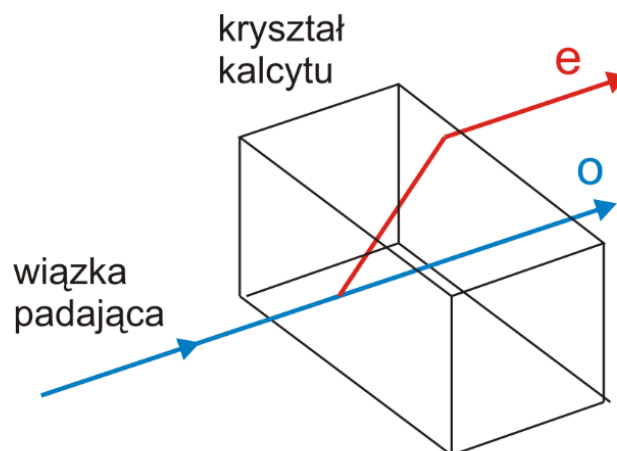
 $\alpha_p =$ 
 $\beta =$ 

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.


## 31.4 Dwójłomność



Światło spolaryzowane można również uzyskać wykorzystując, występującą w pewnych kryształach, zależność współczynnika załamania światła od kierunku polaryzacji. Dotychczas zakładaliśmy, że współczynnik załamania, nie zależy od kierunku rozchodzenia się światła w ośrodku ani od jego polaryzacji. Ciała spełniające te warunki nazywamy ciałami *optycznie izotropowymi* . Istnieje jednak szereg ciał *anizotropowych* i dotyczy to nie tylko własności optycznych ale wielu innych. Na przykład pewne kryształy łamią się łatwo tylko w jednej płaszczyźnie, a opór elektryczny mierzony w różnych kierunkach jest różny, niektóre kryształy łatwiej magnesuje się w jednym kierunku niż innym itd.


Na rysunku 31.6 poniżej pokazana jest niespolaryzowana wiązka światła padająca na kryształ kalcytu ( $\text{CaCO}_3$ ) prostopadle do jednej z jego ścian.




Rys. 31.6. Podwójne załamanie w kryształach kalcytu

Pojedyncza wiązka światła rozszczepia się, przechodząc przez kryształ, na dwa promienie. Mamy do czynienia z dwójłomnością czyli *podwójnym załamaniem* .

Jeżeli zbadamy obie wychodzące wiązki za pomocą płytki polaryzującej to okaże się, że obie wiązki są *spolaryzowane liniowo*, przy czym ich płaszczyzny drgań są wzajemnie prostopadłe. Wiązki te noszą odpowiednio nazwy *promienia zwyczajnego (o)*  i *promienia nadzwyczajnego (e)* . Ponadto okazuje się, że promień zwyczajny spełnia prawo załamania (tak jak dla ośrodka izotropowego), a promień nadzwyczajny tego prawa nie spełnia.

Zjawisko to tłumaczy się tym, że promień *o* przechodzi przez kryształ z jednakową prędkością we wszystkich kierunkach (ma jeden współczynnik załamania  $n_o$ ) tak jak izotropowe ciało stałe, natomiast prędkość promienia *e* zależy od kierunku w kryształach i zmienia się od wartości  $v_o$  do  $v_e$ , a współczynnik załamania od  $n_o$  do  $n_e$ . Dla kalcytu  $n_o = 1.486$ , a  $n_e = 1.658$ . Wielkości  $n_e$  i  $n_o$  nazywamy *głównymi współczynnikami załamania*  kryształu.

Niektóre podwójnie załamujące kryształy wykazują ponadto własność nazywaną *dichroizmem* . Kryształy te pochłaniają jeden z promieni (*o* lub *e*) silniej niż drugi. Na wykorzystaniu tego zjawiska opiera się działanie szeroko stosowanych polaroidów.

Ten rozdział kończy moduł dziewiąty; możesz teraz przejść do podsumowania i zadań testowych.



## Podsumowanie




- Optyka geometryczna opiera się na: 1) Prawie odbicia: promień padający, promień odbity i normalna do powierzchni granicznej wystawiona w punkcie padania promienia leżą w jednej płaszczyźnie i kąt padania równa się kątowi odbicia  $\alpha_1 = \alpha_2$ , 2) Prawie załamania: stosunek sinusa kąta padania do sinusa kąta załamania jest równy odwrotności stosunku współczynników załamania ośrodków  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = n_{2,1}$ .
- Warunkiem stosowalności optyki geometrycznej jest aby wymiary liniowe wszystkich obiektów (soczewek, pryzmatów, szczelin itp.) były o wiele większe od długości fali. Jeżeli tak nie jest trzeba wziąć pod uwagę *falowy charakter światła*.
- Interferencja na wąskich szczelinach odległych o  $d$ :  
 $d \sin \theta = m\lambda$ ,  $m = 1, 2, \dots$  (maksima),  $E_\theta = E_m \cos \beta$ ,  $I_\theta = I_m \cos^2 \beta$ ,  

$$\beta = \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta$$
- Fala odbijając się od ośrodka optycznie gęstszego (o większym  $n$ ) zmienia swoją fazę o  $\pi$ . Gdy odbicie zachodzi od powierzchni ośrodka rzadszego optycznie fala odbija się bez zmiany fazy.
- Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie o szerokości  $a$ :  
 $a \sin \theta = m\lambda$ ,  $m = 1, 2, \dots$  (minima),  $E_\theta = \frac{E_m}{\alpha} \sin \alpha$ ,  $I_\theta = I_m \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$ ,  

$$\alpha = \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$$
- Równoczesna interferencja i dyfrakcja na dwóch szczelinach:  $I_\theta = I_m (\cos \beta)^2 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$ .
- Kierunki (kąty  $\theta$ ), w których otrzymujemy wzmocnienie promieni  $X$  ugiętych na kryształach, określa prawo Bragga  $2d \sin \theta = m\lambda$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  (maksima), gdzie  $d$  jest odległością płaszczyzn w kryształach.
- Zjawisko polaryzacji jest charakterystyczne dla fal poprzecznych.
- Światło można spolaryzować przez odbicie lub przepuszczając światło przez polaryzator. Dla kąta padania takiego, że  $\tan \alpha = \frac{n_2}{n_1} = n_{2,1}$ , wiązka odbita jest całkowicie spolaryzowana liniowo prostopadle do płaszczyzny padania, a wiązka przechodząca jest tylko częściowo spolaryzowana.

## Materiały dodatkowe do Modułu IX

### Widzenie barwne

Obraz w oku powstaje na siatkówce oka. Światło po przejściu przez soczewkę pada na znajdujące się w siatkówce komórki wrażliwe na światło – *fotoreceptory* . Są dwa podstawowe rodzaje fotoreceptorów: *pręciki*  i *czopki* .

Pręciki rejestrują zmiany jasności, a dzięki czopkom możemy rozróżnić kolory. Pręcik są *bardziej czule na światło* niż czopki. W nocy gdy jest ciemno, komórki odpowiedzialne za widzenie barwne (czopki) nie są stymulowane. Reagują jedynie pręciki. Dlatego o zmierzchu wszystko wydaje się szare.

W oku znajdują się trzy rodzaje czopków, które są wrażliwe na trzy podstawowe barwy widmowe: *czerwoną*, *zieloną* i *niebieską*. W zależności od stopnia stymulacji poszczególnych rodzajów czopków widzimy określony kolor, który można przedstawić jako kombinację tych trzech podstawowych barw. Barwę białą zobaczymy, gdy wszystkie trzy rodzaje czopków podrażnione będą jednakowo silnie.

Okazuje się, że czopki w największym stopniu pochłaniają żółtozielone światło o długości fali około 550 nanometrów i dlatego właśnie oko ludzkie najsilniej reaguje na światło o tej długości fali. Jednak odbiór konkretnej barwy uzależniony jest od czułości poszczególnych czopków, a ich czułość jest uzależniona od fizjologicznych cech poszczególnych osób więc każdy człowiek te same barwy odbiera trochę inaczej.

Podsumowując, nasze oczy przekształcają promieniowanie elektromagnetyczne fal świetlnych w sygnały elektryczne, które trafiają do ośrodków wzrokowych mózgu, gdzie są przekształcane w trójwymiarowy, kolorowy obraz.

Na zakończenie warto wspomnieć, że naturalny sposób widzenia kolorowego RGB (od angielskiego **R**ed - czerwony, **G**reen - zielony, **B**lue - niebieski) został wykorzystany w konstrukcji monitorów. Najczęściej w kineskopach stosuje się warstwę luminoforu składającą się z trójek punktów lub pasków, które pobudzone strumieniem elektronów świecą w trzech barwach podstawowych: czerwonej, zielonej, niebieskiej (RGB).

### Zasada Fermata

Zasadę Fermata formułujemy w następujący sposób:

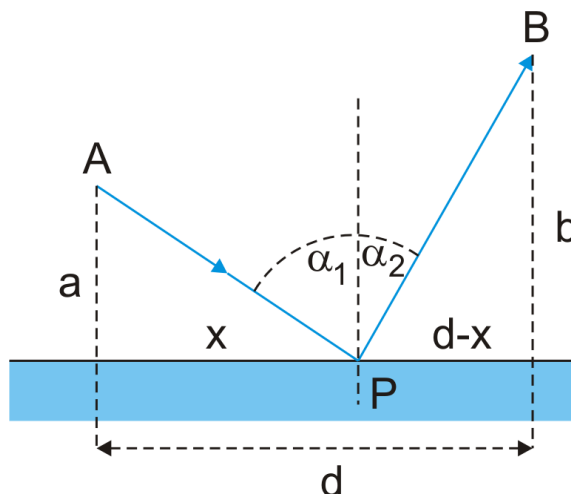


#### **Prawo, zasada, twierdzenie**

*Promień świetlny biegnący z jednego punktu do drugiego przebywa drogę, na której przebycie trzeba zużyć w porównaniu z innymi, sąsiednimi drogami, minimum albo maksimum czasu.*

Zasada ta wyjaśnia prostoliniowy bieg światła w ośrodku jednorodnym bo linia prosta odpowiada minimum drogi, a tym samym i minimum czasu. Właśnie z tej zasady można wyprowadzić prawa odbicia i załamania.

Na rysunku poniżej są przedstawione dwa punkty *A* i *B* oraz łączący je promień *APB*, który odbija się od powierzchni granicznej w punkcie *P*.



Promień wychodzący z punktu A po odbiciu w punkcie P trafia do punktu B

Całkowita długość drogi promienia wynosi

$$l = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2} \quad (\text{IX.2.1})$$

gdzie  $x$  jest zmienną zależną od położenia punktu  $P$  (punkt odbicia promienia).

Zgodnie z zasadą Fermata punkt  $P$  (zmienną  $x$ ) wybieramy tak, żeby czas przebycia drogi  $APB$  był minimalny (lub maksymalny, lub niezmienny). Matematycznie oznacza to warunek

$$\frac{dl}{dx} = 0 \quad (\text{IX.2.2})$$

więc otrzymujemy

$$\frac{dl}{dx} = \frac{1}{2}(a^2 + x^2)^{-1/2} 2x + \frac{1}{2}[b^2 + (d-x)^2]^{-1/2} 2(d-x)(-1) = 0 \quad (\text{IX.2.3})$$

a po przekształceniu

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \quad (\text{IX.2.4})$$

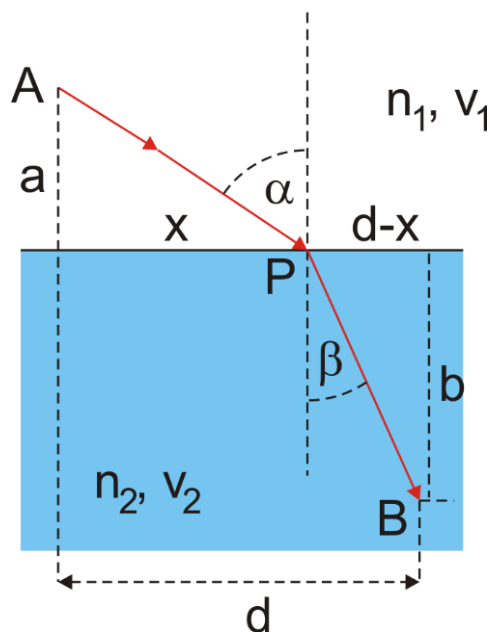
Porównując z rysunkiem widzimy, że jest to równoważne zapisowi

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 \quad (\text{IX.2.5})$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad (\text{IX.2.6})$$

co wyraża *prawo odbicia*.

Podobnie postępujemy w celu wyprowadzenia prawa załamania. Rozpatrzmy sytuację przedstawioną na rysunku poniżej.




Promień wychodzący z punktu A po załamaniu w punkcie P na granicy ośrodków trafia do punktu B

Czas przelotu z A do B przez punkt P jest dany jest wzorem

$$t = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} \quad (\text{IX.2.7})$$

Uwzględniając, że  $n = c/v$  możemy przepisać to równanie w postaci

$$t = \frac{n_1 l_1 + n_2 l_2}{c} = \frac{l}{c} \quad (\text{IX.2.8})$$

Wyrażenie w liczniku  $l = n_1 l_1 + n_2 l_2$  jest *drogą optyczną*  promienia. Ponownie dobieramy zmienną  $x$  (położenie punktu P), tak aby droga  $l$  była minimalna czyli, aby  $dl/dx = 0$ . Ponieważ droga optyczna jest równa

$$l = n_1 l_1 + n_2 l_2 = n_1 \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2} \quad (\text{IX.2.9})$$

więc otrzymujemy

$$\frac{dl}{dx} = \frac{1}{2} n_1 (a^2 + x^2)^{-1/2} 2x + \frac{1}{2} n_2 [b^2 + (d-x)^2]^{-1/2} 2(d-x)(-1) = 0 \quad (\text{IX.2.10})$$

a po przekształceniu

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = n_2 \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \quad (\text{IX.2.11})$$

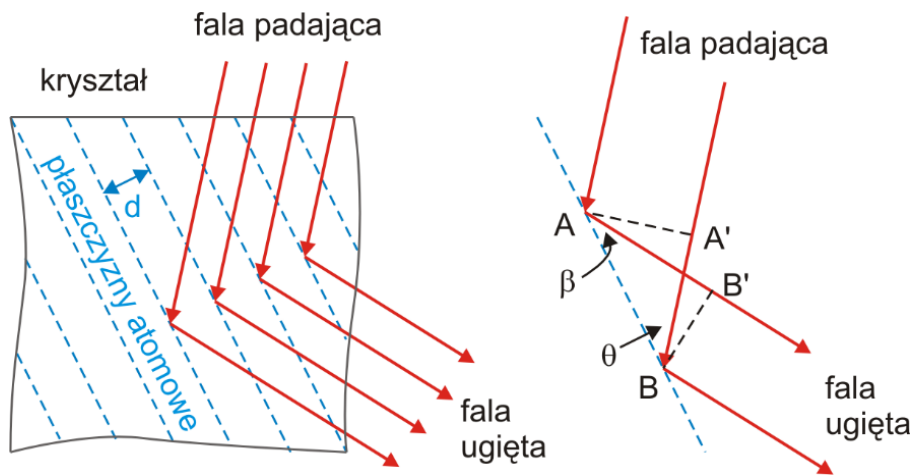
Porównując ten wynik z rysunkiem 2 otrzymujemy

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad (\text{IX.2.12})$$

co jest *prawem załamania*.

### Prawo Bragga

Prawo Bragga podaje warunki, w jakich zachodzi dyfrakcja promieni Roentgena na kryształach. Rysunek pokazuje ugięcie wiązki promieni X na zespole równoległych płaszczyzn (linie przerywane). Odległość między płaszczyznami wynosi  $d$ .



Ugięcie wiązki promieni X na płaszczyznach atomowych w kryształach

Promienie ugięte będą się wzmacniać gdy różnica dróg pomiędzy sąsiednimi promieniami (rysunek) będzie równa całkowitej wielokrotności długości fali

$$AB' - A'B = AB(\cos \beta - \cos \theta) = m\lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{IX.3.1})$$

Dla  $m = 0$  otrzymujemy  $\beta = \theta$  to znaczy płaszczyzna wyznaczona przez atomy działa jak „zwierciadło” odbijające falę padającą (kąt padania = kąt odbicia) to znaczy w tym kierunku obserwujemy wzmocnienie promieniowania ugiętego.

Jeżeli chcemy otrzymać wzmocnienie promieniowania odbitego od całej rodziny płaszczyzn, dla kierunku określonego przez kąt  $\theta$ , to muszą się wzmacniać promienie odbite od poszczególnych płaszczyzn. Oznacza to, że różnica dróg dla promieni odbitych od sąsiednich płaszczyzn (rysunek) musi być równa całkowitej wielokrotności  $\lambda$ , co sprowadza się do warunku zwanego *prawem Bragga*.

$$2d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots (\text{maksima}) \quad (\text{IX.3.2})$$

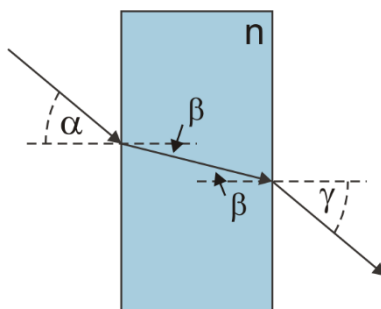
W równaniu tym  $d$  oznacza odległość między sąsiednimi płaszczyznami. Należy tu zwrócić uwagę, że w kryształach znajduje się wiele różnych rodzin płaszczyzn o różnych odległościach międzypłaszczyznowych.

Pomiar dyfrakcji promieni  $X$  jest doświadczalną metodą badania rozmieszczenia atomów w kryształach.

## Rozwiązania ćwiczeń z modułu IX

### Ćwiczenie 28.2

Dane: kąt padania  $\alpha$ , współczynnik załamania szkła  $n_{szkła} = n$ , współczynnik załamania powietrza  $n_{powietrza} = 1$ .



Promień padający na granicę ośrodków pod kątem  $\alpha$  załamuje się pod kątem  $\beta$  i pod takim kątem pada na drugą ściankę płytki to jest na drugą granicę ośrodków. Tutaj załamuje się pod kątem  $\gamma$ .

Zgodnie z prawem załamania dla promienia wchodzącego do płytki na granicy ośrodków zachodzi związek

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n}{1} = n$$

a dla promienia wychodzącego z płytki

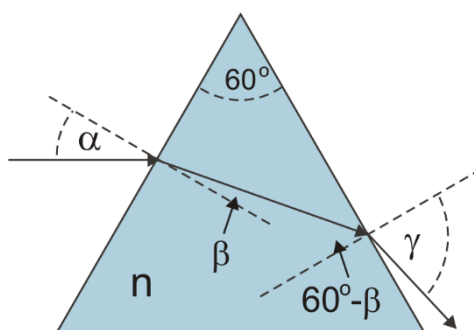
$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{1}{n}$$

Z porównania powyższych wzorów wynika, że kąty  $\alpha$  i  $\gamma$  są identyczne  $\alpha = \gamma$ .

Promień przechodzący przez płaską płytkę ulega *równoległemu przesunięciu*.

### Ćwiczenie 28.3

Dane: współczynnik załamania szkła  $n_{szkła} = 1.5$ , współczynnik załamania powietrza  $n_{powietrza} = 1$ .



Zgodnie z rysunkiem promień padający na pryzmat załamuje się pod kątem  $\beta$ , a następnie pada na drugą ściankę pryzmatu pod kątem  $60^\circ - \beta$ . Ponieważ promień biegnie początkowo równoległe do podstawy pryzmatu to kąt padania  $\alpha = 30^\circ$ .

Zgodnie z prawem załamania

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_{szkła}}{n_{powietrza}} = 1.5$$

oraz

$$\frac{\sin(60^\circ - \beta)}{\sin \gamma} = \frac{n_{powietrza}}{n_{szkła}} = \frac{1}{1.5}$$

Podstawiając  $\alpha = 30^\circ$  i rozwiązując układ powyższych równań otrzymujemy  $\sin \gamma = 0.975$  skąd  $\gamma = 77.1^\circ$ .

### Ćwiczenie 29.1

Dane:  $d = 2 \text{ mm}$ ,  $\lambda_1 = 700 \text{ nm}$ ,  $\lambda_2 = 400 \text{ nm}$ ,  $D = 1 \text{ m}$ .

Odległość między prążkami obliczamy z zależności (29.11)

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda D}{d}$$

Podstawiając dane otrzymujemy odpowiednio  $\Delta y_1 = 0.35 \text{ mm}$  oraz  $\Delta y_2 = 0.2 \text{ mm}$ .

### Ćwiczenie 29.2

Dane:  $n = 1.33$ ,  $d = 320 \text{ nm}$ .

Z warunku na maksimum interferencyjne (29.27)

$$2dn = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots (\text{maksima})$$

obliczamy  $\lambda$

$$\lambda = \frac{2dn}{m + \frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot 320 \text{ nm} \cdot 1.33}{m + \frac{1}{2}}$$

Obliczamy  $\lambda$  dla kolejnych  $m$ :

$m = 0$ ,  $\lambda = 1700 \text{ nm}$ , poza zakresem widzialnym

$m = 1$ ,  $\lambda = 567 \text{ nm}$ , **w zakresie widzialnym (żółtozielona)**

$m = 2$ ,  $\lambda = 340 \text{ nm}$ , poza zakresem widzialnym

$m = 3, 4, \dots$ , poza zakresem widzialnym.



**Ćwiczenie 29.3**

Dane:  $D = 1 \text{ m}$ ,  $\Delta y' = 1 \text{ mm}$ ,  $\theta_1 = 13.6270^\circ$ ,  $\theta_2 = 13.6409^\circ$ .

Położenie  $y$  linii na ekranie obliczamy ze związku  $\text{tg}\theta = y/D$ . Dla odległości od ekranu wynoszącej  $1 \text{ m}$   $y_1 = 0.24242 \text{ m}$  oraz  $y_2 = 0.24268 \text{ m}$  więc odległość między prążkami wynosi

$$\Delta y = 0.26 \text{ mm}.$$

Ponownie korzystając ze związku  $\text{tg}\theta = y/D$  obliczamy odległość  $D'$  w jakiej trzeba ustawić ekran, żeby odległość między prążkami wyniosła  $\Delta y' = 1 \text{ mm}$

$$D' = \frac{\Delta y'}{\text{tg}\theta_2 - \text{tg}\theta_1}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy  $D' = 3.85 \text{ m}$ .

**Ćwiczenie 30.1**

Dane:  $m = 1, 2, 3$ .

Natężenie światła obliczamy ze wzoru (30.09)

$$I_\theta = I_m \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

przy czym maksimum natężenia otrzymujemy dla

$$\alpha = \left( m + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Dla  $m = 1$  otrzymujemy  $\alpha = 3\pi/2$  oraz  $\frac{I_\theta}{I_m} = 0.045$

Dla  $m = 2$  otrzymujemy  $\alpha = 5\pi/2$  oraz  $\frac{I_\theta}{I_m} = 0.016$

Dla  $m = 3$  otrzymujemy  $\alpha = 7\pi/2$  oraz  $\frac{I_\theta}{I_m} = 0.008$

Okazuje się, że natężenia kolejnych maksimum maleją bardzo szybko i stanowią odpowiednio 4.5%, 1.6% i 0.8% natężenia maksimum środkowego.

**Ćwiczenie 31.1**

Natężenie światła przechodzącego przez polaroid obliczamy ze wzoru (31.1)

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

przy czym dla niespolaryzowanej fali świetlnej kąt  $\theta$  jaki tworzy wektor  $E$  z kierunkiem polaryzacji polaroidu przyjmuje wszystkie możliwe wartości od 0 do  $2\pi$ . Dlatego w tym przypadku należy w obliczeniach uwzględnić wartość średnią  $\cos^2 \theta$ .

Ponieważ wykresy funkcji sinus i cosinus są takie same (jedynie przesunięte o  $\pi/2$ ), a ponadto  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  to odpowiednie wartości średnie są równe i wynoszą  $\overline{\sin^2 \theta} = \overline{\cos^2 \theta} = 1/2$ .

Oznacza to, że 50% energii wiązki światła niespolaryzowanego padającego na polaroid jest w nim pochłaniane, a 50% przepuszczane.

### Ćwiczenie 31.2

Dane:  $n = 1.5$ .

Kąt całkowitej polaryzacji obliczamy z prawa Brewstera

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n_2}{n_1} = n_{2,1}$$

Podstawiając dane otrzymujemy  $\alpha = 56.3^\circ$ .

Gdy kąt padania jest równy kątowi całkowitej polaryzacji to wówczas wiązka odbita i załamana tworzą kąt prosty czyli

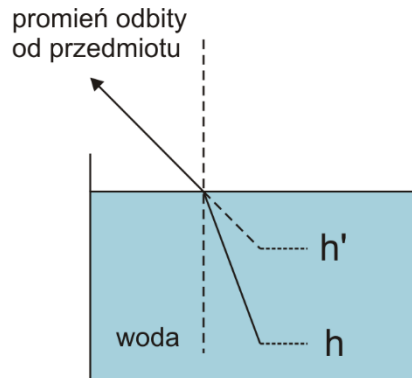
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

skąd otrzymujemy kąt załamania  $\beta = 33.7^\circ$ .

Sprawdź, że z prawa załamania otrzymamy tę samą wartość kąta  $\beta$ .

## Test IX

1. W pewnym ośrodku prędkość światła o długości fali 550 nm wynosi  $2 \cdot 10^8$  m/s. Jaki jest współczynnik załamania tego ośrodka dla tej fali? Jaka jest długość tej fali w powietrzu?
2. Pod jakim kątem  $\alpha$  pada światło na płytkę kwarcową o współczynniku załamania  $n = 1.5$  jeżeli promień odbity jest prostopadły do promienia załamane go?
3. Przedmiot znajduje się w wodzie na głębokości  $h$  (rysunek). Na jakiej głębokości  $h'$  widzi go obserwator? Współczynnik załamania wody  $n = 1.33$ .




4. Obraz interferencyjny powstaje na ekranie w odległości  $l = 1$  m od dwóch wąskich szczelin, których rozstaw wynosi 0.1 mm. Oblicz długość fali padającego światła monochromatycznego jeżeli wiadomo, że trzeci jasny prążek znajduje się 15 mm od środkowego maksimum.
5. Jaka jest odległość kątowa pomiędzy pierwszym i drugim maksimum obrazu interferencyjnego dwóch wąskich szczelin z zadania 4?
6. Na grubą płytkę szklaną o współczynniku załamania  $n_{sz} = 1.5$  naniesiono cienką warstwę przezroczystego materiału o współczynniku załamania  $n = 1.25$ . Na warstwę pada prostopadle światło białe. Znajdź grubość tej warstwy jeżeli wiadomo, że dla fali o długości 600 nm obserwujemy interferencję powodującą całkowite wygaszenie, a dla fali 700 nm maksymalne wzmocnienie.
7. Światło o długości 500 nm pada na siatkę dyfrakcyjną mającą 1000 nacięć na centymetr długości. Jaka jest odległość między prążkiem zerowym, a obrazem pierwszego rzędu na ekranie odległym od siatki o 4 m?
8. Stosując okulary polaroidowe można uniknąć światła odbitego od różnych powierzchni. Jaki musi być kąt padania światła i jaki kierunek (pionowy czy poziomy) osi polaroidu w okularach, żeby wyeliminować całkowicie światło odbite od powierzchni wody ( $n = 1.33$ ). Na jakiej wysokości kątowej nad horyzontem znajduje się wówczas Słońce?

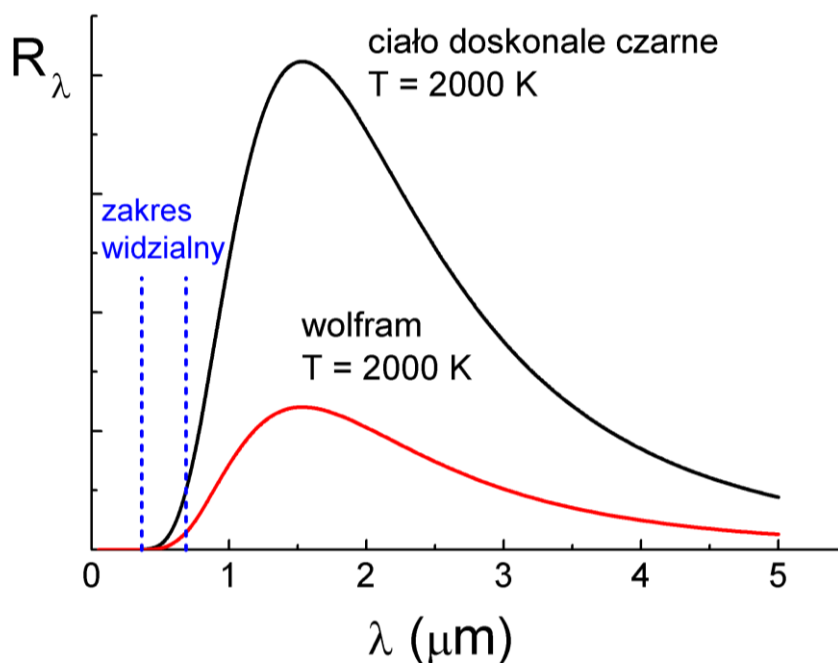
# MODUŁ X

## 32 Światło a fizyka kwantowa


### 32.1 Promieniowanie termiczne


Z codziennego doświadczenia wiemy, że rozgrzane do wysokiej temperatury ciała są źródłami światła widzialnego. Typowym przykładem są wolframowe włókna żarówek. Promieniowanie emitowane przez ogrzane ciała nazywamy *promieniowaniem termicznym* . Wszystkie ciała *emitują* takie promieniowanie do otoczenia, a także z tego otoczenia je *absorbują* w każdej temperaturze wyższej od zera bezwzględnego. Jeżeli ciało ma wyższą temperaturę od otoczenia to będzie się oziębiać ponieważ szybkość promieniowania przewyższa szybkość absorpcji (oba procesy zawsze występują jednocześnie). Gdy osiągnięta zostanie równowaga termodynamiczna wtedy te szybkości będą *równe*.

Za pomocą siatki dyfrakcyjnej możemy zbadać światło emitowane przez te źródła to znaczy dowiedzieć się jakie są długości fal wypromieniowywanych przez ciało i jakie jest ich natężenie. Wyniki takiej analizy dla taśmy wolframowej ogrzanej do  $T = 2000\text{ K}$  są pokazane na rysunku 32.1.



Rys. 32.1. Zdolność emisyjna wolframu i ciała doskonale czarnego

Wielkość  $R_\lambda$  przedstawiona na osi pionowej nazywana jest *widmową zdolnością emisyjną*  promieniowania i jest tak zdefiniowana, że wielkość  $R_\lambda d\lambda$  oznacza moc promieniowania czyli szybkość, z jaką jednostkowy obszar powierzchni wypromieniowuje energię odpowiadającą długościom fal zawartym w przedziale od  $\lambda$ , do  $\lambda+d\lambda$ .


Całkowitą energię wysyłanego promieniowania w całym zakresie długości fal możemy obliczyć sumując emisję dla wszystkich długości fal tzn. całkując  $R_\lambda$  po wszystkich długościach fal. Wielkość ta nazywana jest *całkowitą emisją energetyczną*  promieniowania  $R$  i wyraża się wzorem

$$R = \int_0^{\infty} R_{\lambda} d\lambda \quad (32.1)$$

Oznacza to, że możemy interpretować emisję energetyczną promieniowania  $R$  jako powierzchnię pod wykresem  $R_{\lambda}$  od  $\lambda$ .

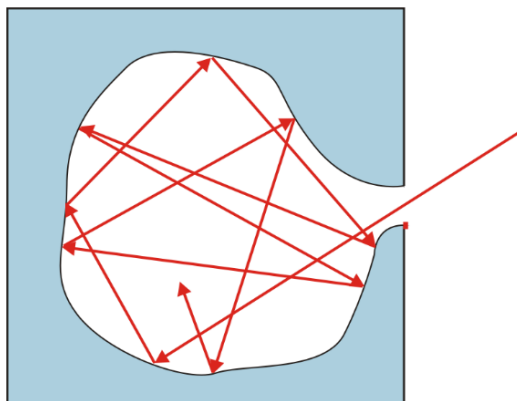
Widmo emitowane przez ciało stałe ma charakter *ciągły* i silnie zależy od temperatury. Ponadto szczegóły tego widma są prawie *niezależne od rodzaju substancji*.

Zauważmy, że w "zwykłych" temperaturach większość ciał jest dla nas widoczna dlatego, że odbijają one (lub rozpraszają) światło, które na nie pada, a nie dlatego, że ciała te wysyłają promieniowanie widzialne (świecą). Jeżeli nie pada na nie światło (np. w nocy) to są one niewidoczne. Dopiero gdy ciała mają wysoką temperaturę wtedy świecą własnym światłem. Ale jak widać z rysunku 32.1 i tak większość emitowanego promieniowania jest niewidzialna bo przypada na zakres podczerwieni czyli promieniowania ciepłego. Dlatego ciała, świecące własnym światłem są bardzo gorące. Jeżeli będziemy rozgrzewać kawałek metalu to początkowo chociaż jest on gorący to z jego wyglądu nie można tego stwierdzić bo nie świeci; można to tylko zrobić dotykiem. Emituje promieniowanie podczerwone. Ze wzrostem temperatury kawałek metalu staje się początkowo ciemnoczerwony, następnie jasnoczerwony, aż wreszcie świeci światłem niebiesko-białym.

Ponieważ ilościowe interpretacje takich widm promieniowania są trudne to posługujemy się wyidealizowanym ciałem stałym, zwanym *ciałem doskonale czarnym* . (Tak postępowaliśmy już w przypadku gazów; rozważaliśmy modelowy obiekt tak zwany gaz doskonały.) Ciało doskonale czarne charakteryzuje się tym, że *pochłania całkowicie* padające nań promieniowanie.

### 32.2 Ciało doskonale czarne

Rozważmy pokazany na rysunku 32.2 blok metalowy posiadający pustą wnękę wewnątrz. W ścianie bocznej tego bloku znajduje się niewielki otwór.



Rys. 32.2. Model ciała doskonale czarnego

Promieniowanie pada na otwór z zewnątrz i po wielokrotnych odbiciach od wewnętrznych ścian zostaje całkowicie pochłonięte. Oczywiście ścianki wewnętrzne też emitują

promieniowanie, które może wyjść na zewnątrz przez otwór. Otwór wnęki ma więc własności ciała doskonale czarnego.

Z obserwacji światła wysyłanego przez takie ciało wynika, że:

- Promieniowanie wychodzące z wnętrza bloków ma zawsze większe natężenie niż promieniowanie ze ścian bocznych.
- Dla danej temperatury emisja promieniowania wychodzącego z otworów jest *identyczna dla wszystkich źródeł promieniowania*, pomimo że dla zewnętrznych powierzchni te wartości są różne.



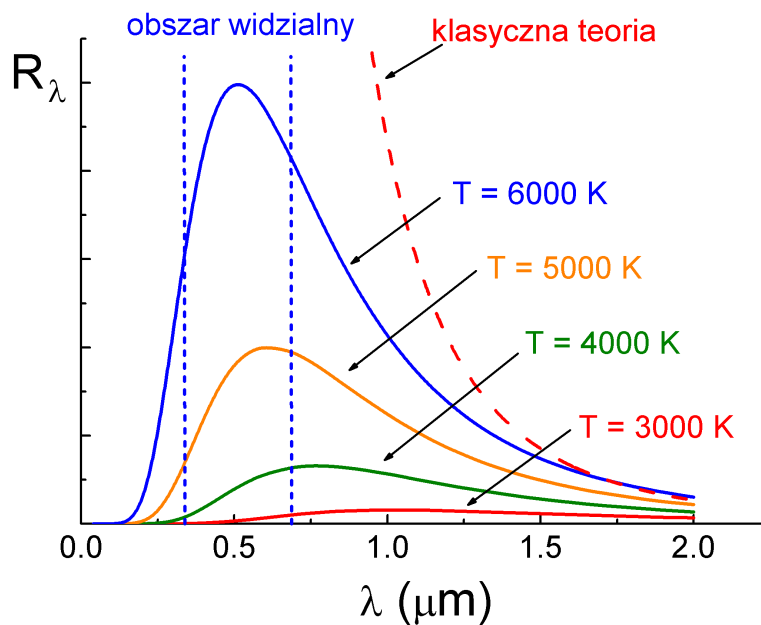
### Prawo, zasada, twierdzenie

*Emisja energetyczna promieniowania ciała doskonale czarnego (nie jego powierzchni) zmienia się wraz z temperaturą według prawa Stefana-Boltzmann*

$$R = \sigma T^4 \quad (32.2)$$

gdzie  $\sigma$  jest uniwersalną stałą (stała Stefana-Boltzmann) równą  $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$ .

Zdolność emisyjna promieniowania  $R_\lambda$  dla ciała doskonale czarnego zmienia się z temperaturą tak jak na rysunku 32.3 poniżej.



Rys. 32.3. Widmo promieniowania ciała doskonale czarnego w wybranych temperaturach



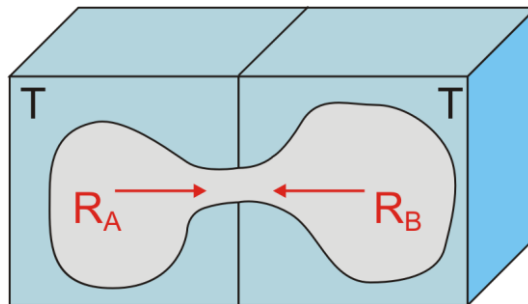
### Prawo, zasada, twierdzenie

*Długość fali dla której przypada maksimum emisji jest zgodnie z prawem Wiena odwrotnie proporcjonalna do temperatury ciała.*

Podkreślmy, że pokazane krzywe zależą tylko od temperatury i są całkiem niezależne od materiału oraz kształtu i wielkości ciała doskonale czarnego.

Możesz prześledzić zależność widma promieniowania ciała doskonale czarnego od temperatury korzystając z programu komputerowego „Ciało doskonale czarne” dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.

Żeby się o tym przekonać rozpatrzmy, pokazane na rysunku 32.4 dwa ciała doskonale czarne, tzn. dwie wnęki o dowolnym kształcie i jednakowej temperaturze ścianek obu wnęk (ciała stykają się). Promieniowanie oznaczone  $R_A$  przechodzi z wnęki  $A$  do wnęki  $B$ , a promieniowanie  $R_B$  w odwrotnym kierunku. Jeżeli te szybkości nie byłyby równe wówczas jeden z bloków ogrzewałby się a drugi stygł. Oznaczałoby to pogwałcenie drugiej zasady termodynamiki. Otrzymujemy więc  $R_A = R_B = R_C$  gdzie  $R_C$  opisuje całkowite promieniowanie dowolnej wnęki.



Rys. 32.4. Dwa ciała doskonale czarne o jednakowej temperaturze

Nie tylko energia całkowita ale również jej rozkład musi być taki sam dla obu wnęk. Stosując to samo rozumowanie co poprzednio można pokazać, że  $R_{\lambda A} = R_{\lambda B} = R_{\lambda C}$ , gdzie  $R_{\lambda C}$  oznacza widmową zdolność emisyjną dowolnej wnęki.

## 32.3 Teoria promieniowania we wnęce, prawo Plancka

### 32.3.1 Rozważania klasyczne

Na przełomie ubiegłego stulecia Rayleigh i Jeans wykonali obliczenia energii promieniowania we wnęce (czyli promieniowania ciała doskonale czarnego). Zastosowali oni teorię pola elektromagnetycznego do pokazania, że promieniowanie wewnątrz wnęki ma charakter fal stojących. Promieniowanie elektromagnetyczne odbija się od ścian wnęki tam i z powrotem tworząc fale stojące z węzłami na ściankach wnęki (tak jak omawiane w punkcie 13.5 fale w strunie zamocowanej na obu końcach). Następnie Rayleigh i Jeans obliczyli wartości średniej energii w oparciu o znane nam prawo ekwipartycji energii i w oparciu o nią znaleźli widmową zdolność emisyjną.



Wynik jaki uzyskali został pokazany linią przerywaną na rysunku 32.3. Jak widać rozbieżność między wynikami doświadczalnymi i teorią jest duża. Dla fal długich (małych częstotliwości) wyniki teoretyczne są bliskie krzywej doświadczalnej, ale dla wyższych częstotliwości wyniki teoretyczne dążą do nieskończoności. Ten sprzeczny z rzeczywistością wynik rozważań klasycznych nazywany jest „katastrofą w nadfiolecie”.

### 32.3.2 Teoria Plancka promieniowania ciała doskonale czarnego

Pierwszy wzór empiryczny dający wyniki widmowej zdolności emisyjnej w przybliżeniu zgodne z doświadczeniem przedstawił Wien. Wzór ten został następnie zmodyfikowany przez Plancka tak, że uzyskano wynik w pełni zgodny z doświadczeniem. Wzór Plancka ma postać

$$R_{\lambda} = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{c_2/\lambda T} - 1} \quad (32.3)$$

gdzie  $C_1$  i  $C_2$  są stałymi wyznaczanymi doświadczalnie.


Planck nie tylko zmodyfikował wzór Wiena ale zaproponował zupełnie *nowe podejście* mające na celu stworzenie teorii promieniowania ciała doskonale czarnego. Założył on, że każdy atom zachowuje się jak oscylator elektromagnetyczny posiadający *charakterystyczną częstotliwość drgań*.






#### Prawo, zasada, twierdzenie

*Oscylatory te, według Plancka, nie mogą mieć dowolnej energii, ale tylko ściśle określone wartości dane wzorem*

$$E = nh\nu \quad (32.4)$$

gdzie  $\nu$  oznacza częstość drgań oscylatora,  $h$  jest stałą (zwaną obecnie stałą Plancka) równą  $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$  Js, a  $n$  - pewną liczbę całkowitą (zwaną obecnie *liczbą kwantową* )


Ten postulat zmieniał radykalnie istniejące teorie. Wiemy, że zgodnie z fizyką klasyczną, energia każdej fali może mieć *dowolną wartość*, i że jest ona proporcjonalna do kwadratu amplitudy. Tymczasem według Plancka energia może przyjmować tylko *ściśle określone wartości* czyli jest *skwantowana* .

Ponadto oscylatory nie wypromieniowują energii w sposób ciągły, lecz porcjami czyli *kwantami* . Kwanty są emitowane gdy oscylator przechodzi ze stanu (*stanu kwantowego* ) o danej energii do drugiego o innej, mniejszej energii. Odpowiada to zmianie liczby kwantowej  $n$  o jedność, a w konsekwencji wypromieniowana zostaje energia w ilości

$$\Delta E = h\nu \quad (32.5)$$



#### Prawo, zasada, twierdzenie

*Oznacza to, że dopóki oscylator pozostaje w jednym ze swoich stanów kwantowych dopóty ani nie emituje ani nie absorbuje energii. Mówimy, że znajduje się w stanie stacjonarnym* .

Sprawdźmy teraz czy ta nowatorska hipoteza stosuje się do znanych nam oscylatorów. Jako przykład rozpatrzmy wahadło proste złożone z ciała o masie 1 kg zawieszono na lince o długości 1 m.

Częstotliwość drgań własnych takiego wahadła wynosi

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = 0.5 \text{ Hz} \quad (32.6)$$

Jeżeli wahadło wykonuje drgania o amplitudzie 10 cm to jego energia całkowita wynosi

$$E = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} \frac{mg}{l} A^2 = 0.1 \text{ J} \quad (32.7)$$

Zgodnie z hipotezą Plancka zmiany energii dokonują się skokowo przy czym  $\Delta E = h\nu$ . Względna zmiana energii wynosi więc

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{h\nu}{E} = 3.3 \cdot 10^{-33} \quad (32.8)$$

Żeby zaobserwować nieciągłe zmiany energii musielibyśmy wykonać pomiar energii z dokładnością przewyższającą wielokrotnie czułość przyrządów pomiarowych.

Kwantowa natura drgań nie jest więc widoczna dla makroskopowych oscylatorów podobnie jak nie widzimy dyskretnej natury materii to jest cząsteczek, atomów, elektronów itp., z których zbudowane są ciała. Wnioskujemy, że doświadczenia z wahadłem prostym nie mogą rozstrzygnąć o słuszności postulatu Plancka.

Zanim przejdziemy do przedstawienia innych doświadczeń (zjawisko fotoelektryczne i efekt Comptona) omówmy zastosowanie prawa promieniowania w termometrii.

### 32.3.3 Zastosowanie prawa promieniowania w termometrii

Promieniowanie emitowane przez gorące ciało można wykorzystać do wyznaczenia jego temperatury. Jeżeli mierzy się całkowite promieniowanie emitowane przez ciało, to korzystając z prawa Stefana-Boltzmana (32.2) można obliczyć jego temperaturę. Sprawdź ten sposób wykonując następujące ćwiczenie.



#### Ćwiczenie 32.1

Średnia ilość energii (na jednostkę czasu) promieniowania słonecznego padającego na jednostkę powierzchni Ziemi wynosi  $355 \text{ W/m}^2$ . Oblicz średnią temperaturę jaką będzie miała powierzchnia Ziemi, jeżeli przyjmijemy, że Ziemia jest ciałem doskonale czarnym, wypromieniowującym w przestrzeń właśnie tyle energii na jednostkę powierzchni i czasu. Czy uzyskany wynik jest zgodny z doświadczeniem? Wynik zapisz poniżej.

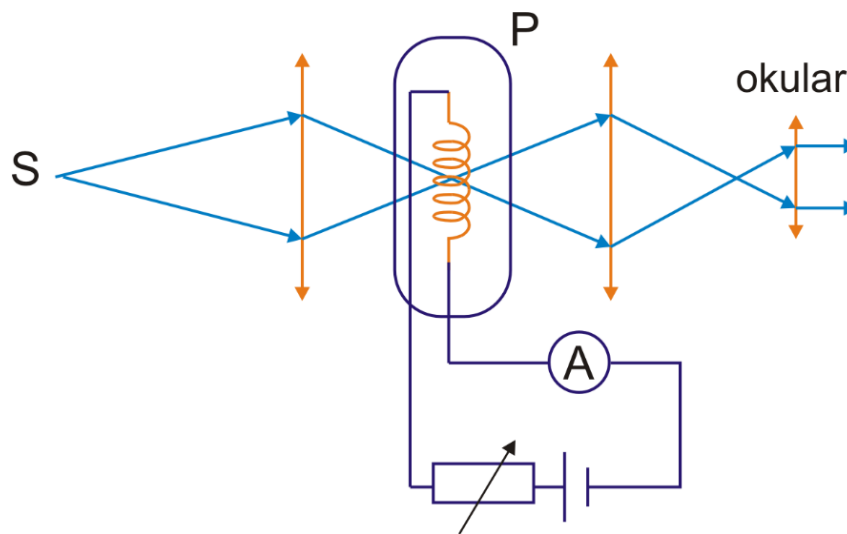
$T =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Ponieważ dla większości źródeł trudno dokonać pomiaru całkowitego promieniowania więc mierzy się ich zdolność emisyjną dla wybranego zakresu długości fal. Z prawa Plancka wynika, że dla dwu ciał o temperaturach  $T_1$  i  $T_2$  stosunek natężeń promieniowania o długości fali  $\lambda$  wynosi

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{e^{hc/\lambda k T_1} - 1}{e^{hc/\lambda k T_2} - 1} \quad (32.9)$$


Jeżeli  $T_1$  przyjmujemy jako standardową temperaturę odniesienia to możemy wyznaczyć  $T_2$  wyznaczając doświadczalnie stosunek  $I_1/I_2$ . Do tego celu posługujemy się urządzeniem zwanym pirometrem (rysunek 32.5).




Rys. 32.5 Pirometr

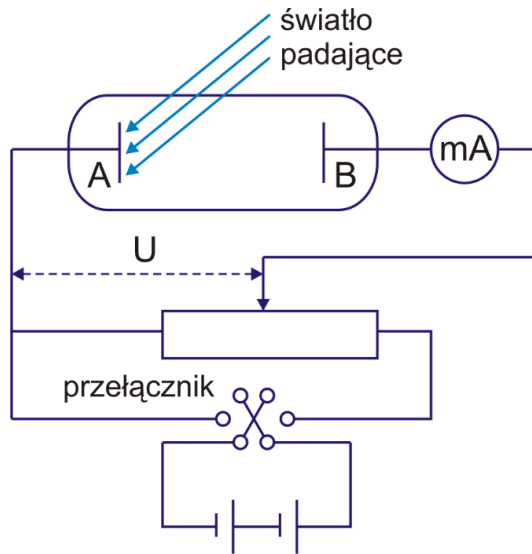
Obraz źródła  $S$  (o nieznannej temperaturze) powstaje w miejscu gdzie znajduje się włókno żarowe pirometru  $P$ . Dobieramy prąd żarzenia tak aby włókno stało się niewidoczne na tle źródła tzn. świeciło tak samo jasno jak źródło  $S$ . Ponieważ urządzenie jest wyskalowane odczytując wartość prądu żarzenia możemy wyznaczyć temperaturę źródła.

### 32.4 Zjawisko fotoelektryczne zewnętrzne

Omawiać teraz będziemy doświadczalne dowody kwantowej natury promieniowania. Najpierw zajmiemy się [zjawiskiem fotoelektrycznym](#)  zewnętrznym.

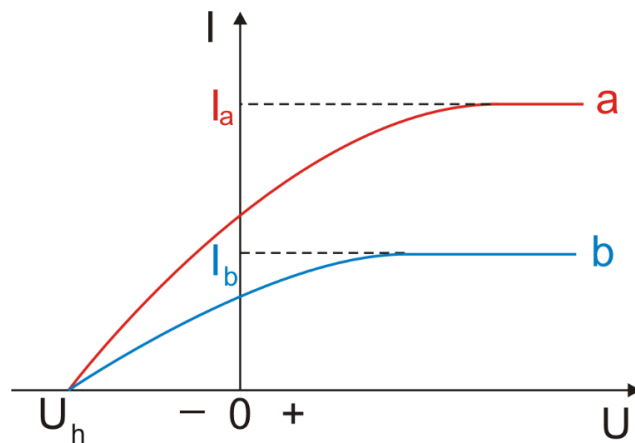
Zjawisko fotoelektryczne zewnętrzne polega na wyrzucaniu elektronów z powierzchni ciała stałego pod wpływem padającego promieniowania. Na rysunku 32.6 pokazano aparaturę do badania zjawiska fotoelektrycznego.

W szklanej bańce, w której panuje wysoka próżnia, znajdują się dwie metalowe elektrody  $A$  i  $B$ . Światło pada na metalową płytkę  $A$  i uwalnia z niej elektrony, które nazywamy [fotoelektronami](#) .



Rys. 32.6. Układ do obserwacji zjawiska fotoelektrycznego

Fotoelektrony są rejestrowane jako prąd elektryczny płynący między płytką A oraz elektrodą zbierającą B przy przyłożonym napięciu  $U$ . Do pomiaru prądu stosujemy czuły miliamperomierz (mA). Poniżej na rysunku 32.7 pokazana jest zależność prądu fotoelektrycznego od przyłożonego napięcia  $U$ , dla dwóch różnych wartości natężenia światła.



Rys. 32.7. Zależność fotoprądu od napięcia dla różnego natężenia światła; krzywa a odpowiada warunkom silniejszego oświetlenia

Widzimy, że gdy  $U$  jest dostatecznie duże, wtedy prąd fotoelektryczny osiąga maksymalną wartość (*prąd nasycenia*  $I_a, I_b$ ). Odpowiada to sytuacji gdy wszystkie elektrony wybijane z płytki A docierają do elektrody B.

Jeżeli zmienimy znak napięcia  $U$ , to prąd nie spada natychmiast do zera (przy  $U = 0$  mamy niezerowy prąd). Oznacza to, że fotoelektrony emitowane z płytki A mają pewną energię kinetyczną, dzięki której docierają do B (nawet wtedy gdy nie są przyspieszane napięciem  $U$ ).

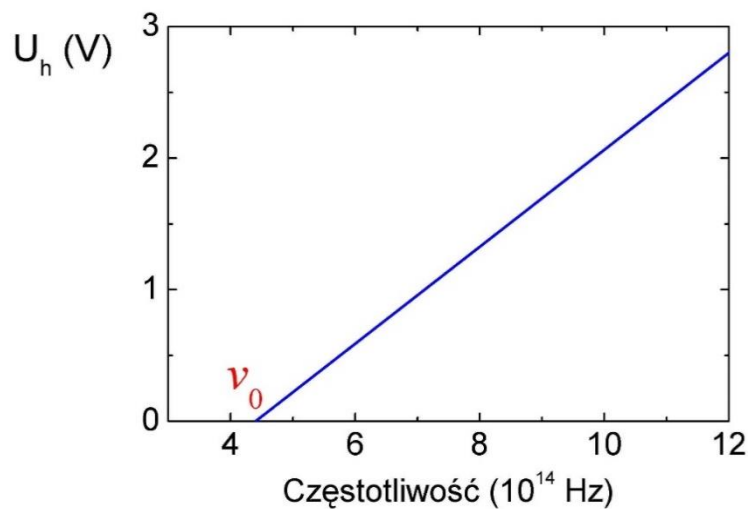
Ponadto zauważmy, że nie wszystkie elektrony mają jednakowo dużą energię kinetyczną bo tylko część z nich dolatuje do elektrody  $B$ ; przy  $U=0$  prąd jest mniejszy od maksymalnego. Wreszcie przy dostatecznie dużym napięciu równym  $U_h$  zwanym *napięciem hamowania*  $\text{P}$  prąd zanika. Różnica potencjałów  $U_h$  pomnożona przez ładunek elektronu  $e$  jest więc miarą energii najszybszych elektronów; przy  $U = U_h$  nawet najszybsze elektrony są zahamowane, nie dochodzą do elektrody  $B$

$$E_{kmax} = eU_h \quad (32.10)$$

Krzywe na rysunku 32.7 różnią się natężeniem padającego światła. Zauważmy, że przy silniejszym oświetleniu (krzywa  $a$ ) otrzymujemy większy prąd nasycenia ale *takie samo napięcie hamowania* jak dla układu oświetlonego słabiej (krzywa  $b$ ).

Widać więc, że  $E_{kmax}$  *nie zależy od natężenia światła*. Zmienia się tylko prąd nasycenia, a to oznacza, że wiązka światła o większym natężeniu wybija więcej elektronów ale *nie szybszych*.

Wynik innego doświadczenia pokazuje rysunek 32.8. Wykreślono tu zależność napięcia hamowania od częstotliwości (barwy) światła padającego na powierzchnię metalicznego sodu. Zauważmy, że otrzymano zależność liniową oraz że istnieje pewna wartość *progowa częstotliwości*  $\nu_0$   $\text{P}$ , poniżej której zjawisko fotoelektryczne nie występuje.



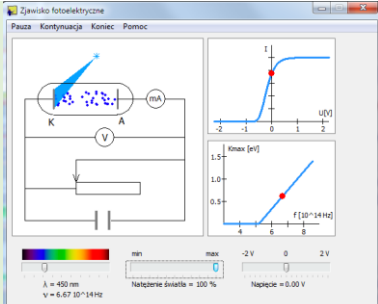
Rys. 32.8. Zależność napięcia hamowania od częstotliwości światła dla sodu

Opisane zjawisko fotoelektryczne ma cechy, których nie można wyjaśnić na gruncie klasycznej falowej teorii światła:


- Z teorii klasycznej wynika, że większe natężenie światła oznacza większą energię fali i większe pole elektryczne  $E$ . Ponieważ siła działająca na elektron wynosi  $eE$  więc gdy rośnie natężenie światła to powinna rosnać też siła i w konsekwencji energia kinetyczna elektronów. Tymczasem stwierdziliśmy, że  $E_{kmax}$  nie zależy od natężenia światła.
- Zgodnie z teorią falową zjawisko fotoelektryczne powinno występować dla każdej częstotliwości światła pod warunkiem dostatecznego natężenia. Jednak dla każdego materiału istnieje progowa częstotliwość  $\nu_0$ , poniżej której nie obserwujemy zjawiska fotoelektrycznego bez względu na to jak silne jest oświetlenie.

- Ponieważ energia w fali jest „rozłożona” w całej przestrzeni to elektron absorbuje tylko niewielką część energii z wiązki (bo jest bardzo mały). Można więc spodziewać się opóźnienia pomiędzy początkiem oświetlenia, a chwilą uwolnienia elektronu (elektron musi mieć czas na zgromadzenie dostatecznej energii). Jednak nigdy nie stwierdzono żadnego mierzalnego opóźnienia czasowego.

Możesz prześledzić zjawisko fotoelektryczne zewnętrzne, w układzie pomiarowym z fotokomórką, korzystając z programu komputerowego „Zjawisko fotoelektryczne” dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.



### 32.4.1 Kwantowa teoria Einsteina zjawiska fotoelektrycznego


Einsteinowi udało się wyjaśnić te własności zjawiska fotoelektrycznego dzięki nowemu rewolucyjnemu założeniu, że energia wiązki świetlnej rozchodzi się w przestrzeni w postaci *skończonych porcji (kwantów) energii* zwanych *fotonami* .

Energia pojedynczego fotonu jest dana wzorem


$$E = h\nu \quad (32.11)$$

Przypomnijmy sobie, że według Plancka źródła emitują światło w sposób nieciągły ale w przestrzeni rozchodzi się ono jako *fala elektromagnetyczna*.

Natomiast Einstein zapostulował, że kwanty światła rozchodzą się w przestrzeni jak *cząstki materii*, i gdy foton zderzy się z elektronem w metalu to może zostać przez elektron pochłonięty. Wówczas energia fotonu zostanie przekazana elektronowi.

 **Prawo, zasada, twierdzenie**  
*Jeżeli do wyrwania elektronu z metalu potrzebna jest energia  $W$  to wówczas*

$$h\nu = W + E_{kmax} \quad (32.12)$$

Wielkość  $W$  charakterystyczna dla danego metalu nazywana jest *pracą wyjścia* . Zgodnie z powyższą zależnością energia  $h\nu$  fotonu, w części ( $W$ ) zostaje zużyta na wyrwanie elektronu z materiału (jego przejście przez powierzchnię), a ewentualny nadmiar energii ( $h\nu - W$ ) elektron otrzymuje w postaci energii kinetycznej, przy czym część z niej może być stracona w zderzeniach wewnętrznych (przed opuszczeniem materiału).

Teoria Einsteina pozwala na wyjaśnienie, przedstawionych wcześniej, osobliwych własności zjawiska fotoelektrycznego:


- Zwiększając natężenie światła zwiększamy liczbę fotonów, a nie zmieniamy ich energii. Ulega więc zwiększeniu liczba wybitych elektronów (fotoprąd), a nie energia elektronów  $E_{kmax}$ , która tym samym nie zależy od natężenia oświetlenia.

- Jeżeli mamy taką częstotliwość  $\nu_0$ , że  $h\nu_0 = W$  to wtedy  $E_{kmax} = 0$ . Nie ma nadmiaru energii. Jeżeli  $\nu < \nu_0$  to fotony niezależnie od ich liczby (natężenia światła) nie mają dość energii do wywołania fotoemisji.
- Dostarczana jest energia w postaci skupionej (kwant, porcja) a nie rozłożonej (fala); elektron pochłania cały kwant.

Korzystając z zależności (32.10) możemy przekształcić równanie (32.12) do postaci

$$U_h = \frac{h}{e} \nu - \frac{W}{e} \quad (32.13)$$

Widzimy, że teoria Einsteina przewiduje liniową zależność pomiędzy napięciem hamowania, a częstotliwością, co jest całkowicie zgodne z doświadczeniem (rysunek 32.8). Teoria fotonowa potwierdza więc fakty związane ze zjawiskiem fotoelektrycznym ale jest sprzeczna z teorią falową, która też została potwierdzona doświadczalnie (zjawisko dyfrakcji, interferencji, polaryzacji).

Jak jest więc możliwe żeby światło było falą i jednocześnie zbiorem cząstek? Nasz obecny punkt widzenia na naturę światła jest taki, że ma ono złożony charakter, to znaczy, że w pewnych warunkach zachowuje się jak fala, a w innych jak cząstka, czyli foton. Tę własność światła nazywa się *dualizmem korpuskularnofalowym* . W zjawisku fotoelektrycznym ujawnia się właśnie korpuskularna (cząstkowa) natura światła.



### Ćwiczenie 32.2

Korzystając z poznanej teorii Einsteina spróbuj teraz na podstawie wykresu 32.8 obliczyć pracę wyjścia dla sodu. W fizyce atomowej energię powszechnie wyraża się w elektronowoltach,  $1\text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{J}$ . Oblicz, również w tych jednostkach, energię fotonu odpowiadającego częstotliwości progowej  $\nu_0$ .

Wynik zapisz poniżej.

$W =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.



### Ćwiczenie 32.3

Czy fotokomórkę, w której zastosowano elektrodę wykonaną z cezu można zastosować jako czujnik dla promieniowania widzialnego? Praca wyjścia dla cezu  $W = 2\text{eV}$ .

Wynik zapisz poniżej.

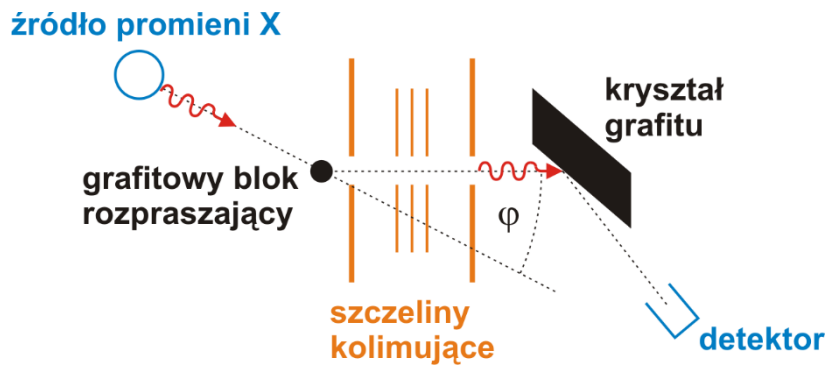
$T =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

### 32.5 Efekt Comptona

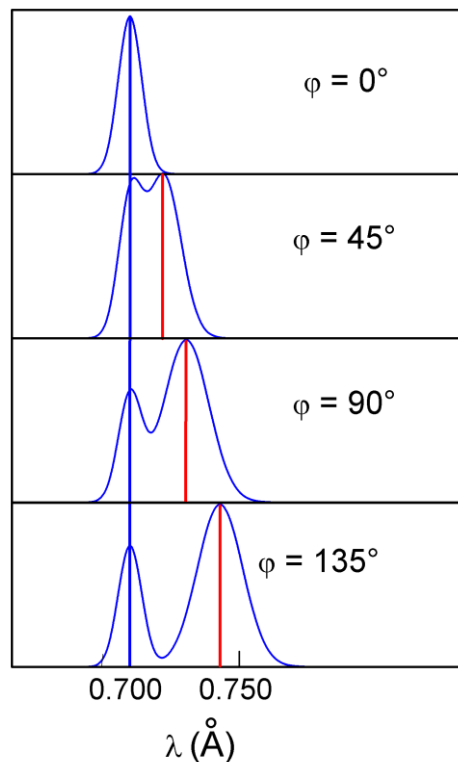
Cząsteczkowa naturę światła można w pełni zaobserwować w doświadczeniu związanym z rozpraszaniem fal elektromagnetycznych na swobodnych elektronach, nazywanym zjawiskiem Comptona.

Po raz pierwszy taki proces został zaobserwowany przez Comptona w 1923 r. W doświadczeniu wiązka promieni X, o dokładnie określonej długości fali pada na blok grafitowy tak jak na rysunku 32.9.



Rys. 32.9. Układ doświadczenia zastosowany przez Comptona

Compton mierzył natężenie wiązki rozproszonej pod różnymi kątami  $\varphi$  jako funkcję długości fali  $\lambda$ . Wyniki doświadczenia są pokazane na rysunku 32.10.



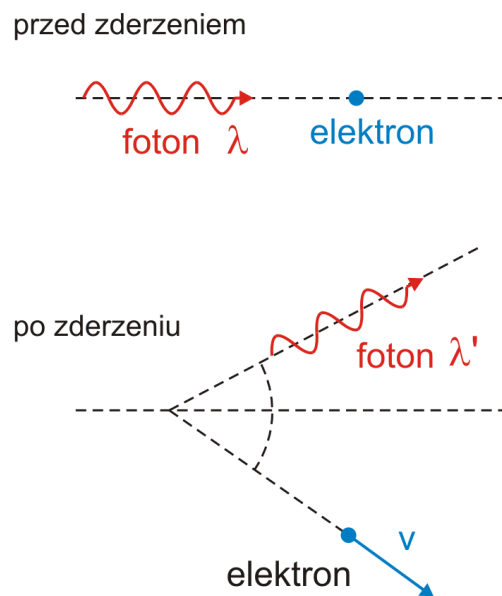
Rys. 32.10. Wyniki doświadczeń Comptona. Linia po lewej stronie odpowiada długości fali  $\lambda$ , a po prawej  $\lambda'$ .



Widać, że chociaż wiązka padająca na grafit ma jedną długość fali to w promieniowaniu rozproszonym występują dwie długości fal. Jedna z nich ma długość  $\lambda$  identyczną jak fala padająca, druga długość  $\lambda'$  większą o  $\Delta\lambda$ . To tak zwane *przesunięcie Comptona*  $\Delta\lambda$  zmienia się wraz z kątem obserwacji  $\varphi$  rozproszonego promieniowania X tzn.  $\lambda'$  zmienia się wraz z kątem.

Jeżeli padające promieniowanie potraktujemy jako falę to pojawienie się fali rozproszonej o zmienionej długości  $\lambda'$  nie daje się wyjaśnić. Dopiero przyjęcie hipotezy, że wiązka promieni X nie jest falą ale strumieniem fotonów o energii  $h\nu$  pozwoliło Comptonowi wyjaśnić uzyskane wyniki.

Założył on, że fotony (jak cząstki) zderzają się z elektronami swobodnymi w bloku grafitu. Podobnie jak w typowych zderzeniach (np. kul bilardowych) zmienia się w wyniku zderzenia kierunek poruszania się fotonu oraz jego energia (część energii została przekazana elektronowi). To ostatnie oznacza zmianę częstotliwości i zarazem długości fali. Sytuacja ta jest schematycznie pokazana na rys 32.11.



Rys. 32.11. Zjawisko Comptona – zderzenie fotonu ze swobodnym elektronem

Stosując do tego zderzenia zasadę zachowania pędu oraz zasadę zachowania energii otrzymujemy wyrażenie na przesunięcie Comptona

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \varphi) \quad (32.14)$$

gdzie  $m_0$  jest masą elektronu (spoczynkową). Tak więc przesunięcie Comptona zależy tylko od kąta rozproszenia.

W tym miejscu konieczny jest komentarz: ponieważ odrzucone elektrony mogą mieć prędkości porównywalne z prędkością światła więc dla obliczenia energii kinetycznej elektronu stosujemy wyrażenie relatywistyczne. Elementy szczególnej teorii względności są omówione w Uzupełnieniu.

**Ćwiczenie 32.4**

Korzystając z poznanych wzorów spróbuj samodzielnie obliczyć jaką maksymalną energię kinetyczną może uzyskać elektron podczas rozpraszania promieniowania X o długości fali  $\lambda = 0.1 \text{ nm}$ ? Wynik zapisz poniżej.

Wskazówka: Oblicz zmianę energii rozpraszanego fotonu.

$\Delta E =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Na koniec musimy jeszcze wyjaśnić występowanie maksimum dla nie zmienionej długości fali  $\lambda$ . Ten efekt jest związany z rozpraszaniem fotonów na elektronach rdzenia atomowego. W takim zderzeniu odrzutowi ulega cały atom o masie  $M$ . Dla grafitu  $M = 22000 m_0$  więc otrzymujemy niemierzalnie małe przesunięcie Comptona.

## 33 Model atomu Bohra

### 33.1 Wstęp

Na początku XX w. znano wiele wyników eksperymentalnych, które wskazywały na to, że atomy zawierają elektrony. Z faktu, że atomy są elektrycznie obojętne wnioskowano, że mają one również ładunek dodatni równy ujemnemu. Ponadto, ponieważ masa elektronów jest bardzo mała w porównaniu z masą najlżejszych nawet atomów oznaczało to, że ładunki dodatnie związane są ze znaczną masą.

Na tej podstawie Thomson zaproponował model budowy atomu, zgodnie z którym ujemnie naładowane elektrony są równomiernie rozłożone wewnątrz obszaru wypełnionego w sposób ciągły ładunkiem dodatnim. Ładunek dodatni tworzył kulę o promieniu rzędu  $10^{-10}$  m.

Dowód nieadekwatności modelu Thomsona podał jego uczeń Rutherford analizując wyniki rozpraszania cząstek alfa na atomach złota. Z przeprowadzonej przez Rutherforda analizy wynikało, że ładunek dodatni nie jest rozłożony równomiernie wewnątrz atomu, ale skupiony w małym obszarze zwanym *jądrem* (o rozmiarze  $10^{-15}$  -  $10^{-14}$  m) leżącym w środku atomu.

Zgodnie z modelem jądrowym Rutherforda:

- Masa jądra jest w przybliżeniu równej masie całego atomu.
- Ładunek jądra jest równy iloczynowi *liczby atomowej*  $Z$  i ładunku elektronu  $e$ .
- Wokół jądra znajduje się  $Z$  elektronów, tak że cały atom jest obojętny.

Taki obraz atomu był zgodny z wynikami doświadczeń nad rozpraszaniem cząstek alfa, ale pozostało wyjaśnienie zagadnienia *stabilności takiego atomu*.

Elektrony w atomie nie mogą być nieruchome bo w wyniku przyciągania z dodatnim jądrem zostałyby do niego przyciągnięte i wtedy „wróciłibyśmy” do modelu Thomsona. Dlatego Rutherford zapostulował, że elektrony w atomach krążą wokół jądra po orbitach. Jeżeli jednak dopuścimy ruch elektronów wokół jądra (tak jak planet wokół Słońca w układzie słonecznym) to też natrafiamy na trudność interpretacyjną:

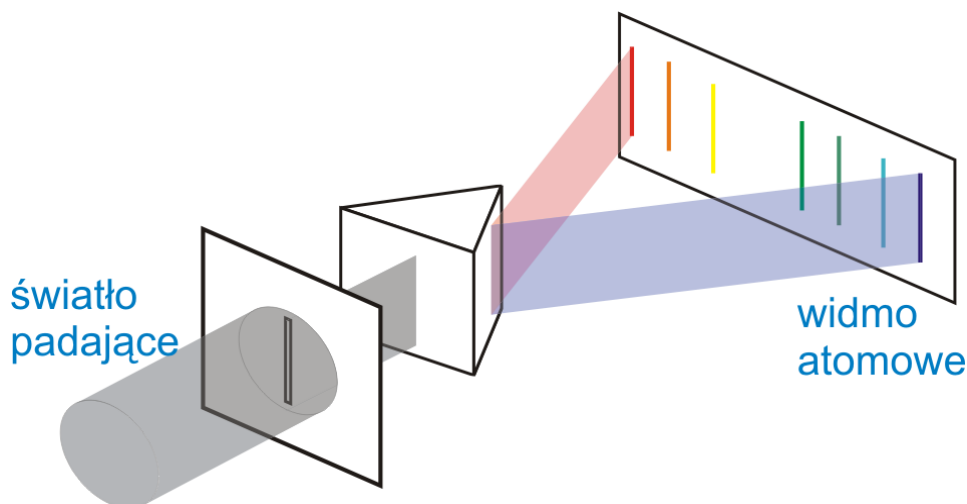
*Zgodnie z prawami elektrodynamiki klasycznej każde naładowane ciało poruszające się ruchem przyspieszonym wysyła promieniowanie elektromagnetyczne.*

Przypomnijmy sobie antenę dipolową, którą omawialiśmy w punkcie 27.3. Zmienne pole elektryczne w antenie wywołuje oscylacje ładunku i antena emituje falę elektromagnetyczną. Podobnie, krążący elektron doznawałby stale przyspieszenia (dośrodkowego) i zgodnie z elektrodynamiką klasyczną wysyłałby energię kosztem swojej energii mechanicznej. Oznaczałoby to, że poruszałyby się po spirali ostatecznie spadając na jądro (model Thomsona).

Zagadnienie stabilności atomów doprowadziło do powstania nowego modelu zaproponowanego przez Bohra. Podstawową cechą tego modelu było to, że umożliwił przewidywanie widm promieniowania wysyłanego przez atomy (których nie wyjaśniał model Rutherforda).

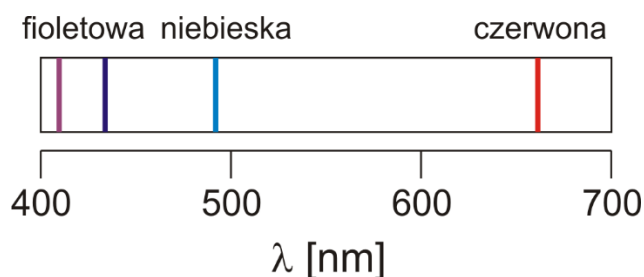
### 33.2 Widma atomowe

Na rysunku 33.1 pokazany jest typowy układ do pomiaru widm atomowych. Źródłem promieniowania jest jednoatomowy gaz pobudzony do świecenia metodą wyładowania elektrycznego (tak jak w jarzeniówce). Promieniowanie przechodzi przez szczelinę kolimującą, a następnie pada na pryzmat (lub siatkę dyfrakcyjną), który rozszczepia promieniowanie na składowe o różnych długościach fal.



Rys. 33.1. Układ do obserwacji emisyjnych widm atomowych

Na rysunku 32.2 pokazana jest widzialna część widma atomu wodoru.



Rys. 33.2. Widmo liniowe atomu wodoru

Na rysunku 33.2 uwidacznia się cecha szczególna obserwowanych widm. W przeciwieństwie do widma ciągłego emitowanego na przykład przez powierzchnie ciał ogrzanych do wysokich temperatur, widma promieniowania pierwiastków w postaci gazów i par, pobudzonych do świecenia na przykład za pomocą wyładowania elektrycznego, są złożone z jasnych, ostrych linii, odpowiadających ściśle określonym długościom fal.

Promieniowanie wysyłane przez swobodne atomy (tzw. *widmo emisyjne* <sup>P</sup>) zawiera tylko pewną liczbę długości fal. Takie widmo nazywamy *widmem liniowym* <sup>P</sup>, a każdą z takich składowych długości fal nazywana jest linią widmową.

Obok widm emisyjnych badano również *widma absorpcyjne* <sup>P</sup>, tym razem obserwując promieniowanie pochłanianie przez gazy zamiast emitowanego.

Okazało się, że jeżeli światło o widmie ciągłym, na przykład światło żarówki, przechodzi przez gaz lub parę, to w widmie ciągłym wysyłanym przez żarówkę widoczne są ciemne linie, promieniowanie o pewnych długościach fal zostało pochłonięte przez gaz (zaabsorbowane). Długości tych fal dokładnie odpowiadają długościom fal widma emisyjnego danego pierwiastka.

Doświadczenia pokazują więc, że pojedyncze atomy (cząsteczki) zarówno emitują jak i absorbują promieniowanie o ściśle określonych długościach fali.

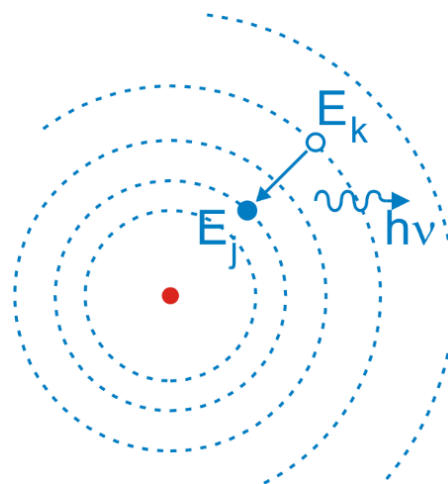
To właśnie badanie widma wodoru doprowadziło Bohra do sformułowania nowego modelu atomu. Model ten chociaż posiada pewne braki to ilustruje ideę kwantowania w sposób prosty matematycznie.

### 33.3 Model Bohra atomu wodoru

Fizyka klasyczna przewidywała, że atom krążący po orbicie będzie wypromieniowywał energię, tak że częstość z jaką krąży elektron i w konsekwencji także częstość wysyłanego promieniowania będą się zmieniać w sposób ciągły. Tymczasem obserwujemy bardzo ostre linie widmowe o ściśle określonej częstotliwości (długości fali).

Sprzeczności te usunął Niels Bohr proponując nowy *kwantowy* model budowy atomu. Klasyczny obraz planetarnego atomu zbudowanego z masywnego jądra i krążących wokół niego pod wpływem siły kulombowskiej elektronów Bohr rozszerzył o nowe kwantowe postulaty:

- Zamiast nieskończonej liczby orbit dozwolonych z punktu widzenia mechaniki klasycznej, elektron może poruszać się tylko po pewnych dozwolonych orbitach.
- Podobnie jak oscylatory Plancka, tak samo atom wodoru może znajdować się tylko w ściśle określonych stacjonarnych stanach energetycznych, w których, pomimo, że elektron doznaje przyspieszenia (poruszając się po orbicie) nie wypromieniowuje energii. Jego całkowita energia pozostaje stała.
- Promieniowanie elektromagnetyczne zostaje wysłane tylko wtedy gdy elektron poruszający się po orbicie o całkowitej energii  $E_k$  zmienia swój ruch skokowo, tak że porusza się następnie po orbicie o niższej energii  $E_j$  (rysunek 33.3 poniżej).



Rys. 33.3. Emisja fotonu przy zmianie orbity elektronu

Częstotliwość emitowanego promieniowania jest równa:

$$\nu = \frac{E_k - E_j}{h} \quad (33.1)$$

Natomiast  $h\nu$  jest energią fotonu, który zostaje w trakcie przejścia wypromieniowany przez atom. Zwróćmy uwagę, że taki był postulat Einsteina głoszący, że częstotliwość fotonu promieniowania elektromagnetycznego jest równa energii fotonu podzielonej przez stałą Plancka.

Wynika stąd, że trzeba wyznaczyć energie stanów stacjonarnych i wtedy obliczając możliwe różnice tych energii będzie można przewidzieć wygląd widma promieniowania emitowanego przez atom.

W tym celu zakładamy, że elektron porusza się po orbitach kołowych o promieniu  $r$  ze środkiem w miejscu jądra oraz że jądro (pojedynczy proton) jest tak ciężkie, że środek masy pokrywa się ze środkiem protonu. Korzystając z drugiej zasady dynamiki Newtona i (prawa Coulomba) otrzymujemy

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (33.2)$$

gdzie uwzględniliśmy tylko przyciąganie elektrostatyczne pomiędzy dodatnim jądrem i ujemnym elektronem zaniehbując oddziaływanie grawitacyjne. (Słuszność tego założenia sprawdziliśmy rozwiązując ćwiczenie 17.1 ).

Na podstawie wzoru (33.3) można obliczyć energię kinetyczną elektronu

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (33.3)$$

Natomiast energia potencjalna układu elektron-proton jest dana równaniem

$$E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (33.4)$$



### Ćwiczenie 33.1

Oblicz teraz stosunek energii kinetycznej do energii potencjalnej elektronu i odpowiedz od czego on zależy. Wynik zapisz poniżej.

$$E_p/E_k =$$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Całkowita energia układu będąca sumą energii kinetycznej i potencjalnej wynosi

$$E = E_k + E_p = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (33.5)$$

Ze wzoru (33.3) na energię kinetyczną możemy wyznaczyć prędkość liniową elektronu

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr}} \quad (33.6)$$

Na tej podstawie pęd elektronu dany jest równaniem

$$p = mv = \sqrt{\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0 r}} \quad (33.7)$$

a moment pędu

$$L = pr = \sqrt{\frac{me^2 r}{4\pi\epsilon_0}} \quad (33.8)$$

Zwróćmy uwagę, że jeżeli znamy promień orbity  $r$ , to znamy również pozostałe wielkości  $E_k$ ,  $E_p$ ,  $E$ ,  $v$ ,  $p$  oraz  $L$ .

Oznacza to również, że jeżeli jakkolwiek z tych wielkości jest *skwantowana* (może przyjmować tylko ściśle określone, a nie dowolne wartości) to wszystkie wymienione wielkości też muszą być *skwantowane*.

Bohr poszukiwał zasady, która dopuszczałaby tylko pewne promienie orbit, czyli tylko pewne wartości energii elektronów i wysunął hipotezę, według której najprostszą jest kwantyzacja parametrów orbity i która mówiła, że moment pędu elektronu musi być całkowitą wielokrotnością stałej Plancka podzielonej przez  $2\pi$ .

Podsumowując, postulaty Bohra dotyczące atomu były następujące:

- Elektron w atomie porusza się po orbicie kołowej pod wpływem przyciągania kulombowskiego pomiędzy elektronem i jądrem i ruch ten podlega prawom mechaniki klasycznej.
- Zamiast nieskończonej liczby orbit, dozwolonych z punktu widzenia mechaniki klasycznej, elektron może poruszać się tylko po takich orbitach, dla których moment pędu  $L$  jest równy całkowitej wielokrotności stałej Plancka podzielonej przez  $2\pi$ .

$$L = n \frac{h}{2\pi}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (33.9)$$

gdzie stała  $n$  jest *liczbą kwantową* .

- Pomimo, że elektron doznaje przyspieszenia (poruszając się po orbicie), to jednak nie wypromieniowuje energii. Zatem jego całkowita energia pozostaje stała.

- Promieniowanie elektromagnetyczne zostaje tylko wysłane gdy elektron poruszający się po orbicie o całkowitej energii  $E_k$  zmienia swój ruch skokowo, tak że porusza się następnie po orbicie o energii  $E_j$ . Częstotliwość emitowanego promieniowania jest równa  $\nu = \frac{E_k - E_j}{h}$ .

Postulat Bohra dotyczy kwantyzacji momentu pędu  $L$  (równanie 33.9). Ale jak już mówiliśmy jeżeli jakakolwiek z wielkości  $E_k, E_p, E, \nu, p, L$  jest skwantowana, to wszystkie muszą być skwantowane.


Łącząc wyrażenie na moment pędu (33.8) z postulatem Bohra (33.9), otrzymujemy

$$r_n = n^2 \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2} = n^2 r_1 \quad n = 1, 2, \dots \quad (33.10)$$

Widzimy jak skwantowane jest  $r$ . Podstawiając ten wynik do wyrażenia na energię całkowitą (33.5) otrzymujemy wartości energii dozwolonych stanów stacjonarnych

$$E_n = \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2 n^2} = \frac{E_1}{n^2} \quad n = 1, 2, \dots \quad (33.11)$$

To równanie przedstawia wartości energii *dozwolonych stanów stacjonarnych*.

Stan z liczbą kwantową  $n = 1$  tzw. *stan podstawowy*  odpowiada najniższej energii  $E_1 = -13.6$  eV, a stan z liczbą kwantową  $n \rightarrow \infty$  odpowiada stanowi o zerowej energii  $E = 0$ , w którym elektron jest całkowicie usunięty poza atom.

Jak widać *wprowadzenie kwantowania orbitalnego momentu pędu elektronu prowadzi do kwantowania jego energii całkowitej*.



### Ćwiczenie 33.2

Jakie są, zgodnie z teorią Bohra, wartości: promienia orbity, energii kinetycznej, energii potencjalnej, prędkości liniowej i prędkości kątowej elektronu w stanie podstawowym ( $n = 1$ ) atomu wodoru? Wynik zapisz poniżej.

$r =$

$E_k =$

$E_p =$

$\nu =$

$\omega =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.



### 33.4 Stany energetyczne i widmo atomowe wodoru

Teoria Bohra przewiduje, że całkowita energia elektronu (i w konsekwencji energia atomu) jest wielkością skwantowaną. Dozwolone wartości energii elektronu są dane wzorem

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} \quad n = 1, 2, \dots \quad (33.12)$$

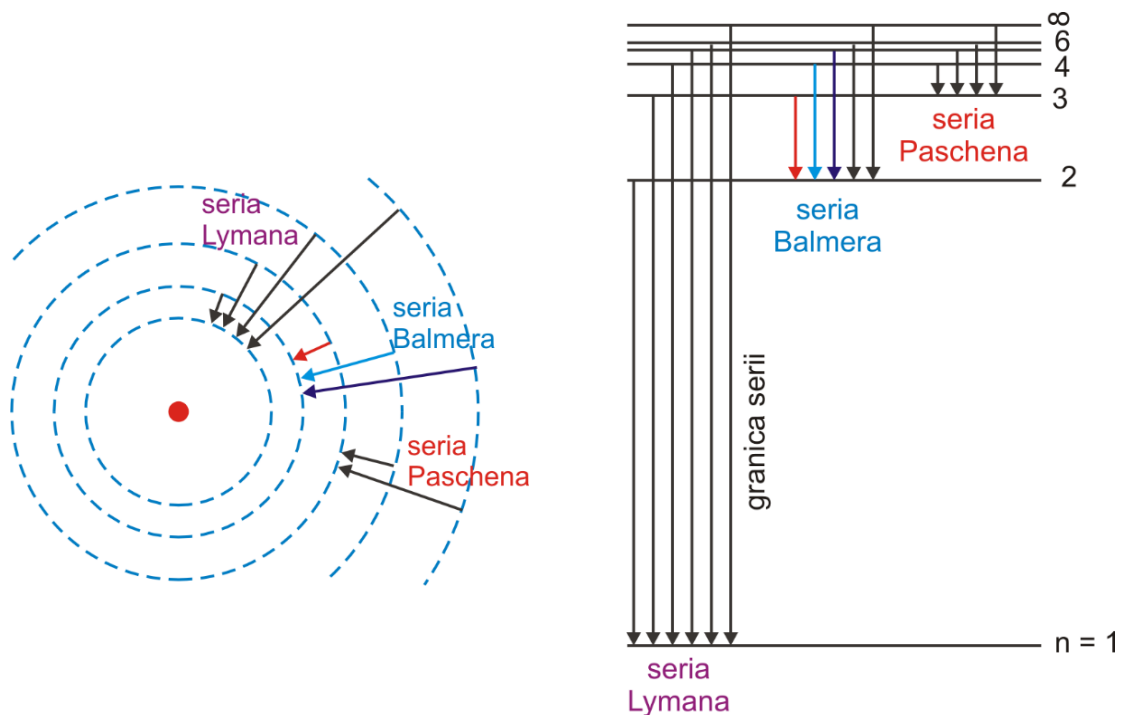
Na podstawie tych wartości możemy, korzystając z zależności (33.1), obliczyć energie kwantów promieniowania emitowanych (lub absorbowanych) przy przejściu między orbitami

$$h\nu = h \frac{c}{\lambda} = E_k - E_j = E_1 \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{j^2} \right) \quad (33.13)$$

gdzie  $j, k$  są liczbami kwantowymi opisującymi niższy i wyższy stan stacjonarny,  $\nu$  jest częstotliwością promieniowania,  $\lambda$  długością fali, a  $c$  prędkością światła.

Na rysunku 33.4a poniżej zaznaczone są symbolicznie (strzałkami) przeskoki między różnymi orbitami, a na rysunku 33.4b energie emitowanych kwantów promieniowania przy przeskokach elektronów pomiędzy odpowiadającymi im stanami stacjonarnymi. Długość każdej ze strzałek odpowiada różnicy energii między dwoma stanami stacjonarnymi czyli równa jest energii  $h\nu$  wypromieniowanego kwantu.

(Na rysunku 33.4a nie są zachowane proporcje pomiędzy promieniami orbit, które zmieniają się zgodnie z relacją  $r_n = r_1 n^2$ .)



Rys. 33.4. Przeskoki między orbitami (a) i schemat poziomów energetycznych w atomie wodoru (b). Zaznaczone są trzy z istniejących serii widmowych

Przejścia pomiędzy stanami stacjonarnymi i odpowiadające im linie widmowe tworzą serie widmowe. Dana seria obejmuje promieniowanie emitowane przy przejściu elektronu z poziomów wyższych na dany np. seria Balmera obejmuje przejścia ze stanów o  $n > 2$  do stanu o  $n = 2$ .

Zauważmy ponadto, że tylko przejściom elektronu na *drugą orbitę* (seria Balmera) towarzyszy emisja promieniowania z zakresu widzialnego. Seria Lymana obejmuje promieniowanie w zakresie nadfioletu, a seria Paschena w podczerwieni.



### Ćwiczenie 33.3

Wiedząc, że energia stanu podstawowego  $E_1 = -13.6$  eV wykaż, że seria widmowa Balmera przypada na zakres widzialny światła?

Wskazówka: Oblicz częstotliwość (długość fali) ze wzoru (33.13) dla  $j = 2$ .

Wynik zapisz poniżej.

$$\lambda (k = 3) =$$

$$\lambda (k = 4) =$$

$$\lambda (k = 5) =$$

$$\lambda (k = 6) =$$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Na gruncie kwantowego modelu Bohra budowy atomu można łatwo zrozumieć własności widm emisyjnych i absorpcyjnych atomów jednoelektronowych. Jednak ten model nie wyjaśniał fundamentalnego faktu, dlaczego pojęć mechaniki klasycznej nie można stosować w świecie atomów (cząstek elementarnych).

Model Bohra został zastąpiony nowym udoskonalonym modelem budowy atomu, w którym położenie elektronu w danej chwili czasu nie jest określone dokładnie lecz z pewnym prawdopodobieństwem, a sam elektron traktowany jest nie jak cząstka ale jako fala materii.

## 34 Fale i cząstki

### 34.1 Fale materii

Przedstawione w poprzednich rozdziałach doświadczenia były interpretowane raz w oparciu o obraz falowy (na przykład dyfrakcja światła) innym razem w oparciu o model cząstkowy światła (na przykład efekt Comptona).


W 1924 r. L. de Broglie zapostulował, że skoro światło ma dwoistą, falowo-cząstkową, naturę, to także materia może mieć taką naturę. Taką sugestię zaprezentował między innymi w oparciu o obserwację, że Wszechświat składa się wyłącznie ze światła i materii oraz że pod wieloma względami przyroda jest symetryczna. De Broglie zasugerował, że należy zbadać czy materia nie wykazuje również *własności falowych*.

Posługując się klasyczną teorią elektromagnetyzmu można pokazać, że światło o energii  $E$  ma pęd  $p = E/c$ . Zatem foton (kwant światła) ma pęd równy

$$p_f = \frac{E}{c} = \frac{hv}{c} = \frac{hc/\lambda}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (34.1)$$

De Broglie nie tylko zasugerował istnienie fal materii ale również przewidział ich długość. Założył, że długość przewidywanych fal materii jest określona tym samym związkiem, który stosuje się do światła

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (34.2)$$

Wyrażenie to wiąże pęd cząstki materialnej z długością *przewidywanych fal materii* . Oba równania (34.1) i (34.2) zawierają wielkość charakteryzującą fale ( $\lambda$ ) jak i wielkość związaną z cząstkami ( $p$ ).



#### Przykład

Sprawdźmy teraz jaką długość fali przewiduje równanie (34.2) dla obiektów „masywnych” przykładowo dla piłki, o masie 1 kg, poruszającej się z prędkością 10 m/s, a jaką dla „lekkich” elektronów przyspieszonych napięciem 100 V?

Dla piłki  $p = mv = 1 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s} = 10 \text{ kg m/s}$ . Stąd długość fali de Broglie’a

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{10 \text{ kgm/s}} = 6.6 \cdot 10^{-35} \text{ m}$$

W porównaniu z rozmiarami obiektu  $\lambda$  jest praktycznie równa zero więc doświadczenia prowadzone na takim obiekcie nie pozwalają na rozstrzygnięcie czy materia wykazuje własności falowe.

Natomiast elektrony przyspieszone napięciem 100 V uzyskują energię kinetyczną  $E_k = eU = 100 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-17} \text{ J}$ . Prędkość jaką uzyskują elektrony wynosi więc

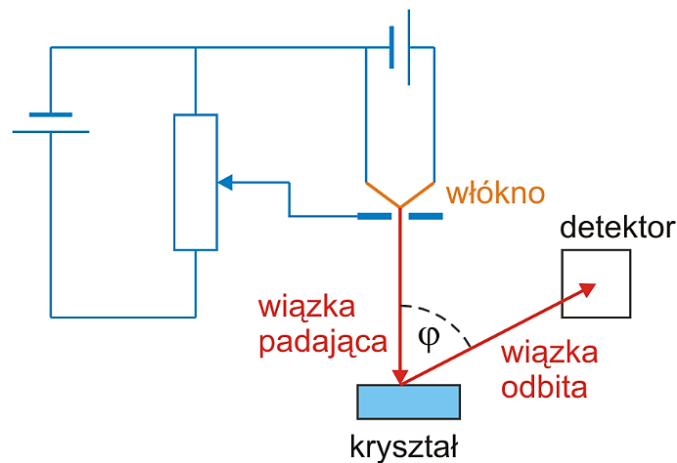
$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 5.9 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

a odpowiednia długość fali de Broglie'a

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 5.9 \cdot 10^6 \text{ kg m/s}} = 1.2 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0.12 \text{ nm}$$

Jest to wielkość rzędu odległości międzyatomowych w ciałach stałych. Można więc zbadać falową naturę materii próbując uzyskać obraz dyfrakcyjny dla wiązki elektronów padających na kryształ analogicznie jak dla promieni Roentgena.

Takie doświadczenie przeprowadzili, w 1926 roku, Davisson i Germer w USA oraz Thomson w Szkocji. Na rysunku 34.1 przedstawiono schemat aparatury pomiarowej.



Rys. 34.1. Układ do pomiaru dyfrakcji elektronów na kryształach

Elektrony emitowane z ogrzewanego włókna przyspieszane są napięciem  $U$ , które można regulować. Wiązka elektronów zostaje skierowana na kryształ niklu, a detektor jest ustawiony pod pewnym szczególnym kątem  $\varphi$ . Natężenie wiązki ugiętej na kryształach jest odczytywane przy różnych napięciach przyspieszających czyli przy różnej energii kinetycznej elektronów.

Okazuje się, że prąd w detektorze ujawnia maksimum dyfrakcyjne przy kącie równym  $50^\circ$  dla  $U = 54 \text{ V}$ . Jeżeli skorzystamy z prawa Bragga (paragraf 30.5) to możemy obliczyć wartość  $\lambda$ , dla której obserwujemy maksimum w tych warunkach

$$\lambda = 2d \sin \theta \quad (34.3)$$

gdzie zgodnie z przyjętymi oznaczeniami  $\theta = 90^\circ - \varphi/2$ .

Długość fali obliczona dla niklu ( $d = 0.091 \text{ nm}$ ) w oparciu o powyższe dane doświadczalne wynosi:  $\lambda = 0.165 \text{ nm}$ .

Z drugiej strony w oparciu o znaną energię elektronów (54 eV) możemy obliczyć długość fali de Broglie'a (tak jak w przykładzie powyżej)


$$\lambda = \frac{h}{p} = 0.165 \text{ nm}$$

Ta doskonała zgodność stanowiła argument za tym, że w pewnych okolicznościach elektrony wykazują *naturę falową*.

Dzisiaj wiemy, że inne cząstki, zarówno naładowane jak i nienaładowane, wykazują cechy charakterystyczne dla fal. Dyfrakcja neutronów jest powszechnie stosowaną techniką eksperymentalną używaną do badania struktury ciał stałych. Tak więc, zarówno dla materii, jak i dla światła, przyjmujemy istnienie dwoistego ich charakteru.

### 34.2 Struktura atomu i fale materii

Teoria sformułowana przez Bohra pozwoliła na wyjaśnienie własności widma atomu wodoru, a przede wszystkim stabilnej struktury atomu. Jednak nie podawała uzasadnienia postulatów, na których się opierała, zwłaszcza reguły kwantowania momentu pędu.

Taką fizyczną interpretację reguł kwantowania Bohra zaproponował de Broglie przyjmując, że elektron krążący wokół jądra po orbicie kołowej ze stałą prędkością jest reprezentowany przez pewną *falę materii - falę elektronową* .

Ta fala, tak jak elektron, przebiega wielokrotnie wzdłuż orbity kołowej, przy czym w każdym kolejnym okresie przebieg ulega dokładnemu powtórzeniu, to znaczy fala jest zgodna w fazie z falami z poprzednich obiegów. W przeciwnym razie powstająca fala wypadkowa miała by natężenie równe zeru.

Ten warunek zgodności faz oznacza, że orbita musi na swym obwodzie mieścić całkowitą liczbę długości fal de Broglie'a

$$2\pi r = n\lambda \quad (34.4)$$

Co w połączeniu z postulatem de Broglie'a prowadzi do wyrażenia

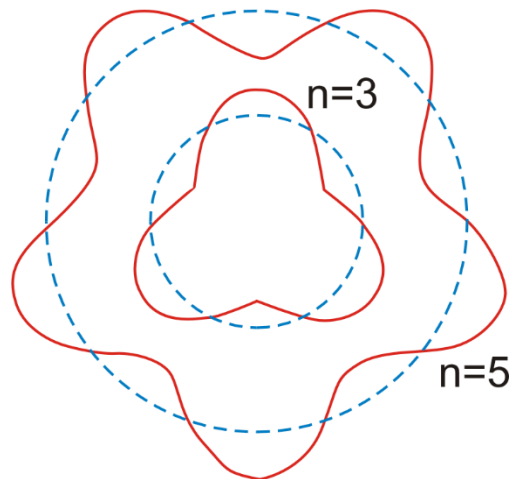
$$2\pi r = n \frac{h}{p} \quad (34.5)$$

Stąd moment pędu elektronu

$$L = pr = n \frac{h}{2\pi} \quad n = 1, 2, \dots \quad (34.6)$$

Otrzymaliśmy warunek Bohra kwantyzacji momentu pędu, który jest teraz konsekwencją przyjęcia założenia, że elektron jest reprezentowany przez odpowiednią falę materii.


Na rysunku 34.2 przedstawione są fale materii związanej z elektronem poruszającym się po orbicie o promieniu  $r$ . Długość fali de Broglie'a została dobrana tak, aby orbita o promieniu  $r$  zawierała całkowitą liczbę  $n$  fal materii.



Rys. 34.2. Ilustracja związanych z elektronem fal materii na orbitach Bohra


Przedstawiony powyżej obraz sugeruje powstawanie stojących fal materii. Mamy do czynienia z sytuacją, w której ruch fal jest ograniczony przez nałożenie pewnych warunków fizycznych (34.4), analogicznie jak dla drgań struny zamocowanej na obu końcach. Przypomnijmy sobie, że mamy wtedy do czynienia z falą stojącą (a nie bieżącą), a co ważniejsze w strunie mogą występować tylko pewne długości fal. Mamy więc do czynienia z kwantyzacją długości fal wynikającą z ograniczeń nałożonych na falę. Co więcej fale stojące nie przenoszą energii (nie może ona płynąć przez węzły, jest na stałe zmagazynowana w poszczególnych punktach przestrzeni); elektron krążący po orbicie nie emituje promieniowania elektromagnetycznego, jest w stanie stacjonarnym.

Postulat de Broglie'a wiążący elektron ze stojącą falą materii przyniósł zadawalające uzasadnienie reguł kwantowania Bohra i stworzył fundament współczesnej teorii opisu stanów atomowych.

Sam jednak nie był wystarczający, bo między innymi nie dawał informacji o sposobie rozchodzenia się fal materii. Nie odpowiadał na pytanie jaką postać może mieć funkcja opisująca fale materii - *funkcja falowa* , jak ją wyznaczyć oraz jaka jest jej interpretacja. Problem ten został wyjaśniony przez Heisenberga i Schrödingera, którzy zaproponowali nowy sposób opisu świata mikrocząstek - *mechanikę kwantową*.

## 35 Elementy mechaniki kwantowej

W 1926 roku E. Schrödinger sformułował *mechanikę falową* (jedno ze sformułowań fizyki kwantowej) zajmującą się opisem falowych własności materii. Według tej teorii, elektron w stanie stacjonarnym w atomie może być opisany za pomocą stojących fal materii, przy czym podstawę stanowi związek de Broglie'a  $p = h/\lambda$  wiążący własności cząsteczkowe z falowymi.

Teoria ta określa prawa ruchu falowego cząstek w dowolnym układzie mikroskopowym. Formuluje równanie opisujące zachowanie się *funkcji falowej*  (funkcja opisująca fale materii) dla takiego układu i określa związek pomiędzy zachowaniem się cząstek, a zachowaniem funkcji falowej opisującej cząstki.

Teoria Schrödingera stanowi uogólnienie hipotezy de Broglie'a.

### 35.1 Funkcja falowa

Dotychczas przypisywaliśmy cząstkom własności falowe podając długość fali materii de Broglie'a stowarzyszonej z daną cząstką. Jednak do pełniejszego opisu własności falowych posługujemy się funkcją reprezentującą falę de Broglie'a, tak zwaną *funkcją falową*  $\psi$ .

Przypomnijmy, że dla fal w strunie zaburzenie opisywaliśmy za pomocą równania fali opisującego poprzeczne wychylenie  $y$  struny (punkt 13.2), a dla fal elektromagnetycznych poprzez równanie opisujące wektor natężenia pola elektrycznego  $E$  (punkt 29.3). Analogiczną miarą dla fal materii jest właśnie funkcja falowa  $\psi$ .

Najogólniej, jest to funkcja współrzędnych przestrzennych i czasu  $\psi(x,y,z,t)$ . Na przykład dla swobodnej cząstki poruszającej się w kierunku osi  $x$  można ją zapisać w postaci prostej funkcji sinusoidalnej o amplitudzie  $A$

$$\psi(x,t) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \quad (35.1)$$

Zauważmy, że wyrażenie to jest identyczne jak wzór (13.4) opisujący rozchodzenie się (w kierunku  $x$ ) fali harmonicznej wzdłuż długiego naprężonego sznura.

O ile jednak znamy fizyczne znaczenie funkcji opisującej zaburzenie falowe dla struny czy fali elektromagnetycznej to pozostaje odpowiedzieć na pytanie jaki jest związek pomiędzy funkcją falową, a opisywanym przez nią elektronem (cząstką), pozostaje wyjaśnić z czym wiąże się funkcja  $\psi$ .

Jako pierwszy fizyczną interpretację funkcji falowej zaproponował M. Born.




#### **Prawo, zasada, twierdzenie**

*Zasugerował, że wielkość  $|\psi|^2$  w dowolnym punkcie przedstawia miarę prawdopodobieństwa, że cząstka znajdzie się w pobliżu tego punktu to znaczy w jakimś obszarze wokół tego punktu np. w przedziale  $x, x+dx$ .*

(Ponieważ funkcja falowa może przyjmować wartości zespolone to uwzględniamy kwadrat *modułu* funkcji falowej).

Ta interpretacja funkcji  $\psi$  daje statystyczny związek pomiędzy falą i związaną z nią cząstką. Nie mówimy gdzie cząstka jest ale gdzie prawdopodobnie się znajdzie.

Jeżeli w jakiejś chwili  $t$ , dokonamy pomiaru mającego na celu ustalenie położenia cząstki opisywanej funkcją falowa  $\psi(x,t)$  to prawdopodobieństwo, że znajdziemy cząstkę w przedziale  $[x, x+dx]$  wynosi  $|\psi(x,t)|^2 dx$ . Wielkość  $|\psi|^2$  jest więc miarą *gęstości prawdopodobieństwa* .

Ponieważ ruch cząstki jest opisywany stowarzyszoną z nią falą materii, to oczekujemy, że w miejscu przebywania cząstki fala materii ma dużą amplitudę. Natomiast gdy amplituda fali materii jest równa zero w pewnych punktach przestrzeni to prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w tym miejscu jest zanedbywalnie małe.

### 35.2 Zasada nieoznaczoności

Zauważmy, że jedną z konsekwencji falowo-cząsteczkowej natury materii jest to, że jedyne czego możemy dowiedzieć się o ruchu elektronów to prawdopodobieństwo znalezienia ich w przestrzeni. Powstaje pytanie czy musimy zadowolić się taką informacją czy też jest możliwy pomiar, który da nam odpowiedź na przykład na temat ewentualnych orbit po których poruszają się elektrony. Czy możemy "dokładnie" opisać ruch elektronu to znaczy *równocześnie* określić jego *położenie* i *prędkość*?

Negatywna odpowiedź na to pytanie jest zawarta w *zasadzie nieoznaczoności* Heisenberga. Pierwsza część tej zasady dotyczy *jednoczesnego* pomiaru położenia i pędu. Głosi ona, że



#### Prawo, zasada, twierdzenie

*Iloczyn nieokreśloności pędu cząstki i nieokreśloności jej położenia w danym kierunku jest zawsze większy od stałej Plancka.*

Ograniczenie to wyrażają nierówności

$$\begin{aligned}\Delta p_x \Delta x &\geq \hbar / 2 \\ \Delta p_y \Delta y &\geq \hbar / 2 \\ \Delta p_z \Delta z &\geq \hbar / 2\end{aligned}\tag{35.2}$$

Zauważmy, że im dokładniej mierzymy składową pędu, np. zmniejszamy  $\Delta p_x$ , tym bardziej rośnie nieoznaczoność składowej położenia  $\Delta x$ .

Druga część zasady nieoznaczoności dotyczy pomiaru energii i czasu potrzebnego na wykonanie tego pomiaru.



#### Prawo, zasada, twierdzenie

*Jeżeli cząstka posiada energię  $E$ , to dokładność jej wyznaczenia  $\Delta E$  zależy od czasu pomiaru  $\Delta t$  zgodnie z relacją.*

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar / 2\tag{35.3}$$

Im dłużej cząstka jest w stanie o energii  $E$  tym dokładniej można tę energię wyznaczyć.



Na szczególne podkreślenie zasługuje fakt, że ograniczenie dokładności pomiarów nie ma nic wspólnego z wadami i niedokładnościami aparatury pomiarowej lecz *jest wynikiem falowej natury cząstek*. Tak małe obiekty jak cząstki elementarne czy atomy nie podlegają prawom mechaniki klasycznej, ale prawom mechaniki kwantowej.

Sama zasada stanowi podstawę stwierdzenia, że w fizyce kwantowej musimy posługiwać się pojęciem prawdopodobieństwa.

Zauważmy, na przykład, że określenie położenia przedmiotów opiera się na rejestrowaniu światła odbitego przez te przedmioty. Po prostu widzimy gdzie są przedmioty. Światło w „zderzeniu” z przedmiotami o dużej masie praktycznie nie zaburza ich ruchu, ale całkiem inną sytuację mamy w przypadku elektronów. Tutaj też moglibyśmy się spodziewać, że zobaczymy elektron gdy odbije się od niego światło. Jednak elektron w zderzeniu z fotonem doznaje odrzutu, który całkowicie zmienia jego ruch (przypomnij sobie zjawisko Comptona). Tej zmiany ruchu elektronu nie można uniknąć ani dokładnie ocenić. Gdyby więc elektron poruszał się po ściśle określonym torze, to znaczy istniałyby orbity, to byłyby one całkowicie niszczone przy próbie pomiarów mających potwierdzić ich istnienie. Dlatego właśnie mówimy o prawdopodobieństwie znalezienia elektronu, a nie o określonych orbitach.



Więcej o zasadzie nieoznaczoności możesz przeczytać w *Dodatkach 1 i 2*, na końcu modułu X.



### Ćwiczenie 35.1

Przyjmijmy, że elektron w atomie wodoru porusza się z prędkością  $v = 10^6$  m/s, którą mierzymy z dokładnością 1%. Z jaką najlepszą dokładnością możemy określić położenie tego elektronu. Wynik porównaj z promieniem orbity w modelu Bohra  $r_1 = 5.3 \cdot 10^{-11}$  m. Czy możemy w tych warunkach traktować elektron jak punkt materialny?

Wynik zapisz poniżej.

$\Delta x =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

## 35.3 Teoria Schrödingera atomu wodoru

### 35.3.1 Równanie Schrödingera

Znajomość ścisłej postaci funkcji falowej jest niezbędna do określenia ruchu cząstek w konkretnych przypadkach (zjawiskach fizycznych). Przykładem może być funkcja falowa  $\psi$ , opisująca ruch cząstki swobodnej, która została przedstawiona w punkcie 35.1.

Taką ścisłą postać funkcji falowej dla dowolnego układu można znaleźć rozwiązując równanie Schrödingera. Jest to równanie różniczkowe opisujące zachowanie się układu kwantowego w czasie i przestrzeni, które w szczególności przyjmuje postać

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)] \psi \quad (35.4)$$

gdzie  $E$  jest energią całkowitą cząstki,  $U(x)$  jej energią potencjalną zależną od jej położenia, a  $\hbar = h/2\pi$ . Zależność (35.4) przedstawia najprostszą formę równania Schrödingera to jest równanie w jednym wymiarze i niezależne od czasu.

Rozwiązanie równania Schrödingera polega na znalezieniu postaci funkcji falowej  $\psi$  i wartości energii cząstki  $E$  przy znanej działającej na cząstkę sile zadanej poprzez energię potencjalną  $U$ .



Więcej o równaniu Schrödingera i przykładach jego rozwiązań możesz przeczytać w *Dodatku 3*, na końcu modułu X.

### 35.3.2 Kwantowomechaniczny opis atomu wodoru

Omówimy teraz zastosowanie teorii Schrödingera do atomu wodoru. Ten przypadek ma szczególne znaczenie, gdyż był to pierwszy układ, do którego Schrödinger zastosował swoją teorię kwantową i który stanowił pierwszą jej weryfikację.

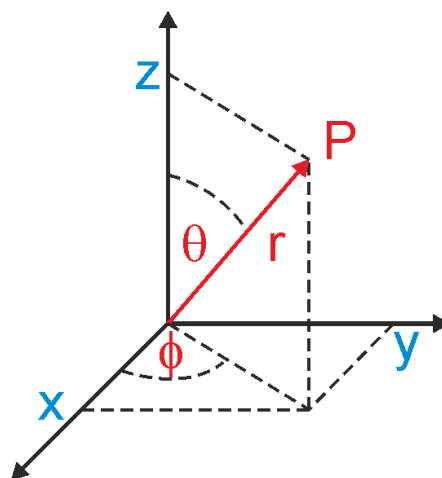
Ponieważ atom wodoru jest układem trójwymiarowym równanie Schrödingera dla atomu wodoru ma bardziej skomplikowaną postać niż podane wcześniej równanie (35.4)

$$\frac{\partial^2 \psi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, z)}{\partial z^2} = -\frac{2m_e}{\hbar^2} [E - U(x, y, z)] \psi \quad (35.5)$$

Zgodnie z równaniem (19.4) energia potencjalna dwóch ładunków punktowych (elektronu i protonu) znajdujących się w odległości  $r$  jest dana wyrażeniem

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (35.6)$$

Równanie Schrödingera (35.5) rozwiązuje się zazwyczaj we współrzędnych sferycznych ( $r$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ ) (rysunek 35.1) bo energia potencjalna oddziaływania elektronu z jądrem (równanie 35.6) zapisana we współrzędnych sferycznych jest funkcją tylko jednej zmiennej ( $r$ ) podczas gdy we współrzędnych prostokątnych funkcją wszystkich trzech współrzędnych ( $x, y, z$ ).



Rys. 35.1. Związek pomiędzy współrzędnymi prostokątnymi ( $x, y, z$ ) i sferycznymi punktu  $P$

Rozwiązanie równania Schrödingera w trzech wymiarach jest problem trudnym matematycznie między innymi ze względu na obliczenia w trzech wymiarach. Dlatego nie będziemy go rozwiązywać, a jedynie omówimy wybrane rozwiązania tego równania dla atomu wodoru.

### 35.3.3 Funkcje falowe

Okazuje się, że we współrzędnych sferycznych można funkcję falową przedstawić najogólniej jako iloczyn dwóch funkcji: funkcji radialnej  $R(r)$  zależnej tylko od promienia  $r$  oraz funkcji kątowej  $Y(\theta, \phi)$  zależnej tylko od kątów.

Rozwiązując równanie Schrödingera dla atomu wodoru stwierdzamy, że funkcja falowa elektronu (będąca rozwiązaniem równania) zależy od trzech liczb całkowitych - *liczb kwantowych*  $n, l, m_l$ .

$$\psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \phi) = R_{n,l} Y_{l,m_l}(\theta, \phi) \quad (35.7)$$

Przypomnijmy, że w dotychczas prezentowanych modelach atomu wodoru, zarówno energia elektronu jak i długość stojącej fali materii stowarzyszonej z elektronem zależały od jednej liczby kwantowej  $n$ .

Tak jest w przypadku ruchu w jednym wymiarze. Jednak trójwymiarowa funkcja falowa zależy od trzech liczb kwantowych co wynika z faktu, że ruch cząstki w przestrzeni jest opisany przez trzy niezależne zmienne; *na każdą współrzędną przestrzenną przypada jedna liczba kwantowa*.

Te trzy liczby kwantowe oznaczane  $n, l, m_l$  spełniają następujące warunki:

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \dots \\ l &= 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{lub} \quad 0 \leq l \leq n-1 \\ m_l &= -l, -l+1, -l+2, \dots, l-2, l-1, l \quad \text{lub} \quad -l \leq m_l \leq l \end{aligned} \quad (35.8)$$

Ze względu na rolę jaką odgrywa liczba  $n$  w określeniu energii całkowitej atomu, jest nazywana *główną liczbą kwantową*  $\mathbb{P}$ . Liczba  $l$  nosi nazwę *azymutalnej liczby kwantowej*  $\mathbb{P}$ , a liczba  $m_l$  nazywana jest *magnetyczną liczbą kwantową*  $\mathbb{P}$ .

Równania Schrödingera ma *poprawne fizycznie* rozwiązania tylko dla liczb kwantowych spełniających warunki (35.8).

Z tych warunków widać, że dla danej wartości  $n$  (danej energii) istnieje na ogół kilka różnych możliwych wartości  $l, m_l$ .

Zgodnie z interpretacją Borna związek pomiędzy falą materii i związaną z nią cząstką wyraża się poprzez kwadrat modułu funkcji falowej  $|\psi|^2$ , który wyraża gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w danym punkcie przestrzeni

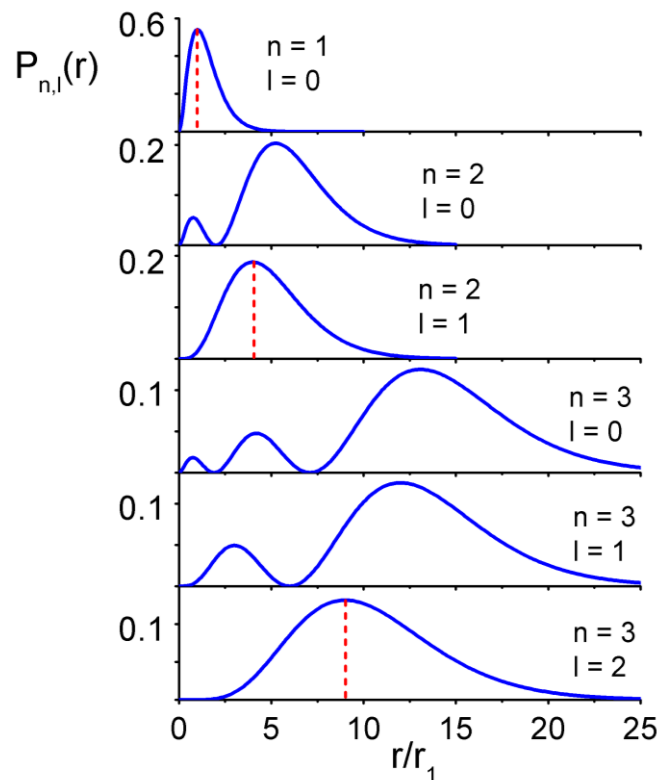
$$|\psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \phi)|^2 = |R_{n,l}(r)|^2 |Y_{l,m_l}(\theta, \phi)|^2 \quad (35.9)$$

Kilka pierwszych funkcji radialnych  $R(r)$  ma postać:

$$\begin{aligned}
 R_{1,0}(r) &= \left(\frac{1}{r_1}\right)^{3/2} \cdot 2 \exp\left(-\frac{r}{r_1}\right) \\
 R_{2,0}(r) &= \left(\frac{1}{2r_1}\right)^{3/2} \cdot 2 \left(1 - \frac{r}{2r_1}\right) \exp\left(-\frac{r}{2r_1}\right) \\
 R_{2,1}(r) &= \left(\frac{1}{2r_1}\right)^{3/2} \cdot 2 \left(\frac{r}{\sqrt{3}r_1}\right) \exp\left(-\frac{r}{2r_1}\right) \\
 R_{3,0}(r) &= \left(\frac{1}{3r_1}\right)^{3/2} \cdot 2 \left(1 - \frac{2r}{3r_1} + \frac{2}{27}\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right) \exp\left(-\frac{r}{3r_1}\right) \\
 R_{3,1}(r) &= \left(\frac{1}{3r_1}\right)^{3/2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(1 - \frac{r}{6r_1}\right) \exp\left(-\frac{r}{3r_1}\right) \\
 R_{3,2}(r) &= \left(\frac{1}{3r_1}\right)^{3/2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}} \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{3r_1}\right)
 \end{aligned} \tag{35.10}$$

gdzie  $r_1$  jest promieniem pierwszej orbity Bohra  $r_1$ . Na rysunku 35.2 pokazane są (dla kilku stanów kwantowych) wykresy radialnej gęstości prawdopodobieństwa, danej wyrażeniem

$$P_{n,l}(r) = r^2 |R_{n,l}(r)|^2 \tag{35.11}$$




Rys. 35.2. Radialna gęstość prawdopodobieństwa dla elektronu w atomie wodoru dla  $n = 1, 2, 3$

(Czynnik  $r^2$  w powyższym równaniu wynika stąd, że prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w obszarze pomiędzy  $r$  i  $r+dr$ , w trzech wymiarach, jest proporcjonalne do elementarnej objętości  $r^2 dr$ ).

Na rysunku 35.2 na osi  $x$  odłożona jest odległość elektronu od jądra  $r$  podzielona przez promień pierwszej orbity Bohra  $r_1$ , natomiast na osi  $y$  przyjęto jednostki umowne. Maksyma gęstości prawdopodobieństwa, zaznaczone linią przerywaną, odpowiadają promieniom orbit w modelu Bohra dla  $n = 1, 2, 3$  ( $r_n = r_1 n^2$ ).

Natomiast, kilka pierwszych funkcji kątowych  $Y(\theta, \phi)$  ma postać:


$$\begin{aligned}
 Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
 Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\
 Y_{1,\pm 1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi} \\
 Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \\
 Y_{2,\pm 1} &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{\pm i\phi} \\
 Y_{2,\pm 2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}
 \end{aligned} \tag{35.12}$$

Kątową gęstość prawdopodobieństwa  $|Y_{l,m_l}(\theta, \phi)|^2$  też można przedstawić graficznie w postaci tak zwanych *wykresów biegunowych* .

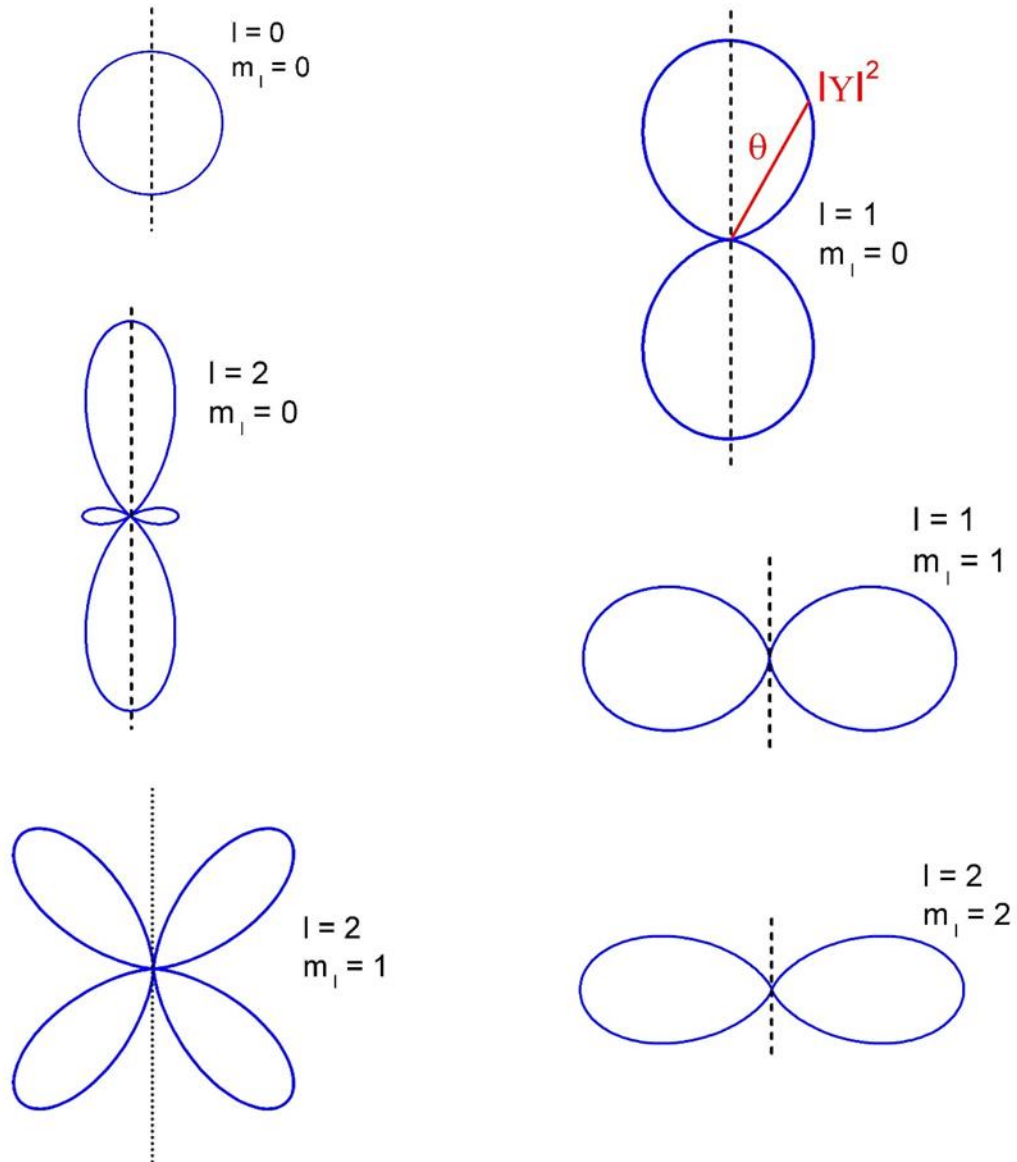
Na rysunku 35.3 pokazane są wykresy biegunowe gęstości prawdopodobieństwa dla kilku stanów kwantowych atomu wodoru.

Początek takiego wykresu umieszczamy w punkcie  $r = 0$  (jądro), a kąt  $\theta$  mierzymy od osi pionowej ( $z$ ). Dla danej wartości kąta  $\theta$  punkt wykresu leży w odległości (mierzonej pod kątem  $\theta$ ) równej  $|Y_{l,m_l}(\theta, \phi)|^2$  od początku układu tak jak to zaznaczono na jednym z wykresów.

Obraz przestrzenny otrzymujemy przez obrót wykresów biegunowych wokół pionowej osi (układ jest symetryczny ze względu na kąt  $\phi$ ).

Kątowe rozkłady prawdopodobieństwa (takie jak na rysunku 35.3) noszą nazwę *orbitali* . Do oznaczenia orbitali stosuje się litery:  $l = 0$  - orbital  $s$ ,  $l = 1$  - orbital  $p$ ,  $l = 2$  - orbital  $d$ ,  $l = 3$  - orbital  $f$ , itd.

Orbitale można traktować jako rozkłady ładunku elektronu wokół jądra. Gdy mówimy, że jądro atomowe jest otoczone chmurą elektronową mamy właśnie na myśli orbitale.



Rys. 35.3. Kątowa gęstość prawdopodobieństwa dla elektronu w atomie wodoru dla  $l = 0, 1, 2$

Możesz wykreślić radialne funkcje falowe atomu wodoru, radialną i kątową gęstość prawdopodobieństwa oraz wizualizację orbitali atomu w 2 wymiarach (dla wybranych liczb kwantowych  $n, l, m$ ) korzystając z programu komputerowego „Funkcje falowe atomu wodoru” dostępnego na stronie WWW autora na stronie Open AGH.

The screenshot shows the software interface with several panels:
 

- Top-left: A graph of the radial wave function  $R_{nl}(r)$  versus  $r$ .
- Top-right: A graph of the radial probability density  $P_{nl}(r)$  versus  $r$ .
- Bottom-left: A graph of the angular probability density  $P_{lm}(\theta, \phi)$  versus  $\theta$  and  $\phi$ .
- Bottom-right: A 3D visualization of the orbital probability density, showing a glowing yellow and orange shape.

### 35.3.4 Energia elektronu

Rozwiązanie równania Schrödingera dla atomu wodoru dostarcza oprócz funkcji falowych również wartości energii elektronu związanego w atomie. Te energie wyrażają się wzorem

$$E_n = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2} = \frac{E_1}{n^2} \quad n = 1, 2, \dots \quad (35.13)$$

Otrzymane wartości są identyczne z przewidywaniami modelu Bohra i wartościami obserwowalnymi doświadczalnie. Wynik ten stanowił pierwszą weryfikację teorii Schrödingera.

Teoria Schrödingera atomu jednoelektronowego ma ogromne znaczenie, bo podając obraz struktury atomu stworzyła podstawy kwantowego opisu wszystkich atomów wieloelektronowych, cząsteczek oraz jąder atomowych.

Opis falowy mikroświata jest już dzisiaj dobrze ugruntowaną teorią, a rozwój technik eksperymentalnych takich jak na przykład skaningowy mikroskop tunelowy pozwala na prowadzenie badań w świecie atomów.

Ten rozdział kończy moduł dziesiąty; możesz teraz przejść do podsumowania i zadań testowych.

## Podsumowanie

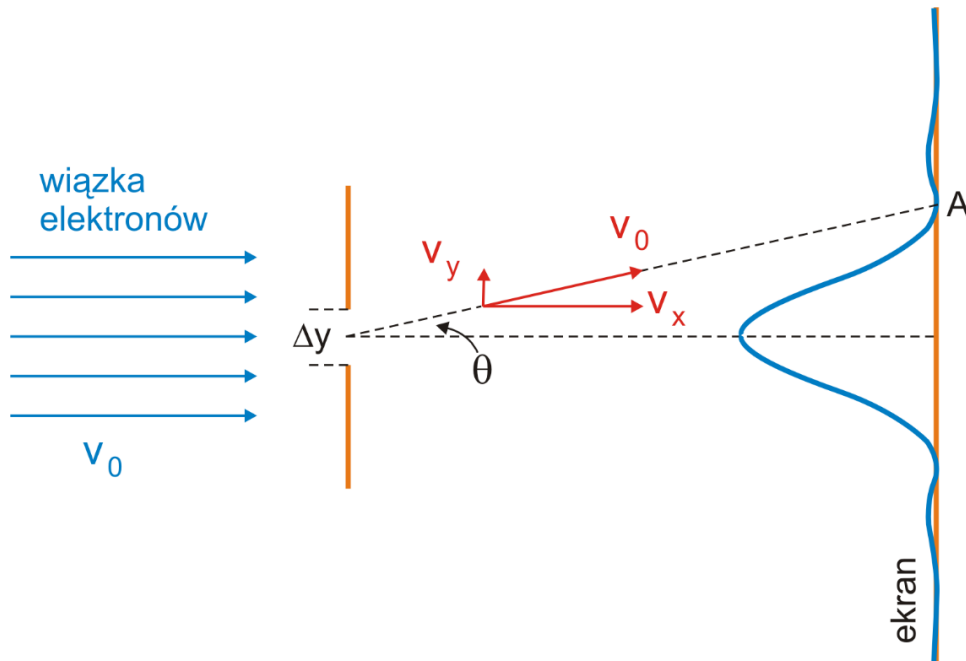
- Emisja energetyczna promieniowania ciała doskonale czarnego zmienia się wraz z temperaturą według prawa Stefana-Boltzmannia  $R = \sigma T^4$ . Długość fali dla której przypada maksimum emisji jest odwrotnie proporcjonalna do temperatury ciała.
- Planck wyjaśnił widmo emisyjne ciała doskonale czarnego zakładając, że atomy nie mogą mieć dowolnej energii, ale tylko ściśle określone wartości dane wzorem  $E = nh\nu$ . Ponadto atomy wypromieniowują energię (kwantami) tylko gdy przechodzą ze stanu stacjonarnego o danej energii do drugiego o innej energii.
- Zgodnie z równaniem Einsteina dla zjawiska fotoelektrycznego  $h\nu = W + E_{kmax}$  energia  $h\nu$  fotonu, w części ( $W$ ) zostaje zużyta na wyrwanie elektronu z materiału (jego przejście przez powierzchnię), a ewentualny nadmiar energii ( $h\nu - W$ ) elektron otrzymuje w postaci energii kinetycznej.
- Cząstkową naturę światła można w pełni zaobserwować w doświadczeniu związanym z rozpraszaniem fal elektromagnetycznych na swobodnych elektronach, nazywanym zjawiskiem Comptona. Zmiana długości fali fotonu rozproszonego  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\varphi)$ , gdzie  $\varphi$  jest kątem odchylenia biegu fotonu.
- Postulaty Bohra dotyczące atomu wodoru: 1) Elektron w atomie porusza się po orbicie kołowej pod wpływem przyciągania kulombowskiego pomiędzy elektronem i jądrem, 2) Elektron może poruszać się tylko po takich orbitach, dla których moment pędu  $L$  jest równy całkowitej wielokrotności stałej Plancka podzielonej przez  $2\pi$ , 3) Promieniowanie elektromagnetyczne zostaje wysłane tylko gdy elektron poruszający się po orbicie o całkowitej energii  $E_k$  zmienia swój ruch skokowo, tak że porusza się następnie po orbicie o energii  $E_j$ . Częstotliwość emitowanego promieniowania jest równa  $\nu = \frac{E_k - E_j}{h}$ .
- Kwantowanie promienia orbity jest opisane warunkiem  $r = n^2 r_1$ , a kwantowanie energii  $E_n = \frac{E_1}{n^2}$ .
- Długość fal materii De Broglie'a jest określona związkiem  $\lambda = \frac{h}{p}$ .
- Ruch elektronów w atomie może być opisany przez stojące fale materii.
- Funkcję falową  $\psi$  przedstawiającą stan cząstki interpretujemy tak, że wielkość  $|\psi|^2$  w dowolnym punkcie przedstawia miarę prawdopodobieństwa, że cząstka znajdzie się w pobliżu tego punktu to znaczy w jakimś obszarze wokół tego punktu.
- Funkcje falowe  $\psi$  cząstki i wartości jej energii  $E$  są rozwiązaniem równania Schrödingera, przy zadanej energii potencjalnej  $U$ .
- Zasada nieoznaczoności Heisenberga głosi, w zastosowaniu do pomiarów pędu i położenia, że iloczyn nieokreśloności pędu cząstki i nieokreśloności jej położenia w danym kierunku jest zawsze większy od stałej Plancka np.  $\Delta p \Delta x \geq h$ . Druga część zasady nieoznaczoności dotyczy pomiaru energii i czasu i stwierdza, że jeżeli cząstka posiada energię  $E$ , to dokładność jej wyznaczenia  $\Delta E$  zależy od czasu pomiaru  $\Delta t$  zgodnie z relacją  $\Delta E \Delta t \geq h$ .



## Materiały dodatkowe do Modułu X

### Zasada nieoznaczoności w pomiarach

Aby przetestować nasze możliwości pomiarowe rozważmy wiązkę elektronów padających z prędkością  $v_0$  na szczelinę o szerokości  $\Delta y$ , tak jak na rysunku poniżej.



Wiązka elektronów ugięta na szczelinie tworzy obraz dyfrakcyjny na ekranie

Jeżeli elektron przechodzi przez szczelinę to znamy jego położenie z dokładnością  $\Delta y$ . Elektrony ulegają ugięciu na szczelinie tak, że na ekranie obserwujemy obraz dyfrakcyjny. Oznacza to, że elektrony mają teraz oprócz prędkości poziomej także składową w kierunku pionowym  $y$  (są odchylone). Spróbujmy ocenić tę składową pionową prędkości. Rozpatrzmy elektron padający na ekran w miejscu pierwszego minimum dyfrakcyjnego (punkt  $A$  na rysunku powyżej). Pierwsze minimum jest dane równaniem

$$\Delta y \sin \theta = \lambda \quad (\text{X.1.1})$$

a dla małego kąta  $\theta$

$$\Delta y \theta \approx \lambda \quad (\text{X.1.2})$$

Elektron dolatujący do punktu  $A$  (1-sze minimum) ma prędkość pionową  $\Delta v_y$  taką, że

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{\Delta v_y}{v_0} \quad (\text{X.1.3})$$

Korzystając z obu powyższych równań otrzymujemy

$$\frac{\Delta v_y}{v_0} = \frac{\lambda}{\Delta y} \quad (\text{X.1.4})$$

lub

$$\Delta v_y \Delta y = \lambda v_0 \quad (\text{X.1.5})$$

Długość fali wiązki elektronowej jest dana przez relację de Broglie'a

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv_0} \quad (\text{X.1.6})$$

Podstawiając tę zależność do równania (X.1.5) otrzymujemy

$$\Delta v_y \Delta y \approx \frac{h v_0}{m v_0} \quad (\text{X.1.7})$$

co można zapisać

$$\Delta p_y \Delta y \approx h \quad (\text{X.1.8})$$

Jeżeli chcemy poprawić pomiar położenia  $y$  (zmniejszyć  $\Delta y$ ) to w wyniku zmniejszenia szerokości szczeliny otrzymujemy szersze widmo dyfrakcyjne (mocniejsze ugięcie). Inaczej mówiąc zwiększone zostało  $\Delta p_y$ .


Otrzymany wynik zgadza się z granicą wyznaczaną przez zasadę nieoznaczoności.

### **Zasada nieoznaczoności i fale materii**

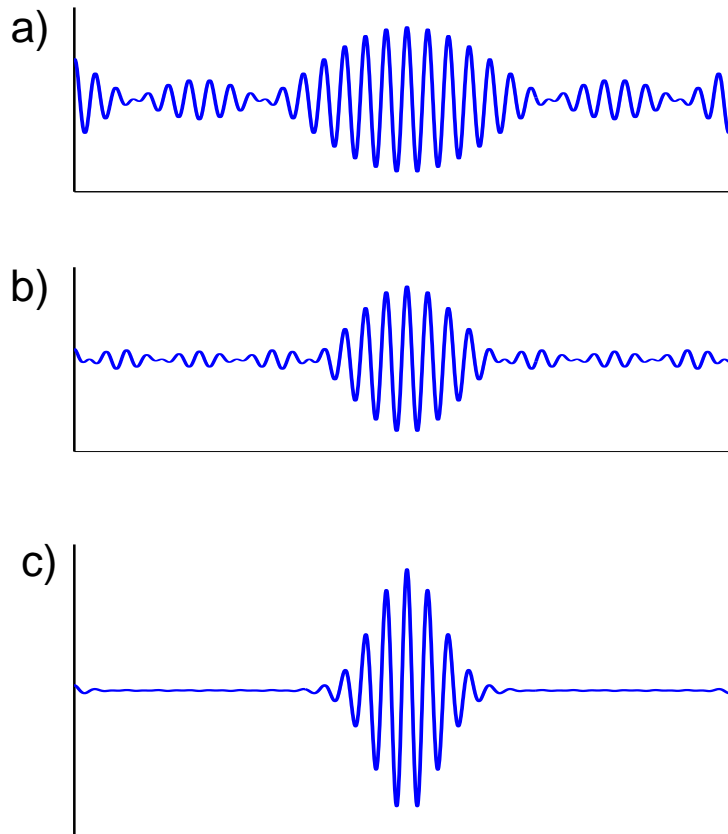
Według hipotezy de Broglie'a dualizmu korpuskularno-falowego każdy obiekt materialny może być opisywany na dwa sposoby: jako zbiór cząstek albo jako fala.

Dla *klasycznej, makroskopowej cząstki* długość fali de Broglie'a, w porównaniu z jej rozmiarami jest praktycznie równa zero więc doświadczenia prowadzone na takim obiekcie nie pozwalają na rozstrzygnięcie czy materia wykazuje własności falowe i możemy *jednoznacznie*, z dowolną dokładnością określić jej położenie (patrz przykład omówiony w punkcie 34.1).

Natomiast, *cząstka kwantowa*, taka jak np. elektron, jest reprezentowana przez falę materii, której amplituda określa prawdopodobieństwo znalezienia cząstki. Z większym prawdopodobieństwem znajdziemy cząstkę, tam gdzie amplituda fali materii jest duża, i z mniejszym prawdopodobieństwem znajdziemy ją tam gdzie ta amplituda jest mała. Jednak fala, zajmuje pewien obszar w przestrzeni, nie jest punktowa, i dlatego położenie cząstki reprezentowanej przez tę falę, *nie jest jednoznacznie* określone. Pomiar położenia cząstki może dać w wyniku każdy punkt, w którym amplituda fali jest niezerowa.

Fala materii opisująca cząstkę nie rozciąga się na całą przestrzeń, ale jest skupiona w pewnym ograniczonym obszarze. Taka fala nosi nazwę *paczki falowej*  i może być traktowana jako złożenie fal harmonicznycych o różnych częstotliwościach. W przeciwieństwie do pojedynczego nieskończonego (niezlokalizowanego) ciągu falowego,

nałożenie na siebie takich nieskończonych fal o długościach (częstotliwościach) należących do pewnego przedziału, daje w wyniku interferencji skończony obiekt zlokalizowany - paczkę falową (rysunek poniżej). W szczególności, sumując nieskończoną liczbę fal o częstościach bliskich sobie i amplitudach opisanych funkcją Gaussa otrzymujemy pojedynczą paczkę falową.



Paczki falowe powstałe w wyniku złożenia odpowiednio a) 3, b) 5 i c) 11 fal o niewiele różniących się częstotliwościami

Paczka falowa, reprezentuje cząstkę zlokalizowaną uwzględniając jej falowe własności. Ponieważ prawdopodobieństwo znalezienia cząstki jest skończone (niezerowe) w całym obszarze paczki falowej to nie mamy pewności co do jej położenia (paczka fal jest rozciągnięta).

Nie mamy również pewności co do pędu bo paczka falowa to złożenie fal o różnej długości czyli o różnych pędach zgodnie z relacją de Broglie'a  $p = h/\lambda$ .

Te niepewności są „zależne od siebie”:

- więcej fal tworzących paczkę to lepsza lokalizacja cząstki ale większa niepewność określenia pędu
- mniej fal tworzących paczkę to lepsza znajomość pędu ale większe rozmycie paczki co oznacza większą niepewność określenia położenia cząstki.

Okazuje się, że nie jest możliwy jednoczesny dokładny pomiar położenia cząstki i jej pędu.

Zasada nieoznaczoności jest konsekwencją dualizmu korpuskularno-falowego.

## Równanie Schrödingera

Przedstawione poniżej rozumowanie nie jest wyprowadzeniem równania Schrödingera, a ma na celu pokazanie, że można sformułować równanie różniczkowe, które wiąże własności falowe i korpuskularne materii.

Według hipotezy de Broglie'a dualizmu korpuskularno-falowego każda cząstka kwantowa, taka jak np. elektron, jest reprezentowana przez falę materii, której amplituda określa prawdopodobieństwo znalezienia cząstki.

Funkcję falową dla swobodnej cząstki możemy zapisać w postaci

$$\psi(x, y, z, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad (\text{X.3.1})$$

Powyższa funkcja zespolona jest kombinacją liniową funkcji  $\sin(kx - \omega t)$  i  $\cos(kx - \omega t)$ , za pomocą których opisywaliśmy rozchodzenie się fal (patrz rozdział 13). Przypomnijmy tu, że sens fizyczny ma kwadrat funkcji falowej, który jest liczbą rzeczywistą.

Korzystając z podanych wcześniej zależności określonych równaniami (13.7)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi\nu \quad (\text{X.3.2})$$

oraz danych wyrażeniami (32.11) i (34.7)

$$p = \frac{h}{\lambda}, \quad E = h\nu \quad (\text{X.3.3})$$

możemy przekształcić funkcję falową (X.3.1) do postaci

$$\psi(x, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} \quad (\text{X.3.4})$$

Teraz, podobnie jak przy wyprowadzeniu równania ruchu falowego (równanie 13.15) wyjdziemy od tego ogólnego równania fali i obliczymy odpowiednie pochodne względem czasu i względem współrzędnej  $x$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \psi \quad (\text{X.3.5})$$

oraz

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\hbar^2} p^2 \psi \quad (\text{X.3.6})$$

skąd otrzymujemy wyrażenia

$$E = \frac{1}{\psi} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (\text{X.3.7})$$

oraz

$$p^2 = -\frac{1}{\psi} \hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (\text{X.3.8})$$

Podobnie jak przy określaniu postaci równania falowego, szukamy równania różniczkowego, którego rozwiązaniem jest funkcja falowa (X.3.4).

W tym celu skorzystamy z klasycznego wzoru na energię całkowitą nierelatywistycznej cząstki

$$E = \frac{p^2}{2m} + U \quad (\text{X.3.9})$$

gdzie  $p^2/2m$  jest energią kinetyczną cząstki, a  $U$  jej energią potencjalną.

Podstawiając za  $E$  i  $p$  odpowiednie wyrażenia (X.3.7) i (X.3.8) oraz mnożąc obustronnie przez  $\psi$  uzyskujemy jednowymiarowe równanie Schrödingera zależne od czasu.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (\text{X.3.10})$$

W przypadku stacjonarnym, gdy energia potencjalna  $U$  nie zależy od czasu to równanie przyjmuje postać podaną już wyrażeniem (35.4)

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)]\psi \quad (\text{X.3.11})$$

a funkcja falowa może być wyrażona w postaci

$$\psi(x, t) = A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et)} \psi(x) \quad (\text{X.3.12})$$

### **Przykłady rozwiązań równania Schrödingera**

- **Cząstka swobodna**

Jeżeli wypadkowa siła działająca na cząstkę jest równa zero to również energia potencjalna  $U$  jest równa zero i całkowita energia cząstki jest jej energią kinetyczną. Załóżmy, że cząstka porusza się w kierunku dodatnich wartości osi  $x$  to wtedy równanie (X.3.11) przyjmuje postać

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} \left( \frac{mv^2}{2} \right) \psi \quad (\text{X.4.1})$$

i można je, korzystając z wyrażenia na pęd cząstki  $p = mv$ , przepisać, jako

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \left(2\pi \frac{p}{h}\right)^2 \psi = 0 \quad (\text{X.4.2})$$

Podstawiając, na podstawie równania (34.2).  $p=h/\lambda$  otrzymujemy

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0 \quad (\text{X.4.3})$$

gdzie  $k = 2\pi/\lambda$  jest liczbą falową.

Ogólne rozwiązanie równania (X.4.3) ma postać:

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (\text{X.4.4})$$

gdzie  $A$  i  $B$  są stałymi. Uwzględniając część funkcji falowej zależnej od czasu (równanie X.3.1) możemy zapisać funkcję falową cząstki swobodnej

$$\psi(x) = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad (\text{X.4.4})$$

gdzie uwzględniono, że w naszym przypadku  $B = 0$ , bo drugi wyraz w równaniu (X.4.4) opisuje falę rozchodzącą się w kierunku  $-x$ , podczas gdy cząstka porusza się w kierunku  $+x$ . Możemy teraz obliczyć gęstość prawdopodobieństwa

$$|\psi(x)|^2 = \psi(x)\psi^*(x) = Ae^{ikx}Ae^{-ikx} = A^2 = \text{const.} \quad (\text{X.4.5})$$

Widzimy, że prawdopodobieństwo znalezienia cząstki swobodnej w każdym punkcie toru ruchu jest jednakowe.

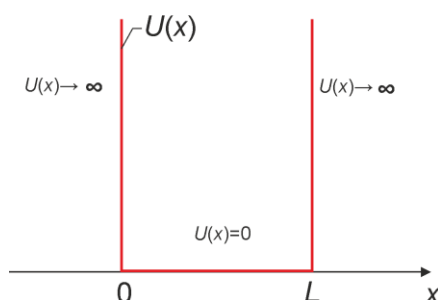
Natomiast wartości własne wynoszą w tym przypadku

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2 k^2}{8m\pi^2} \quad (\text{X.4.6})$$

gdzie uwzględniono zależności  $p=h/\lambda$  oraz  $k = 2\pi/\lambda$

- **Cząstka w (1-wymiarowej) studni potencjału**

Rozpatrzmy teraz prosty przypadek cząstki poruszającej się w jednowymiarowej, nieskończonej studni potencjału o szerokości  $L$  (rysunek poniżej).



Jednowymiarowa, nieskończona studnia potencjału o szerokości  $L$ . Potencjał wynosi zero wewnątrz studni i zmierza do nieskończoności na zewnątrz studni.

Nieskończenie duży potencjał na krawędziach studni nie pozwala elektronom opuścić obszaru  $0 < x < L$ , cząstka odbija się od ścian studni. W obszarze  $0 < x < L$  cząstka porusza się swobodnie i równanie Schrödingera ma tam postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = E\psi(x) \quad (\text{X.4.7})$$

Ponieważ poza obszarem  $0 < x < L$ ,  $U(x) \rightarrow \infty$  więc prawdopodobieństwo znalezienia cząstki poza obszarem gdzie  $U(x) = 0$  jest równe zero, co można zapisać w postaci warunków brzegowych

$$\psi(0) = \psi(L) = 0 \quad (\text{X.4.8})$$

Rozwiązaniem równania Schrödingera (X.4.7) przy warunkach brzegowych (X.4.8) jest funkcja falowa

$$\psi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (\text{X.4.9})$$

gdzie  $n$  jest liczbą kwantową. To rozwiązanie jest analogiczne do równania opisującego falę stojącą w strunie zamocowanej na obu końcach.

Wstawiając to rozwiązanie do równania (X.4.7) otrzymujemy dyskretne wartości energii cząstki (wartości własne)

$$E_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2}\right)n^2 \quad (\text{X.4.10})$$

Energia cząstki zamkniętej w studni potencjału może przyjmować jedynie dyskretne (skwantowane) wartości. Co więcej, cząstka nie może mieć zerowej energii kinetycznej, co oznacza, że niemożliwe jest, aby ta cząstka była w spoczynku. Na rysunku poniżej pokazane są trzy pierwsze funkcje falowe cząstki w studni potencjału i odpowiadające im stany energetyczne.

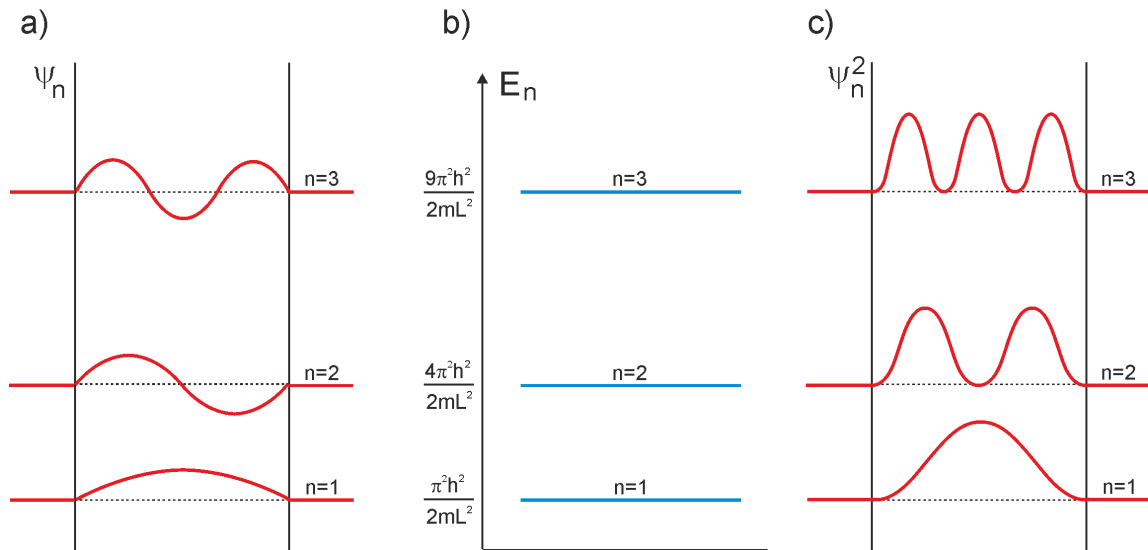
Rozkład gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstki kwantowej w nieskończonej studni potencjału, w pobliżu punktu  $x$  jest dany wyrażeniem

$$\psi_n^2(x) = A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (\text{X.4.11})$$

i jest również pokazany na rysunku poniżej.

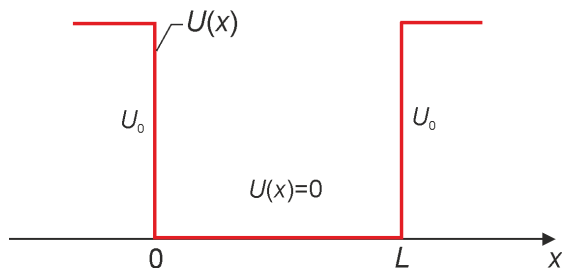
Widzimy, że gdy cząstka znajduje się w stanie podstawowym ( $n = 1$ ), to najbardziej prawdopodobne jest znalezienie jej w środku studni. Rozkład gęstości prawdopodobieństwa ma tam największą wartość. Natomiast w przypadku pierwszego stanu wzbudzonego ( $n = 2$ ) gęstość prawdopodobieństwa w środku studni ma wartość zero; cząstki nie znajdziemy

w tym miejscu. Natomiast największe prawdopodobieństwo znalezienia jej występuje w dwóch miejscach gdzie rozkład prawdopodobieństwa ma maksima, co różni się od praw fizyki klasycznej.



Pierwsze trzy stany kwantowe cząstki w nieskończonej studni potencjału: a) funkcje falowe (fale stojące), b) dozwolone stany energetyczne, c) rozkład gęstości prawdopodobieństwa.

Nieskończona studnia kwantowa jest obiektem teoretycznym. Na rysunku poniżej pokazana jest realistyczna sytuacja, możliwej do zrealizowania studni potencjału, w której energia potencjalna elektronu poza studnią ma skończoną wartość dodatnią  $U_0$ , zwaną głębokością studni.



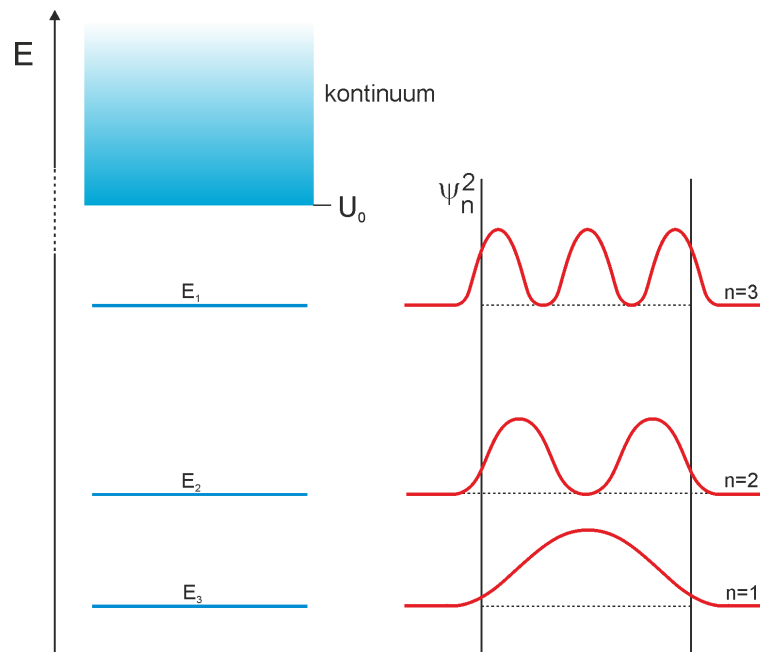
Skończona studnia potencjału o szerokości  $L$ . Potencjał wynosi zero wewnątrz studni i ma skończoną wartość  $U_0$  na zewnątrz studni.

Wewnątrz studni, gdzie potencjał jest równy zero, sytuacja jest analogiczna jak w nieskończonej studni potencjału; wartości własne energii są w dalszym ciągu skwantowane i zależą od głębokości studni. Gdy energia cząstki jest większa od głębokości studni, energie tworzą continuum (dozwolona jest każda wartość energii jak pokazano na rysunku poniżej).

Podstawowa różnica polega na tym, że funkcje własne nie znikają na granicy obszaru studni. Ponieważ studnia jest skończona, to cząstka może nieco wnikać w obszar zabroniony, pomimo „za małej” energii, a funkcja falowa zanika w tym obszarze eksponentalnie, tym wolniej, im cząstka ma większą energię (rysunek poniżej). Znalezienie cząstki poza studnią ma skończone prawdopodobieństwo, co w mechanice klasycznej jest niemożliwe.

Z tego typu potencjałami mamy, na przykład, do czynienia w półprzewodnikowych diodach, półprzewodnikowych laserach, kropkach kwantowych.





Cząstka uwięziona w skończonej studni potencjału ma energie skwantowane  $n = 1, 2, 3 \dots n_{max}$   
 Gdy  $E > U_0$  energia nie jest skwantowana. Rozkład gęstości prawdopodobieństwa - znalezienie cząstki poza studnią ma skończone prawdopodobieństwo.

Skoro cząstka może wniknąć w obszar zabroniony (klasycznie), to jeżeli ma on małą szerokość (jest dostatecznie wąski), cząstka może przeniknąć przez ten obszar, jest to wytłumaczenie efektu tunelowego.

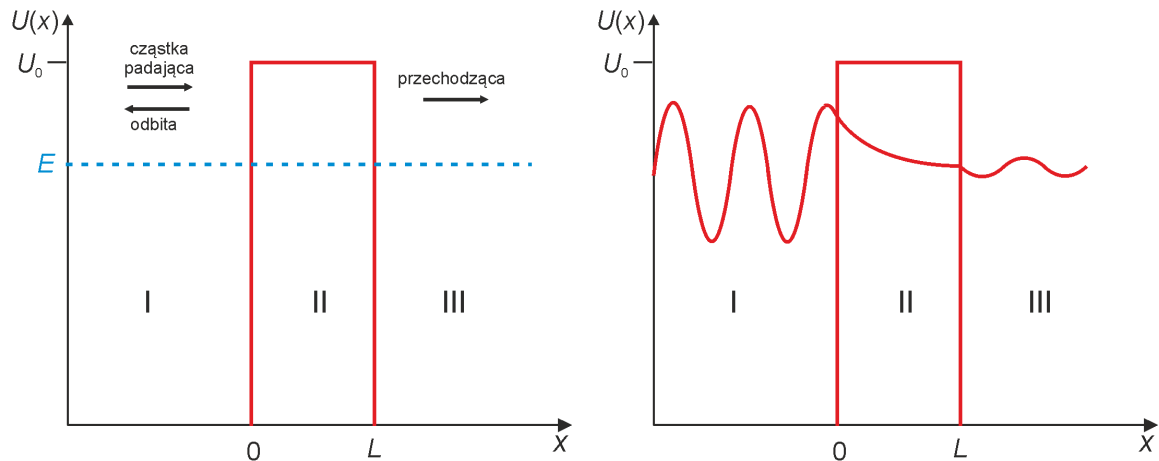
- **Tunelowanie cząstki przez barierę potencjału**

Zjawiskiem przewidywanym przez mechanikę kwantową, a niedopuszczalnym przez mechanikę klasyczną, jest zjawisko tunelowe, polegające na przenikaniu cząstek przez barierę potencjału o wysokości (energii) znacznie przekraczającej energię cząstki.

W mechanice klasycznej, żeby pokonać barierę potencjału, na przykład pokonać wzgórze o wysokości  $h$  cząstka musi mieć energię kinetyczną większą od jej energii potencjalnej na wysokości  $h$  i wtedy na pewno znajdzie się po drugiej stronie wzgórza. Prawdopodobieństwo pokonania tej przeszkody, bariery jest więc równe 1. W przeciwnej sytuacji ( $E_k < mgh$ ) cząstka nie pokona bariery, nie wjedzie na szczyt, pozostanie po tej stronie wzgórza, a prawdopodobieństwo znalezienia jej po drugiej stronie wzgórza równe jest 0.

Natomiast w fizyce kwantowej taka cząstka (o energii mniejszej od energii bariery), może wniknąć w obszar zabroniony i z pewnym prawdopodobieństwem może znaleźć się po drugiej stronie bariery. Co więcej cząstka o energii większej od bariery nie zawsze musi przejść nad barierą; może, z pewnym prawdopodobieństwem, odbić się od bariery i zawrócić, co w mechanice klasycznej jest niemożliwe. Ta sytuacja jest zobrazowana na rysunku poniżej.

Oznacza to, że funkcje falowe odpowiadające cząstce zachowują się inaczej przed barierą potencjału, w jej obszarze i za barierą potencjału. Żeby zbadać pokonywanie bariery potencjału przez funkcję falową należy rozwiązać równanie Schrödingera. W obszarach poza barierą potencjału (I i III), gdzie cząstka porusza się swobodnie, rozwiązania mają charakter oscylujący, a zanikający wykładniczo w obszarze bariery (II). Rozwiązania dla trzech wymienionych obszarów pokazane zostały na rysunku poniżej.



Tunelowanie cząstki przez barierę potencjału  $U_0$ . Rozwiązania stacjonarnego równania Schrödingera dla tunelującej cząstki w obszarach I, II i III.

We współczesnej technice zjawisko tunelowe jest wykorzystywane w półprzewodnikowych elementach elektronicznych takich jak dioda tunelowa oraz w urządzeniach takich jak skaningowy mikroskop tunelowy. Fuzja jądrowa w Słońcu zachodzi w dużym stopniu dzięki zjawisku tunelowemu.

## Rozwiązania ćwiczeń z modułu X

### Ćwiczenie 32.1

Dane:  $R = 355 \text{ W/m}^2$ .

Temperaturę obliczamy korzystając z prawa Stefana-Boltzmana

$$T = \left( \frac{R}{\sigma} \right)^{\frac{1}{4}}$$

gdzie  $\sigma$  jest uniwersalną stałą (stała Stefana-Boltzmana) równą  $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2\text{K}^4)$ .

Podstawiając dane otrzymujemy  $T = 281.3 \text{ K}$  czyli  $8 \text{ }^\circ\text{C}$ . Uzyskany wynik jest zgodny ze średnią temperaturą powierzchni Ziemi.

### Ćwiczenie 32.2

Dane: Z wykresu 32.8 odczytujemy wartość progowej częstotliwości dla sodu  $\nu_0 = 4.5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ ,  $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ,  $1\text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

Jeżeli światło ma progową częstotliwość  $\nu_0$ , to  $h\nu_0 = W$  bo wtedy  $E_{kmax} = 0$ .

Pracę wyjścia obliczamy więc z zależności  $W = h\nu_0$ .

Po podstawieniu danych otrzymujemy  $W = 2.98 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1.86 \text{ eV}$ .

Tyle właśnie wynosi energia fotonu o częstotliwości progowej  $\nu_0$ .

### Ćwiczenie 32.3

Dane:  $W = 2 \text{ eV}$ ,  $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ,  $1\text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

Promieniowanie widzialne obejmuje zakres długości fal od 400 do 700 nm.

Odpowiada to zakresowi częstotliwości ( $\nu = c/\lambda$ ) od  $7.5 \cdot 10^{14}$  do  $4.3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  i zakresowi energii fotonów ( $E = h\nu$ ) od 1.78 do 3.11 eV

Oznacza to, że fotokomórkę, w której zastosowano elektrodę wykonaną z cezu można zastosować jako czujnik dla promieniowania widzialnego ale nie w całym zakresie bo częstotliwość progowa dla cezu wynosi  $\nu_0 = W/h = 4.8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  i promieniowanie czerwone, pomarańczowe i żółte nie będzie przez nią rejestrowane.

### Ćwiczenie 32.4

Dane:  $\lambda = 0.1 \text{ nm}$ ,  $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ,  $m_0 = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $1\text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

Przesunięcie Comptona jest dane wyrażeniem

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi)$$

i przyjmuje maksymalną wartość dla  $\varphi = 180^\circ$ . Wówczas

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_0 c}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy  $\lambda' = 0.105 \text{ nm}$ .

Zmianie długości fali odpowiada zmiana częstotliwości i w konsekwencji zmiana energii fotonów

$$\Delta E = h\nu - h\nu' = h \frac{c}{\lambda} - h \frac{c}{\lambda'}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy  $\Delta E = 592 \text{ eV}$ . Zmiana energii rozpraszającego fotonu jest równa energii kinetycznej jaką zyskuje elektron podczas zderzenia z fotonem.

### Ćwiczenie 33.1

Obliczamy stosunek energii kinetycznej do energii potencjalnej elektronu

$$\frac{E_k}{E_p} = \frac{\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}}{-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}} = -\frac{1}{2}$$

Widzimy, że stosunek tych energii jest stały (nie zależy od promienia orbity).

### Ćwiczenie 33.2

Dane:  $n = 1$ ,  $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ,  $E_1 = -13.6 \text{ eV}$ ,  $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

Promień orbity obliczamy z zależności (33.10)

$$r_n = n^2 \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2} = n^2 r_1 \quad n = 1, 2, \dots$$

podstawiając dane otrzymujemy  $r_1 = 5.3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ .

Stosunek energii kinetycznej do energii potencjalnej elektronu jest stały i wynosi

$$\frac{E_{k1}}{E_{p1}} = -\frac{1}{2}$$

Ponadto energia całkowita

$$E_1 = E_{k1} + E_{p1}$$

Na podstawie tych dwóch równań otrzymujemy:

$$E_{k1} = -E_1 = 13.6 \text{ eV} \quad E_{p1} = 2E_1 = -27.2 \text{ eV}.$$

Prędkość liniową obliczamy z zależności (33.16)

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr}}$$

podstawiając dane otrzymujemy (dla  $r_1 = 5.3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ )  $v_1 = 2.2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ .  
Częstotliwość jest związana z prędkością liniową i promieniem relacją

$$v = \frac{v}{2\pi r}$$

podstawiając dane ( $r_1 = 5.3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$  oraz  $v_1 = 2.2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ ) otrzymujemy  $\nu = 6.6 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ .

### Ćwiczenie 33.3

Dane:  $E_1 = -13.6 \text{ eV}$ ,  $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ,  $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

Energie fotonów wyrażają się wzorem (33.13)

$$h\nu = h \frac{c}{\lambda} = E_k - E_j = E_1 \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{j^2} \right)$$

Dla serii Balmera ( $j = 2$ ) otrzymujemy kolejno:

dla  $k = 3$ ,  $h\nu_1 = 1.89 \text{ eV}$  oraz  $\lambda_1 = 658 \text{ nm}$  - światło czerwone,

dla  $k = 4$ ,  $h\nu_2 = 2.55 \text{ eV}$  oraz  $\lambda_2 = 487 \text{ nm}$  - światło niebieskie,

dla  $k = 5$ ,  $h\nu_3 = 2.86 \text{ eV}$  oraz  $\lambda_3 = 435 \text{ nm}$  - światło fioletowe,

dla  $k = 6$ ,  $h\nu_4 = 3.02 \text{ eV}$  oraz  $\lambda_4 = 412 \text{ nm}$  - na granicy między światłem widzialnym i nadfioletem,

a dla  $n \rightarrow \infty$ ,  $h\nu_\infty = 3.40 \text{ eV}$  oraz  $\lambda_\infty = 366 \text{ nm}$  - nadfiolet (poza obszarem widzialnym).

### Ćwiczenie 35.1

Dane:  $v = 10^6 \text{ m/s}$ ,  $\Delta v/v = 1\%$ ,  $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ,  $r_1 = 5.3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ .

Nieokreśloność prędkości elektronu (np. w kierunku  $x$ ) wynosi  $\Delta v_x = 0.01 \cdot v = 10^4 \text{ m/s}$ , a nieokreśloność jego pędu  $\Delta p_x = m_e \cdot \Delta v = 9.1 \cdot 10^{-27} \text{ kgm/s}$ .

Nieokreśloność położenia wyznaczamy z zasady nieoznaczoności

$$\Delta x \geq \frac{h}{\Delta p_x}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy  $\Delta x = 7.3 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ . Nieokreśloność położenia elektronu jest o trzy rzędy wielkości większa od promienia pierwszej orbity w modelu Bohra.

**Test X**

1. Włókno wolframowe żarówki o mocy 60 W ma średnicę  $d = 0.3$  mm i długość równą  $l = 10$  cm. Oblicz temperaturę spirali, zakładając, że zdolność emisji spirali wolframowej wynosi  $e = 0.26$  zdolności emisyjnej ciała doskonale czarnego.
2. Praca wyjścia dla litu wynosi  $W = 2.3$  eV. Czy wystąpi efekt fotoelektryczny, gdy oświetlimy jego powierzchnię kolejno światłem o długości 500 nm i 650 nm ?
3. Światło żółte o długości  $\lambda = 589$  nm jest rejestrowane przez oko ludzkie przy minimalnej mocy promieniowania padającego na siatkówkę  $P = 1.7 \cdot 10^{-8}$  W. Jaka jest ilość fotonów padających na siatkówkę oka w ciągu jednej sekundy?
4. Jakie powinno być napięcie hamowania, jeśli praca wyjścia z metalu wynosi  $W = 2.3$  eV, a oświetlany jest promieniowaniem o długości 400 nm ? Jaka jest maksymalna prędkość elektronów wybijanych z powierzchni tego metalu?
5. Fotony o długości fali  $\lambda = 0.005$  nm zderzają się ze swobodnymi elektronami. Jaka jest długość fotonu rozproszonego odpowiednio pod kątem  $30^\circ$ ,  $90^\circ$  i  $180^\circ$ ?
6. Gazowy wodór został wzbudzony do stanu  $n = 4$ . Jaką energię zaabsorbował atom? Ile linii zaobserwujemy w widmie emisyjnym tego gazu?
7. Jaka energia jest potrzebna do usunięcia poza atom wodoru elektronu znajdującego się w stanie  $n = 6$  ?
8. Ile wynosi długość fali de Broglie'a tak zwanych neutronów termicznych w temperaturze 300 K ? Energia kinetyczna takiego neutronu jest równa  $\frac{3}{2}kT$ , gdzie  $k$  jest stałą Boltzmann.
9. Spróbuj pokazać, że jeżeli niepewność położenia cząstki jest równa długości jej fali de Broglie'a to niepewność jej prędkości jest równa tej prędkości.

# MODUŁ XI

## 36 Atomy wieloelektronowe

W poprzednim module mówiliśmy o zastosowaniu mechaniki kwantowej do opisu falowych własności materii w tym do opisu atomu wodoru. Między innymi pokazaliśmy, że ta teoria przewiduje, że całkowita energia elektronu w atomie jednoelektronowym jest wielkością skwantowaną.

Na tej podstawie można wnioskować z kolei, że *w atomie wieloelektronowym* całkowita energia każdego z elektronów również jest skwantowana i w konsekwencji skwantowana też jest energia całego atomu.

Pokażemy teraz w jaki sposób mechanika kwantowa pozwala zrozumieć strukturę *atomów wieloelektronowych* wyjaśniając między innymi dlaczego w atomie znajdującym się w stanie podstawowym wszystkie elektrony *nie są związane na najbardziej wewnętrznej powłoce* (orbicie). Fizyka klasyczna nie wyjaśnia tego problemu; dopiero mechanika kwantowa przyniosła podstawy teoretyczne, na gruncie których można przewidzieć własności pierwiastków.

### 36.1 Orbitalny moment pędu i spin elektronu

Rozwiązując równanie Schrödingera dla atomu wodoru stwierdziliśmy, że funkcja falowa elektronu zależy od trzech liczb kwantowych  $n, l, m_l$ , przy czym stwierdziliśmy, że główna liczba kwantowa  $n$  jest związana z kwantowaniem energii całkowitej elektronu w atomie wodoru.

Okazuje się, że liczby kwantowe  $l, m_l$  opisują z kolei kwantowanie przestrzenne momentu pędu elektronu.

#### 36.1.1 Orbitalny moment pędu

Zgodnie z zasadami mechaniki klasycznej moment pędu elektronu krążącego wokół jądra w odległości  $r$  jest dany wyrażeniem

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m_e \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (36.1)$$

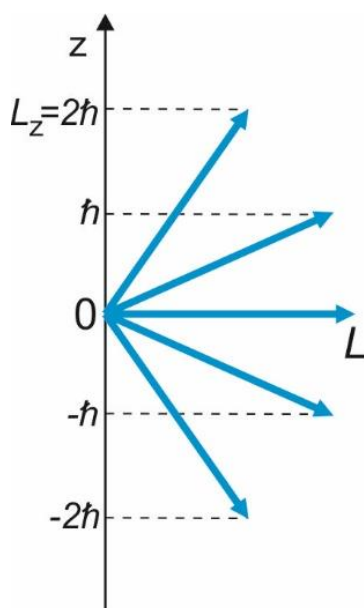
Jednak z zasady nieoznaczoności (punkt 35.2) wynika, że nie można jednocześnie w dokładny sposób wyznaczyć *położenia* i *pędu* elektronu więc nie można też dokładnie wyznaczyć *momentu pędu*.

Okazuje się, że dla elektronu krążącego wokół jądra można dokładnie wyznaczyć jego wartość (długość wektora  $\mathbf{L}$ ) oraz rzut wektora  $\mathbf{L}$  na pewną wyróżnioną oś w przestrzeni (na przykład oś  $z$ ) to znaczy wartość jednej jego składowej  $L_z$  (rysunek 36.1). Pozostałe składowe  $L_x$  i  $L_y$  mają wartości *nieokreślone*. Wartości  $L$  oraz  $L_z$  są skwantowane

$$\begin{aligned} L &= \frac{h}{2\pi} \sqrt{l(l+1)} \\ L_z &= \frac{h}{2\pi} m_l \end{aligned} \quad (36.2)$$

gdzie  $l = 0, 1, 2, \dots$ ;  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l$ .



Rys. 36.1. Kwantowanie orbitalnego momentu pędu  $L$  ( $l=2$ )

Podsumowując

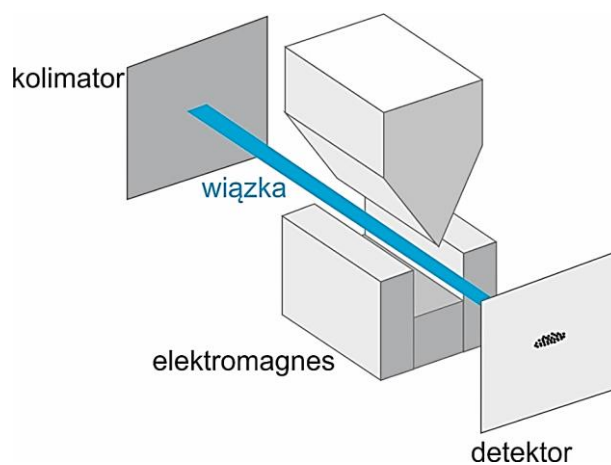


### Prawo, zasada, twierdzenie

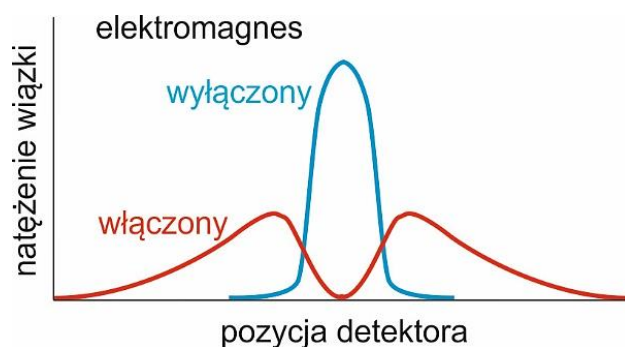
*Wartość orbitalnego momentu pędu elektronu w atomie i jego rzut na oś z przyjmują ściśle określone wartości zależne od liczb kwantowych  $l$  i  $m_l$ .*

### 36.1.2 Spin elektronu

W 1922 roku Otto Stern i Walter Gerlach przygotowali eksperyment mający na celu pomiar momentów magnetycznych atomów srebra. W tym doświadczeniu, pokazanym na rysunku 36.2, wiązka elektrycznie obojętnych atomów srebra jest przepuszczana między biegunami magnesu wytwarzającego niejednorodne pole magnetyczne. W wyniku oddziaływania pola magnetycznego na wiązkę rozdziela się ona na dwie (rysunek 36.3).



Rys. 36.2. Doświadczenie Sterna-Gerlacha



Rys. 36.3. Doświadczenie Sterna\_Gerlacha

Ten rezultat można wyjaśnić jedynie na gruncie mechaniki kwantowej. Wraz z badaniami widm optycznych atomów wodoru i metali alkalicznych stanowi on dowód, na to, że wszystkie elektrony mają, oprócz orbitalnego, również wewnętrzny moment pędu, który został nazwany *spinowym momentem pędu (spinem)* <sup>P</sup>. Spin jest charakterystyczną, wewnętrzną cechą, elektronu, którą można sobie wyobrazić jako wirowanie wokół pewnej osi obrotu (analogicznie jak Ziemia obiegająca Słońce i obracająca się wokół swej osi).

Okazuje się ponadto, że spin jest skwantowany przestrzennie i że dla danego stanu orbitalnego są możliwe *dwa kierunki spinu* (rysunek 36.2) czyli, że rzut wektora spinu na oś  $z$  może przyjmować tylko dwie wartości co określa *spinowa liczba kwantowa  $s$*  <sup>P</sup>, która może przyjmować dwie wartości  $s = \pm \frac{1}{2}$ .

Moment pędu atomu jest sumą momentów pędów orbitalnych i spinów wszystkich elektronów w atomie i jest też skwantowany przestrzennie.

### 36.2 Zasada Pauliego

W 1869 r. Mendelejew jako pierwszy zauważył, że większość własności pierwiastków chemicznych jest okresową funkcją *liczby atomowej  $Z$*  <sup>P</sup> określającej liczbę elektronów w atomie, co najlepiej uwidacznia się w odpowiednio skonstruowanym układzie okresowym pierwiastków. Właściwości chemiczne i fizyczne pierwiastków powtarzają się jeżeli zebrać je w grupy zawierające 2, 8, 8, 18, 18, 32 elementów.

W 1925 r. Pauli podał prostą zasadę (nazywaną *zakazem Pauliego* <sup>P</sup>), dzięki której automatycznie są generowane grupy o liczebności 2, 8, 18, 32. Pauli zapostulował, że



#### Prawo, zasada, twierdzenie

*W atomie wieloelektronowym w tym samym stanie kwantowym, może znajdować się co najwyżej jeden elektron.*

Ponieważ stan kwantowy charakteryzuje zespół czterech liczb kwantowych

$$\begin{aligned}
 n &= 1, 2, 3, \dots \\
 l &= 0, 1, 2, \dots, n-1 \\
 m_l &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(l-1), \pm l \\
 s &= \pm \frac{1}{2}
 \end{aligned}
 \tag{36.3}$$

więc zasada Pauliego może być sformułowana następująco



### Prawo, zasada, twierdzenie

*W atomie wieloelektronowym elektrony muszą się różnić przynajmniej jedną liczbą kwantową.*



### Przykład

Zgodnie z tą zasadą na orbicie pierwszej  $n = 1$  mogą znajdować się tylko dwa elektrony bo dla  $n = 1$  odpowiednie liczby kwantowe zgodnie z warunkami (36.3) wynoszą :

$$(n, l, m_l, s) = (1, 0, 0, \pm \frac{1}{2})$$

Dla  $n = 2$  mamy:

$$(n, l, m_l, s) = (2, 0, 0, \pm \frac{1}{2}), (2, 1, 1, \pm \frac{1}{2}), (2, 1, 0, \pm \frac{1}{2}), (2, 1, -1, \pm \frac{1}{2}).$$

Stąd wynika, że w stanie  $n = 2$  może być 8 elektronów.



### Ćwiczenie 36.1

Spróbuj teraz pokazać, że w stanie  $n = 3$  może znajdować się 18 elektronów. Zapisz poniżej liczby kwantowe odpowiadające tym orbitalom.

$$(n, l, m_l, s) =$$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Na zakończenie warto dodać, że na podstawie danych doświadczalnych stwierdzono, że zasada (zakaz) Pauliego obowiązuje dla każdego układu zawierającego elektrony, nie tylko dla elektronów w atomach.

## 36.3 Układ okresowy pierwiastków

Posługując się zasadą Pauliego można określić jakie stany w atomie są obsadzone elektronami. Skorzystamy z niej, żeby rozpatryć przewidywaną przez teorię kwantową strukturę niektórych pierwiastków.

Wprowadźmy do opisu konfiguracji następującą konwencję: numer *powłoki*  $P$  ( $n$ ) piszemy cyfrą, natomiast *podpowłoki*  $P$  (orbitale):  $l = 0, 1, 2, 3$ , oznaczymy literami  $s, p, d, f$  itd. (patrz punkt 35.3). Wskaźnik górny przy symbolu podpowłoki określa liczbę znajdujących się w niej elektronów, a wskaźnik dolny przy symbolu chemicznym pierwiastka określa wartość  $Z$ .


- Jako pierwszy rozpatrzmy atom helu ( $Z = 2$ )  $\rightarrow {}_2\text{He} : 1s^2$ .

Najpierw przeanalizujemy zjonizowany atom  $\text{He}^+$ . Jest to układ jodelektronowy podobny do atomu wodoru, a różnica polega tylko na tym, że w jądrze helu znajdują się dwa ( $Z = 2$ )


protony. W związku z tym energia takiego jonu jest dana wzorem analogicznym jak dla atomu wodoru

$$E = -\frac{Z^2 m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2 n^2} = E_1 \frac{Z^2}{n^2} = -13.6 \frac{Z^2}{n^2} \text{ eV} \quad (36.4)$$

a czynnik  $Z^2$  jest związany z różnicą ładunku jądra.

Jeżeli teraz dodamy drugi elektron na powłokę  $n = 1$  to każdy z elektronów będzie oddziaływał nie tylko z jądrem ale i z drugim elektronem; będzie się poruszał w wypadkowym polu elektrycznym jądra (przyciąganie) i elektronu (odpychanie). Jeżeli elektron znajduje się blisko jądra (bliżej niż drugi elektron) to porusza się w polu kulombowskim jądra  $Z = 2$ , a jeżeli znajduje się dalej to wówczas oddziałuje z ładunkiem jądra  $Z$  i ładunkiem drugiego elektronu czyli porusza się w polu ładunku jądra pomniejszonego o ładunek drugiego elektronu  $Z - 1$ . Mówimy, że elektron *ekranuje*  ładunek jądra. Średnia arytmetyczna tych dwóch wartości daje efektywną wartość  $Z_{ef} = 1.5$  odpowiadającą wypadkowemu ładunkowi jaki „czują” elektrony w atomie helu. Możemy więc uogólnić wzór (36.4) do postaci

$$E = -13.6 \frac{Z_{ef}^2}{n^2} \text{ eV} \quad (36.5)$$

Na podstawie tak oszacowanego ładunku efektywnego otrzymujemy *energię jonizacji*  czyli energię oderwania *jednego* elektronu równą  $E_{jonizacji} = -13.6 \cdot (1.5)^2 / 1^2 \approx 30 \text{ eV}$ .

W rzeczywistości elektrony nie tylko ekranują ładunek jądra ale też odpychają się nawzajem (dodatnia energia potencjalna), więc energia wiązania jest mniejsza. Zmierzona energia jonizacji helu wynosi 24.6 eV (co odpowiada  $Z_{ef} = 1.35$ ).

Jest to największa energia jonizacji spośród wszystkich pierwiastków i siły chemiczne nie mogą dostarczyć takiej energii jaka jest potrzebnej do utworzenia jonu  $\text{He}^+$ . Również utworzenie jonu  $\text{He}^-$  jest niemożliwe bo powłoka  $n = 1$  jest już "zapełniona" i dodatkowy elektron obsadzałby powłokę  $n = 2$  znacznie bardziej oddaloną od jądra. Ładunek efektywny widziany przez ten elektron będzie więc równy zero i nie działa żadna siła mogąca utrzymać ten elektron.

W rezultacie hel jest chemicznie obojętny, nie tworzy cząsteczek z żadnym pierwiastkiem. Podobnie zachowują się atomy innych pierwiastków o całkowicie wypełnionych powłokach. Nazywamy je *gazami szlachetnymi*.

- Jako kolejny omówimy atom **litu** ( $Z = 3$ )  $\rightarrow {}_3\text{Li} : 1s^2 2s^1$ .

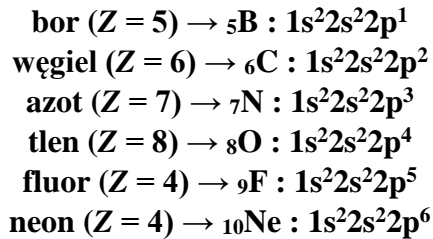
Zgodnie z zasadą Pauliego dwa elektrony znajdują się w stanie  $n = 1$ , a trzeci elektron na powłoce  $n = 2$ . Zmierzona wartość energii jonizacji litu wynosi 5.4 eV (co odpowiada  $Z_{ef} = 1.25$ ).

Taki jednokrotnie zjonizowany atom litu jest podobny do atomu helu z tą różnicą, że ze względu na ładunek jądra ( $Z = 3$ )  $Z_{ef} = 2.35$  (jest większe o 1 niż dla helu). Oznacza to, że oderwanie drugiego elektronu wymaga energii aż 75.6 eV. Dlatego spodziewamy się, że w związkach chemicznych lit będzie wykazywać wartościowość +1.


- Kolejnym pierwiastkiem jest **beryl** ( $Z = 4$ )  $\rightarrow$   $4\text{Be} : 1s^2 2s^2$ .

Beryl jest podobny do litu bo zgodnie z zasadą Pauliego w stanie  $2s^2$  mogą znajdować się dwa elektrony. Dla berylu energia oderwania (jonizacji) drugiego elektronu nie jest dużo większa niż dla pierwszego i beryl w związkach chemicznych ma wartościowość +2.

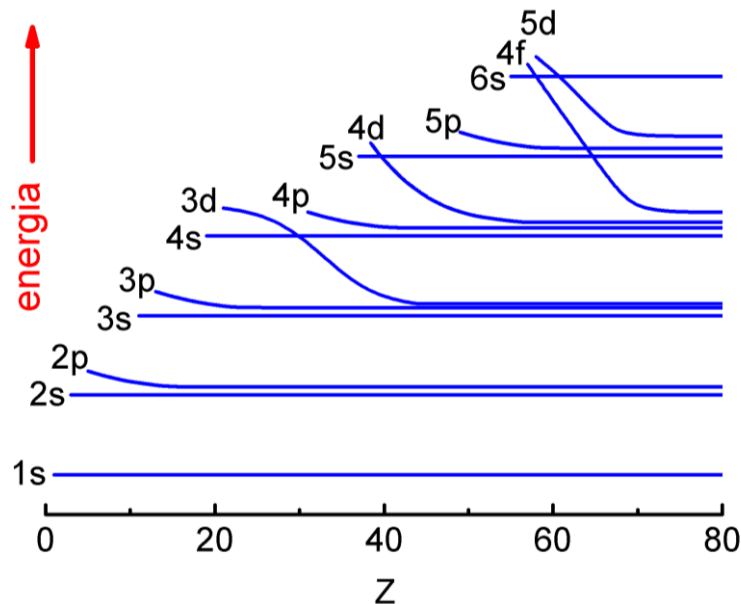
- Od **boru** ( $Z = 5$ ) do **neonu** ( $Z = 10$ ):



W tych sześciu pierwiastkach elektrony zapełniają podpowłokę  $2p$  ( $n = 2, l = 1$ ).

Wśród tych pierwiastków na uwagę zasługują fluor i tlen, którym do zapełnienia orbity  $p$  brakuje odpowiednio jednego i dwóch elektronów. Te "wolne" miejsca są stanami o niskiej energii i dlatego pierwiastki te wykazują silną tendencję do przyłączenia dodatkowych elektronów tworząc trwałe jony  $\text{F}^-$  i  $\text{O}^-$ . To zjawisko jest zwane *powinowactwem elektronowym* . Fluor i tlen są więc aktywnymi pierwiastkami chemicznymi.

Kontynuując powyższy schemat można napisać konfigurację elektronową dowolnego atomu. Okazuje się jednak, że w niektórych przypadkach przewidywane konfiguracje nie pokrywają się z obserwowanymi. Wnioskujemy, że różnice energii pomiędzy niektórymi podpowłokami muszą być tak małe, że w pewnych wypadkach może zostać odwrócona kolejność ich zapełniania. Można to zobaczyć na rysunku 36.4. Krzywe kończą się na  $Z = 80$  (rtęć). Uwaga: skala energii nie jest liniowa.



Rys. 36.4. Kolejność zapełniania podpowłok (orbitali)

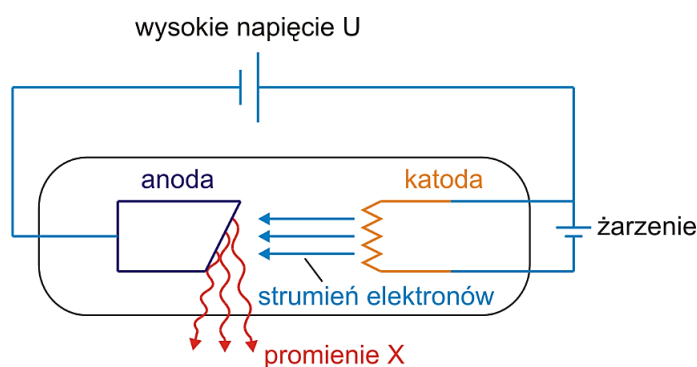
Zwróćmy uwagę, że każda podpowłoka  $p$  ma wyższą energię od poprzedzającej ją powłoki  $s$ . Natomiast różnice energii pomiędzy każdą podpowłoką  $s$  i poprzedzającą ją powłoką  $p$  są szczególnie duże. W konsekwencji wzbudzenie elektronu w atomach pierwiastków,

w których zakończyło się właśnie zapełnianie powłoki  $p$  jest bardzo trudne (gazy szlachetne).

W ten sposób na gruncie mechaniki kwantowej można przeanalizować własności wszystkich pierwiastków.

### 36.4 Promienie X

W poprzednich wykładach mówiliśmy już o zastosowaniu promieniowania rentgenowskiego. Teraz poznamy więcej szczegółów dotyczących widma tego promieniowania. Na rysunku 36.5 poniżej pokazana jest lampa rentgenowska.

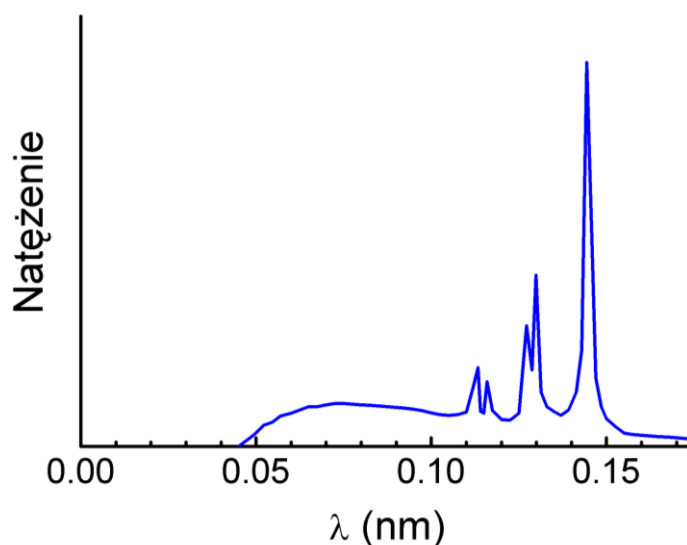


Rys. 36.5. Schemat lampy rentgenowskiej

Elektrony emitowane z katody są przyspieszane przez wysokie napięcie rzędu  $10^4$  V (przyłożone pomiędzy katodą i anodą) i uderzają w anodę (tarczę). W anodzie elektrony są hamowane aż do ich całkowitego zatrzymania.

Zgodnie z fizyką klasyczną, w wyniku tego hamowania powinna nastąpić emisja promieniowania elektromagnetycznego o widmie ciągłym ponieważ ładunek doznaje przyspieszenia (opóźnienia).

Przykładowy rozkład widmowy rentgenowski otrzymany dla wolframu jest pokazany na rysunku 36.6.



Rys. 36.6. Widmo rentgenowskie wolframu

Najbardziej charakterystycznymi cechami obserwowanych rozkładów widmowych promieniowania X są:

- Charakterystyczne linie widmowe to jest maksima natężenia promieniowania występujące dla ściśle określonych długości fal. Zaobserwowano, że *widmo liniowe* zależy od materiału (pierwiastka) anody.
- Istnienie dobrze określonej minimalnej długości fali  $\lambda_{min}$  widma ciągłego. Stwierdzono, że wartość  $\lambda_{min}$  zależy jedynie od napięcia  $U$  i jest taka sama dla wszystkich materiałów, z jakich wykonana jest anoda.

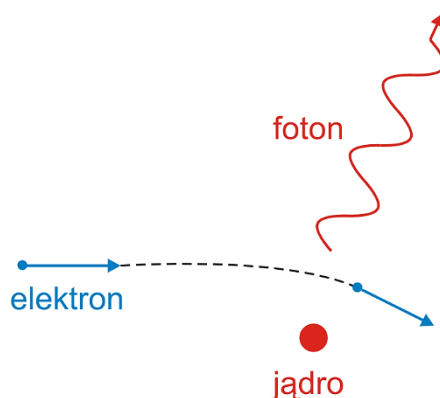
Istnienie krótkofalowej granicy widma ciągłego promieniowania X nie może być wyjaśnione przez klasyczną teorię elektromagnetyzmu bo nie istnieją żadne powody, aby z anody nie mogły być wysłane fale o długości mniejszej od jakiejś wartości granicznej. Jeżeli jednak potraktujemy promieniowanie rentgenowskie jako strumień fotonów to wyjaśnienie obserwowanego zjawiska jest proste. Elektron o początkowej energii kinetycznej  $E_k$  (uzyskanej dzięki przyspieszeniu napięciem  $U$ ) w wyniku oddziaływania z ciężkim jądrem atomu tarczy (anody) jest hamowany i energia jaką traci pojawia się w formie kwantów (rysunek 36.7).

Energia powstającego fotonu jest dana wzorem

$$h\nu = E_k - E'_k \quad (36.6)$$

gdzie  $E'_k$  jest energią elektronu po zderzeniu.

Elektron w trakcie zderzenia przekazuje jądro pewną energię jednak ze względu na to, że jądra tarczy są bardzo ciężkie (w porównaniu do elektronu) możemy ją zaniedbać.



Rys. 36.7. Oddziaływanie elektronu z atomem tarczy zmienia jego energię kinetyczną

Długość fali fotonu można obliczyć z relacji

$$h \frac{c}{\lambda} = E_k - E'_k \quad (36.7)$$

W wyniku zderzeń elektrony tracą różne ilości energii (typowo elektron zostaje zatrzymany w wyniku wielu zderzeń z jądrami tarczy) otrzymujemy więc szereg fotonów o różnych

energiach (różnych  $\lambda$ ). Wobec tego promieniowanie rentgenowskie wytwarzane przez wiele elektronów będzie miało *widmo ciągle*.

Powstaje wiele fotonów o długościach od  $\lambda_{min}$  do  $\lambda \rightarrow \infty$ , co odpowiada różnym energiom traconym w zderzeniach. Foton o najmniejszej długości fali  $\lambda_{min}$  (zarazem maksymalnej energii) będzie emitowany wtedy gdy elektron straci całą energię w jednym procesie zderzenia. Oznacza to, że po tym zderzeniu  $E_k' = 0$  więc

$$h \frac{c}{\lambda_{min}} = E_k \quad (36.8)$$

Ponieważ energia kinetyczna elektronu jest równa  $eU$  (elektron przyspieszony napięciem  $U$ ) więc otrzymujemy związek

$$h \frac{c}{\lambda_{min}} = eU \quad (36.9)$$

Skąd

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eU} \quad (36.10)$$

Tak więc minimalna długość fali odpowiadająca całkowitej zamianie energii kinetycznej elektronów na promieniowanie zależy jedynie od napięcia  $U$ , a nie zależy na przykład od materiału z jakiego zrobiono tarczę.

Podobnie na gruncie fizyki kwantowej można wyjaśnić powstawanie widma liniowego (charakterystycznego).

Elektron z wiązki padającej przelatując przez atom anody może wybić elektrony z różnych powłok atomowych. Na opróżnione miejsce (po wybitym elektronie) może przejść elektron z wyższych powłok. Towarzyszy temu emisja fotonu o ściśle określonej energii równej różnicy energii elektronu w stanie początkowym (przed przeskokiem) i stanie końcowym (po przeskoku). Z kolei powstało miejsce wolne tak zwana dziura po elektronie, który przeskoczył na niższą powłokę. Miejsce to może być zapełnione przez kolejny elektron z wyższej powłoki itd.

Zazwyczaj proces powrotu atomu do stanu podstawowego składa się więc z kilku kroków przy czym każdemu towarzyszy emisja fotonu. W ten sposób powstaje widmo liniowe.

Częstotliwość (długość fali) promieniowania charakterystycznego możemy obliczyć korzystając ze wzoru analogicznego do wyrażenia (33.13), który podaliśmy dla atomu wodoru

$$\nu = (Z - a)^2 R c \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{j^2} \right) \quad (36.11)$$

gdzie  $R$  jest stałą Rydberga. We wzorze tym uwzględniono fakt, że w atomie wieloelektronowym elektron jest przyciągany przez jądro o ładunku  $+Ze$ , a równocześnie obecność innych elektronów osłabia to oddziaływanie. Efekt ten nazywamy ekranowaniem jądra i uwzględniamy go poprzez wprowadzenie *stałej ekranowania  $a$* .



Widzimy, że częstotliwość promieniowania charakterystycznego jest *proporcjonalna do kwadratu liczby atomowej  $Z$*  więc jest charakterystyczna dla *atomów pierwiastka anody*. Ta zależność jest nazywana prawem Moseleya. Możemy się nią posłużyć przy analizie liniowych widm rentgenowskich w celu identyfikacji pierwiastków lub ich zawartości w badanym materiale.



### Ćwiczenie 36.2

Korzystając z wyrażenia (36.11) oblicz jaka jest maksymalna częstotliwość fotonów promieniowania  $X$  wysyłanego z miedzi i ołowiu. Zauważ, że największą energię będą miały fotony emitowane przy przeskoku elektronu z najbardziej odległej powłoki  $k \rightarrow \infty$  na orbitę pierwszą  $j = 1$ . Stała Rydberga  $R = 1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ , a prędkość światła  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . Liczbę atomową miedzi i ołowiu odczytaj z układu okresowego, a stałą ekranowania przyjmij równą  $a = 2$ . Podaj również energie fotonów oraz ich długości fal.

Wynik zapisz poniżej.

Dla miedzi:

$$v_{max} = \quad hv_{max} = \quad \lambda_{max} =$$

Dla ołowiu:

$$v_{max} = \quad hv_{max} = \quad \lambda_{max} =$$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.


## 36.5 Lasery

Na zakończenie tego wykładu omówimy przykład wykorzystania zjawisk kwantowych w praktyce. Przedstawimy *kwantowy generator światła* nazwany *laserem*. Urządzenie to znalazło bardzo szerokie zastosowanie min. w telekomunikacji, badaniach naukowych, technologii obróbki metali i medycynie.

### 36.5.1 Emisja spontaniczna

Zgodnie z postulatem Bohra, promieniowanie elektromagnetyczne zostaje wysłane tylko wtedy gdy elektron poruszający się po orbicie o całkowitej energii  $E_k$  zmienia swój ruch skokowo, tak że porusza się następnie po orbicie o energii  $E_j$ . Mówimy, że cząstka (elektron) przechodzi ze stanu wzbudzonego (o wyższej energii) do stanu podstawowego. Takiemu *samoistnemu* przejściu towarzyszy emisja fotonu o częstotliwości


$$\nu = \frac{E_k - E_j}{h} \quad (36.12)$$

Zjawisko takie jest nazywane *emisją spontaniczną* .

Jeżeli różnica energii wynosi kilka elektronowoltów (na przykład tak jak w atomie wodoru, gdzie  $E_1 = -13.6 \text{ eV}$ ) to czas charakterystyczny dla procesu emisji spontanicznej ma wartość rzędu  $10^{-8} \text{ s}$ .

Oczywiście atomy (cząsteczki) nie tylko *emitują* ale i *absorbują* promieniowanie o ściśle określonych częstotliwościach (długościach fali). Ponieważ elektron w atomie ma energię całkowitą równą jednej z energii dozwolonych (stan stacjonarny) więc z padającego promieniowania absorbuje tylko określone kwanty energii przechodząc ze stanu podstawowego do wzbudzonego. Energia absorbowanych kwantów  $h\nu$  jest dokładnie równa różnicy pomiędzy energiami dozwolonych stanów.

### 36.5.2 Emisja wymuszona

Teoria kwantowa przewiduje także, że oprócz emisji spontanicznej oraz procesów absorpcji może wystąpić także inny proces, nazywany *emisją wymuszoną* .

Przypuśćmy, że atom znajduje się w stanie wzbudzonym  $E_k$  i może przy przejściu do stanu podstawowego  $E_j$  emitować foton o energii  $(E_k - E_j)$ . Jeżeli taki atom zostanie oświetlony promieniowaniem, które zawiera fotony o energii właśnie równej  $(E_k - E_j)$  to *prawdopodobieństwo wypromieniowania energii przez atom wzrośnie*.

Takie zjawisko przyspieszenia wypromieniowania energii przez oświetlenie atomów wzbudzonych odpowiednim promieniowaniem nazywamy właśnie *emisją wymuszoną*.

Ponadto, bardzo ważne jest to, że

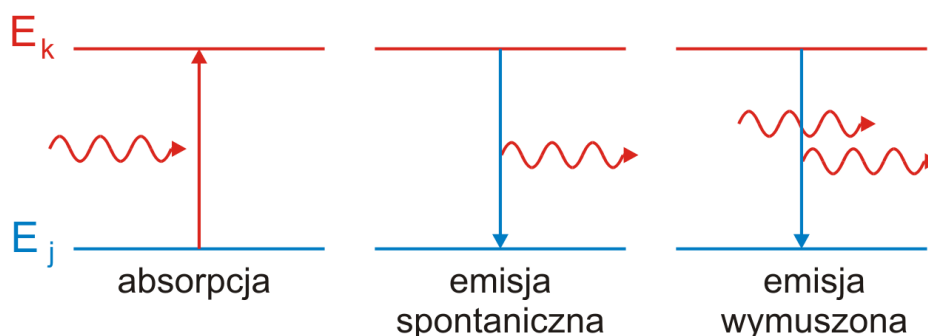


#### Prawo, zasada, twierdzenie



*W emisji spontanicznej mamy do czynienia z fotonami, których fazy i kierunki są rozłożone przypadkowo. Natomiast foton wysyłany w procesie emisji wymuszonej ma taką samą fazę oraz taki sam kierunek ruchu jak foton wymuszający.*

Emisja wymuszona stwarza więc szansę uzyskania *promieniowania spójnego*.

Procesy absorpcji, emisji spontanicznej i emisji wymuszonej pokazane są schematycznie na rysunku 36.8.



Rys. 36.8. Absorpcja, emisja spontaniczna i emisja wymuszona

Żeby przeanalizować możliwość emisji wymuszonej musimy wiedzieć jak atomy (cząsteczki) układu obsadzają różne stany energetyczne to znaczy musimy określić ile atomów jest w *stanie podstawowym*  (stanie o najniższej energii), a ile w *stanach wzbudzonych*  (o wyższych energiach).

### 36.5.3 Rozkład Boltzmana

Jak wiemy z rozważań dla gazu doskonałego opis szczegółowy układu fizycznego złożonego z bardzo dużej liczby cząstek jest bardzo skomplikowany i dlatego podstawowe własności układu wyprowadzamy z samych rozważań *statystycznych*. Przykładem jest rozkład Maxwella prędkości cząstek gazu, który daje informację o prawdopodobieństwie znalezienia cząsteczki o prędkości z przedziału  $v, v + dv$ . Znając funkcję rozkładu  $N(v)$  możemy obliczyć takie wielkości mierzalne jak ciśnienie czy temperaturę.

Prawdopodobieństwo z jakim cząstki układu zajmują różne stany energetyczne jest również opisane przez odpowiednią funkcję rozkładu

$$N(E) = Ae^{-\frac{E}{kT}} \quad (36.13)$$

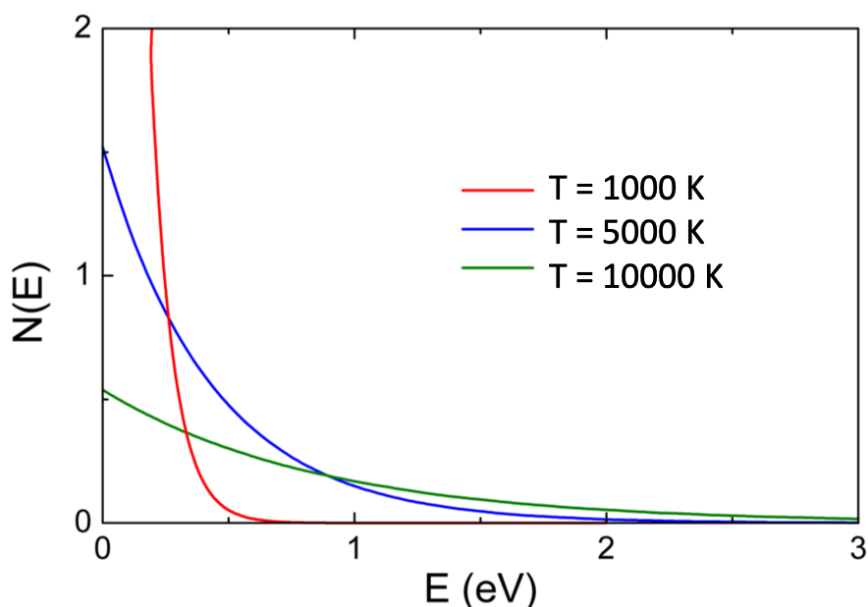
gdzie  $A$  jest stałą proporcjonalności, a  $k$  stałą Boltzmana. Jest to tak zwany *rozkład Boltzmana*.



Więcej o rozkładzie Boltzmana możesz przeczytać w *Dodatku 1*, na końcu modułu XI.

Widzimy, że prawdopodobna ilość cząstek układu, w temperaturze  $T$ , znajdujących się w stanie o energii  $E$  jest proporcjonalna do  $\exp(-E/kT)$ .

Na rysunku 36.9 pokazana jest zależność  $N(E)$  dla trzech różnych temperatur i trzech odpowiednich wartości stałej  $A$ .



Rys. 36.9. Funkcja rozkładu obsadzenia stanów cząstkami - rozkład Boltzmana

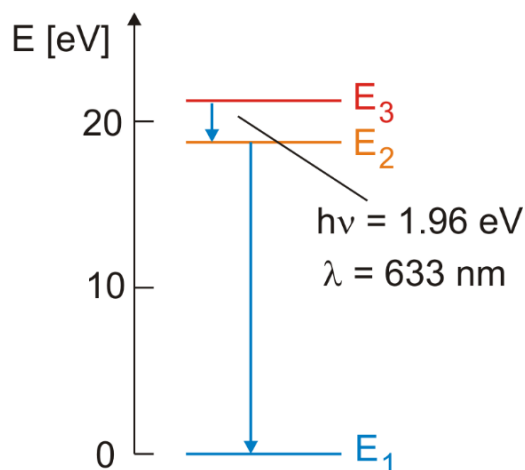
### 36.5.4 Laser

Z rozkładu Boltzmana wynika, że w danej temperaturze liczba atomów w stanie podstawowym jest większa niż liczba atomów w stanach o wyższej energii. Jeżeli zatem taki układ atomów (cząstek) oświetlimy odpowiednim promieniowaniem to światło padające jest *silnie absorbowane*, a emisja wymuszona jest znikoma.

Żeby w układzie przeważała emisja wymuszona, to w wyższym stanie energetycznym powinno znajdować się więcej atomów (cząsteczek) niż w stanie niższym. Mówimy, że rozkład musi być antyboltzmannowski.

Taki układ można przygotować na kilka sposobów min. za pomocą zderzeń z innymi atomami lub za pomocą tzw. pompowania optycznego czyli wzbudzenia atomów do wyższych stanów energetycznych przez ich oświetlenie.

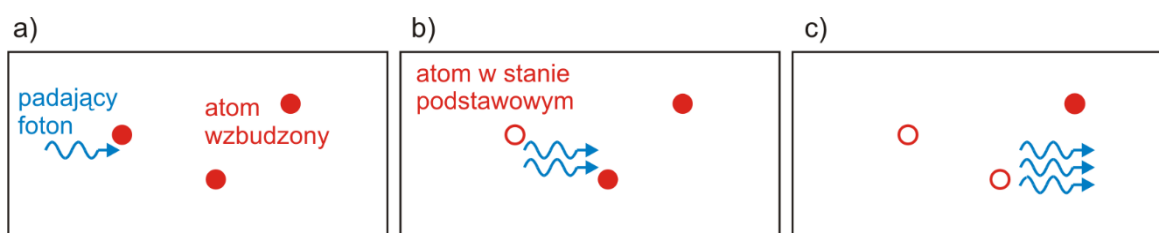
Ten pierwszy sposób jest wykorzystywany w laserze helowo-neonowym. Schemat *poziomów energetycznych* (stanów energetycznych) dla takiego lasera jest pokazany na rysunku 36.10.



Rys. 36.10. Poziomy energetyczne lasera helowo-neonowego

W tym laserze atomy neonu są wzbudzone na poziom  $E_3$  w wyniku zderzeń z atomami helu. Przejście na poziom  $E_2$  zachodzi wskutek emisji wymuszonej. Następnie atomy neonu przechodzą szybko do stanu podstawowego  $E_1$  oddając energię w wyniku zderzeń ze ściankami.

Przebieg emisji wymuszonej w laserze przedstawiony jest na rysunku 36.11.



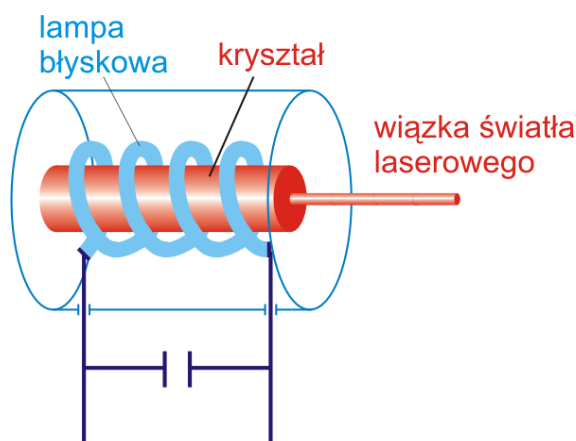
Rys. 36.11. Przebieg emisji wymuszonej; ● - atom w stanie wzbudzonym,

○ - atom w stanie o niższej energii (po wyemitowaniu fotonu)

Foton wprowadzony do gazu (rysunek 36.11a) wymusza emisję drugiego fotonu przez wzbudzony atom (rysunek 36.11b). Przez układ poruszają się więc dalej dwa fotony, które wymuszają kolejne procesy emisji i w efekcie coraz więcej fotonów, o tej samej fazie, porusza się przez układ (rysunek 36.11c).

Jeżeli na końcach zbiornika umieścimy zwierciadła to ten proces będzie trwał aż wszystkie atomy wypromieniują nadmiar energii. Spójna wiązka fotonów może opuścić układ jeżeli jedno z tych zwierciadeł będzie częściowo przepuszczające.

Inny sposób „odwrócenia” rozkładu boltzmanowskiego jest wykorzystany w laserze rubinowym pokazanym na rysunku 36.12.



Rys. 36.12. Laser rubinowy

Laser zbudowany na ciele stałym składa się z pręta wykonanego z kryształu  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , w którym jonami czynnymi są atomy domieszki np. atomy chromu. Na końcach pręta są naniesione zwierciadła odbijające. Promieniowanie "pompujące" jest wytwarzane przez lampę błyskową umieszczoną wokół kryształu. Absorbując światło z lampy błyskowej atomy chromu przechodzą do stanu wzbudzonego.


Od czasu uruchomienia pierwszego lasera to jest od 1960 roku technologia tych urządzeń bardzo się rozwinęła. Obecnie działają zarówno lasery impulsowe jak i lasery o pracy ciągłej. Ośrodkami czynnymi w laserach są gazy, ciała stałe i ciecze, a zakres długości fal jest bardzo szeroki; od podczerwieni przez obszar widzialny aż do nadfioletu.

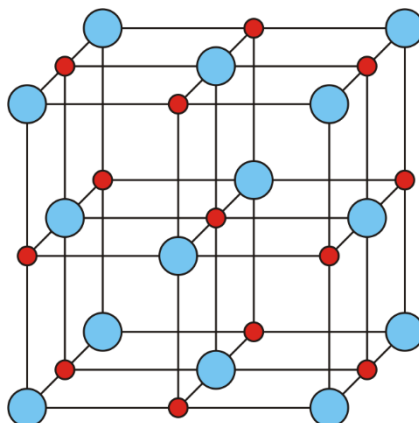
Ze względu na charakterystykę światła laserowego wachlarz zastosowań laserów jest bardzo szeroki i obejmuje między innymi:

- zastosowania „komercyjne” - czytniki kodów kreskowych, drukowanie, skanowanie, pomiary geodezyjne, radary, holografia,
- obróbkę mechaniczną i syntezę materiałów (cięcie, wiercenie, frezowanie, zgrzewanie, nanoproszki, nanostruktury),
- zastosowania w medycynie - laser jako skalpel, odczytywanie kodu DNA, diagnostyka;
- zastosowania w elektronice i telekomunikacji - wytwarzanie układów scalonych, paneli LCD, optyczny zapis danych, przesyłanie danych poprzez sieci światłowodowe,
- zastosowania w nauce - precyzyjny pomiar czasu, wytwarzanie wysokich i ultra niskich temperatur, badania chemiczne i fizyczne.

## 37 Materia skondensowana

Kiedy pierwiastek lub związek chemiczny, będący w stanie gazowym lub ciekłym, zostanie dostatecznie ochłodzony to krzepnie czyli przechodzi do stanu stałego.

Ciała stałe dzielimy na *kryształy*, *polikryształy* i *ciała bezpostaciowe* . Jak już mówiliśmy w punkcie 30.5 atomy w kryształach ułożone są w powtarzający się regularny wzór zwany siecią krystaliczną (na rysunku 37.1 pokazane jest przykładowo rozmieszczenie atomów w kryształach NaCl).



Rys. 37.1. Rozmieszczenie jonów w komórce elementarnej NaCl

Wiele ciał stałych nie posiada jednolitej struktury krystalicznej dlatego, że są zbudowane z bardzo wielu małych kryształków; mówimy, że te ciała mają strukturę polikrystaliczną. Wreszcie w przyrodzie występują ciała niekrystaliczne takie jak na przykład szkło, w których uporządkowanie atomowe nie rozciąga się na duże odległości.


W dalszej części rozdziału zajmiemy się ciałami krystalicznymi. Ich klasyfikację prowadzi się zarówno według ich struktury geometrycznej jak i według dominującego rodzaju wiązania.

### 37.1 Rodzaje kryształów (rodzaje wiązań)

Ze względu na typy wiązań kryształy dzielimy na:

- Kryształy cząsteczkowe (molekularne),
- Kryształy o wiązaniach wodorowych,
- Kryształy jonowe,
- Kryształy atomowe (kowalentne),
- Kryształy metaliczne.

#### 37.1.1 Kryształy cząsteczkowe

Kryształy cząsteczkowe (molekularne) składają się ze stabilnych cząsteczek, oddziałujących ze sobą słabymi siłami wiążącymi tzw. *siłami van der Waalsa* , takimi jakimi występują pomiędzy cząsteczkami w fazie gazowej.

Oddziaływanie to jest związane z przesunięciami ładunków w cząsteczkach. Cząsteczki zachowują się jak dipole elektryczne i oddziaływanie pomiędzy dipolami stanowi siłę wiążącą kryształ.

Ciała cząsteczkowe tworzą między innymi w stanie stałym gazy szlachetne i zwykłe gazy, takie jak tlen, azot, wodór. Energia wiązania jest słaba, rzędu  $10^{-2}$  eV to jest  $10^{-21}$  J. Przypomnijmy sobie, że energia cieplna cząsteczki w temperaturze pokojowej to jest około 300 K wynosi  $\frac{3}{2}k_B T \approx 6 \cdot 10^{-21}$  J. Ta energia ruchu termicznego jest odpowiedzialna za rozrywanie wiązań. Widać więc, z porównania jej z energią wiązania, dlaczego zestalenie kryształów cząsteczkowych zachodzi dopiero w bardzo niskich temperaturach. Na przykład temperatura zestalania wodoru wynosi 14 K (tj.  $-259$  °C).

Kryształy cząsteczkowe, ze względu na brak elektronów swobodnych są na ogół bardzo złymi przewodnikami ciepła i elektryczności.

### 37.1.2 Kryształy o wiązaniach wodorowych


W pewnych warunkach atomy wodoru mogą tworzyć silne wiązania z atomami pierwiastków elektroujemnych takich jak na przykład tlen czy azot. Te wiązania zwane wodorowymi odgrywają ważną rolę min. w kryształach ferroelektrycznych i w cząsteczkach kwasu DNA (dezoksyrybonukleinowego).


### 37.1.3 Kryształy jonowe

Kryształy jonowe składają się z trójwymiarowego naprzemiennego ułożenia dodatnich i ujemnych jonów. Jony, ułożone jak gęsto upakowane kulki, przyciągają się siłami kulombowskimi. Przykładem takiego kryształu jest pokazany na rysunku 37.1 kryształ chlorku sodu (NaCl).

Kryształy jonowe, ze względu na brak swobodnych elektronów są złymi przewodnikami elektryczności i ciepła. Ponieważ siły kulombowskie wiążące kryształy jonowe są duże więc kryształy te są zazwyczaj twarde i mają wysoką temperaturę topnienia.

### 37.1.4 Kryształy atomowe (kowalentne)

Kryształy kowalentne składają się z atomów połączonych ze sobą parami wspólnych *elektronów walencyjnych*  to jest elektronów z najbardziej zewnętrznej powłoki. Chmura wspólnych elektronów skupiona jest pomiędzy parą atomów więc wiązania te mają kierunek i wyznaczają ułożenie atomów w strukturze krystalicznej. Przykładami kryształów kowalentnych są diament, german, krzem.

Kryształy kowalentne są twarde i posiadają wysoką temperaturę topnienia. Brak elektronów swobodnych powoduje, że ciała atomowe nie są dobrymi przewodnikami elektryczności i ciepła. Czasami jednak, jak w przypadku wymienionych Ge i Si są one *półprzewodnikami* .


### 37.1.5 Ciała metaliczne

Wiązanie metaliczne można sobie wyobrazić jako graniczny przypadek wiązania kowalentnego, w którym elektrony walencyjne są wspólne dla wszystkich jonów w kryształach, a nie tylko dla sąsiednich jonów.


Wynika to z tego, że w atomach, z których jest zbudowany kryształ metaliczny, elektrony na zewnętrznych powłokach są słabo związane i mogą zostać uwolnione z tych atomów kosztem bardzo małej energii. Te swobodne elektrony poruszają się w całym kryształach; są więc wspólne dla wszystkich jonów. Mówimy, że tworzą one gaz elektronowy wypełniający przestrzeń pomiędzy dodatnimi jonami.


Gaz elektronowy działa na każdy jon siłą przyciągania większą od odpychania pozostałych jonów w wyniku czego tworzy się wiązanie. Ponieważ istnieje wiele nieobsadzonych stanów elektronowych (na zewnętrznych powłokach są wolne miejsca) to elektrony mogą poruszać się swobodnie w kryształach od atomu do atomu. W konsekwencji kryształy metaliczne są doskonałymi przewodnikami elektryczności i ciepła. Przykładem kryształów metalicznych są kryształy tworzone przez metale alkaliczne.

W podsumowaniu należy zaznaczyć, że istnieją kryształy, w których wiązania muszą być interpretowane jako mieszanina opisanych powyżej głównych typów wiązań. Typ wiązania w poszczególnych kryształach wyznacza się doświadczalnie min. przez badanie dyfrakcji promieni X.

Przejdziemy teraz do omówienia energii, jakie mogą posiadać elektrony znajdujące się w w ciałach stałych. Struktura stanów energetycznych elektronów w ciałach stałych czy może być dobrze opisana w ramach tzw. *pasmowej struktury ciał stałych* .

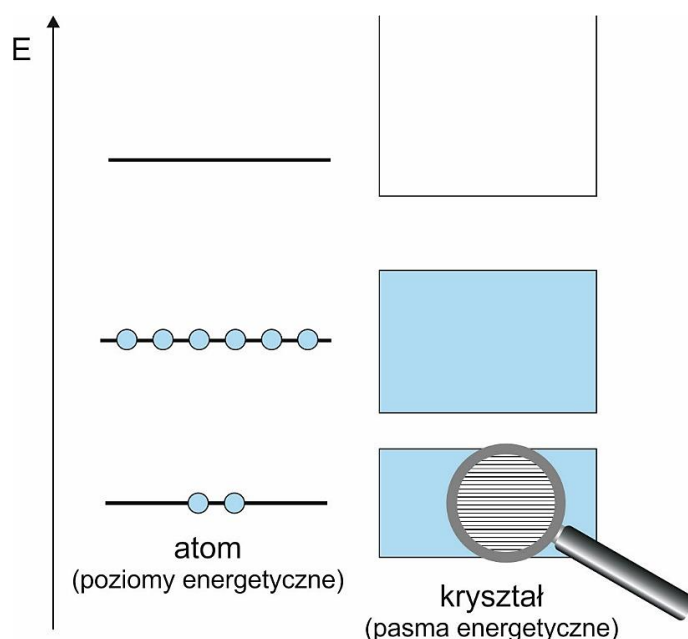
### 37.2 Struktura pasmowa ciał stałych

Rozpatrzmy sytuację, gdy podczas powstawania ciała stałego, atomy znajdujące się początkowo w dużych odległościach, zbliżane są coraz bardziej do siebie. Gdy atomy są w dużych odległościach to ich powłoki elektronowe są odseparowane i ich dostępne energie (tak zwane *poziomy energetyczne* ) są identyczne z energiami atomu odosobnionego. Jednak gdy odległości międzyatomowe zmniejszą się dostatecznie, to zewnętrzne elektrony zaczynają oddziaływać między sobą (zewnętrzne powłoki elektronowe częściowo się przekrywają).

To oddziaływanie elektronów z sąsiednich atomów, powoduje, że dyskretne poziomy energetyczne swobodnych atomów rozszczepiają się tworząc zbiór blisko leżących poziomów. Pojedynczy poziom energetyczny rozszczepia się dokładnie na tyle poziomów, ile jest atomów w kryształach. Dlatego tak powstałe poziomy leżą tak blisko siebie, że mówimy o *paśmie energetycznym* . Szerokość pasma zależy od stopnia przekrywania się orbit. Najbardziej przekrywają się orbity zewnętrzne, na których znajdują się tzw. elektrony walencyjne.

Stany energetyczne atomu swobodnego i atomów w sieci krystalicznej pokazane są na rysunku 37.2.





Rys. 37.2. Poziomy energetyczne atomu swobodnego i pasma energetyczne w kryształe

Poszczególne pasma energetyczne są oddzielone od siebie pasmem wzbronionym - *przerwą energetyczną*  $E_g$ . Elektrony w atomach nie mogą posiadać takich energii.

Najwyższe, całkowicie lub częściowo wypełnione elektronami pasmo to *pasmo walencyjne* (pasmo, na które rozszczepia się atomowy poziom walencyjny), a kolejne wyższe nazywamy *pasmem przewodnictwa*.

Różnice w wypełnieniu tych dwóch najwyższych (o najwyższych energiach) pasm energetycznych pozwalają wytłumaczyć podział ciał stałych na metale, półprzewodniki i izolatory.

W izolatorach i półprzewodnikach pasmo walencyjne jest całkowicie wypełnione, zaś pasmo przewodnictwa - całkowicie puste. Natomiast w metalach pasmo przewodnictwa jest częściowo wypełnione, jak pokazano na rysunku 37.3.

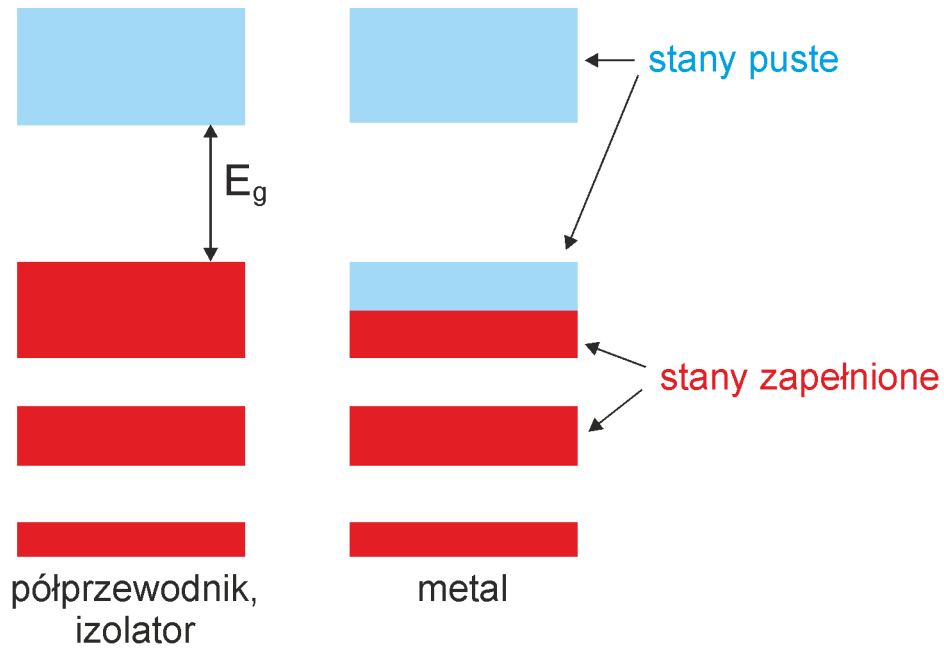
W izolatorach szerokość przerwy energetycznej jest bardzo duża (np. dla diamentu wynosi 5.5 eV). W nich przejście elektronu z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa jest praktycznie niemożliwe (wymagałoby dostarczenia do elektronu bardzo dużej energii).

W półprzewodnikach szerokość przerwy energetycznej jest mniejsza (dla krzemu wynosi 1.11 eV, a dla germanu 0.67 eV) i w temperaturze pokojowej część elektronów walencyjnych uzyskuje odpowiednie energie i znajduje się w pasmie przewodzenia stając się nośnikami prądu.

W metalach, w tylko częściowo wypełnionym paśmie, elektrony mają swobodę ruchu, bo mogą pod wpływem przyłożonego pola elektrycznego zwiększyć swoją energię do nieobsadzonego poziomu energetycznego, co oznacza przepływ prądu.

W całkowicie wypełnionym pasmie elektron nie może zwiększyć energii (brak nieobsadzonych stanów energetycznych), więc nie ma przepływu prądu.

Czasami pasmo walencyjne zachodzi na pasmo przewodnictwa, tworząc nowe pasmo, wypełnione tylko częściowo. Takie materiały wykazują własności metaliczne.



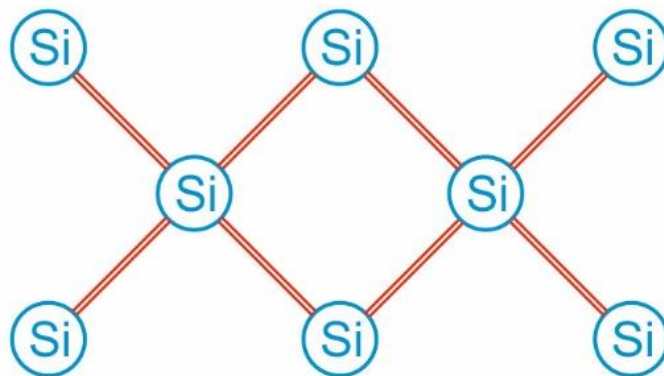
Rys. 37.3 Struktura pasmowa izolatora, półprzewodnika i metalu

Przejdziemy teraz do omówienia podstawowych własności materiałów *półprzewodnikowych* i *magnetycznych*. Wybór tych dwóch klas materiałów jest podyktowany faktem, że zrewolucjonizowały one elektronikę i współczesną technologię.

### 37.3 Fizyka półprzewodników

W tym punkcie omówimy podstawowe właściwości półprzewodników oraz ich zastosowania.

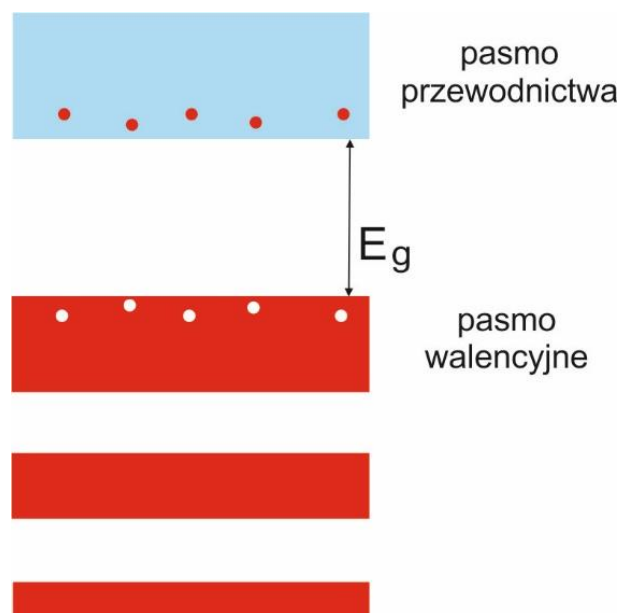
Przykładowymi materiałami półprzewodnikowymi są german i krzem. Są to pierwiastki z IV grupy układu okresowego, mają po cztery elektrony walencyjne. Elektrony te biorą udział w wiązaniach atomowych z czterema innymi atomami. Pary wspólnych elektronów walencyjnych zaznaczono na rysunku 37.4 podwójnymi liniami.



Rys. 37.4. Sieć krystaliczna krzemu

Ponieważ wszystkie elektrony walencyjne biorą udział w wiązaniach więc brak jest elektronów swobodnych.

Istnieje jednak możliwość wzbudzenia, na przykład termicznie, elektronu walencyjnego, tak że stanie się on swobodnym elektronem przewodnictwa. Powstaje wtedy w powłoce walencyjnej puste miejsce po elektronie nazywane *dziurą* <sup>P</sup>. Na rysunku 37.5 zaznaczono schematycznie tę sytuację.

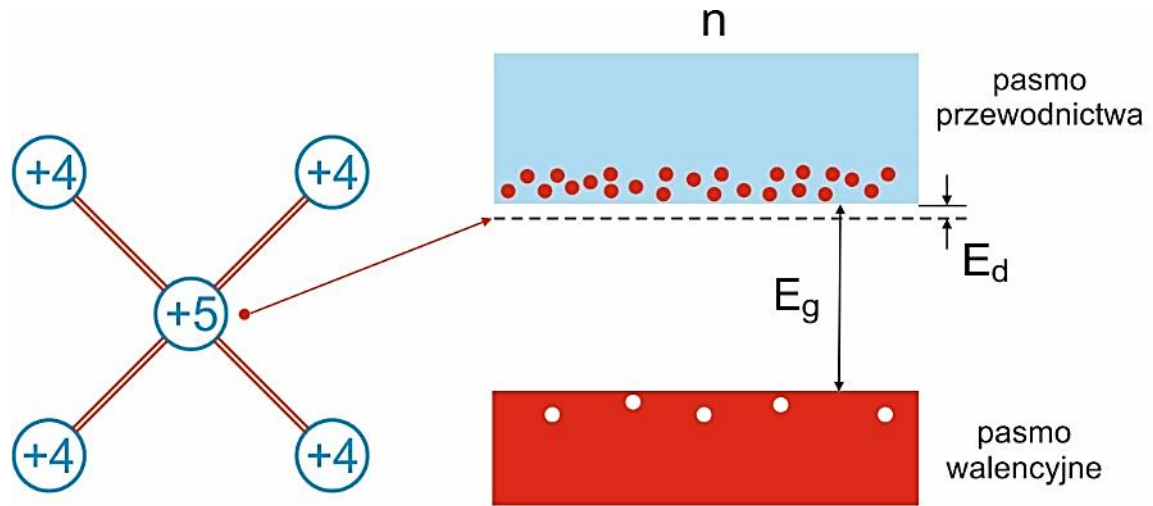


Rys. 37.5. Wzbudzenia elektronów walencyjnych do pasma przewodnictwa

W obecności zewnętrznego pola elektrycznego inny elektron walencyjny, sąsiadujący z dziurą może zająć jej miejsce, pozostawiając po sobie nową dziurę, która zostanie wypełniona przez kolejny elektron itd. Zatem dziura w polu elektrycznym *przemieszcza się w kierunku przeciwnym niż elektron i zachowuje jak nośnik ładunku dodatniego* (dodatni elektron). Liczba dziur jest równa liczbie elektronów przewodnictwa. Takie półprzewodniki nazywamy *samoistnymi* <sup>P</sup>.

### 37.3.1 Domieszkowanie półprzewodników

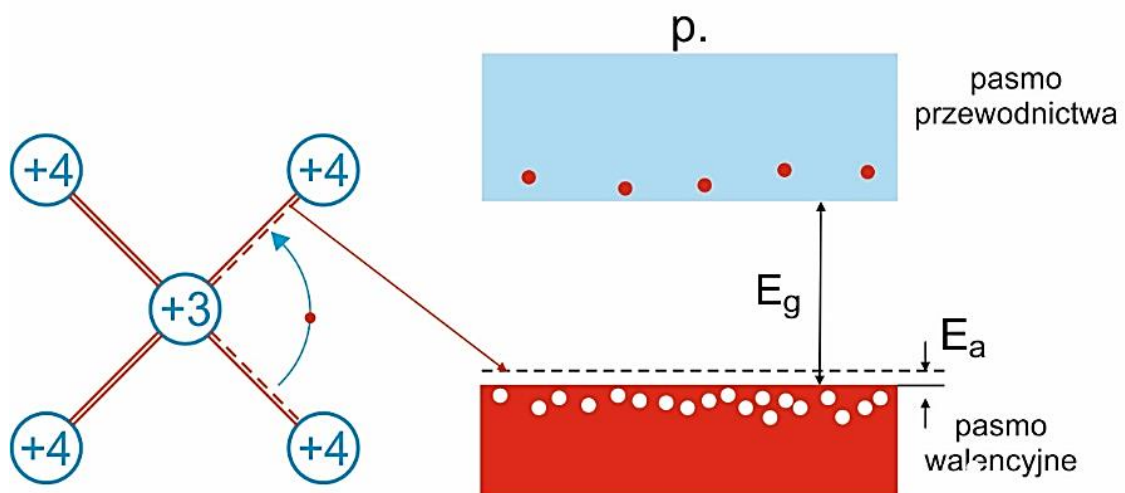
Jeżeli w trakcie wzrostu kryształów do krzemu dodamy na przykład niewielką ilość arsenu lub fosforu (grupa V układu okresowego) to domieszka wbudowuje się w strukturę krzemu wykorzystując cztery spośród pięciu elektronów walencyjnych. Piąty elektron walencyjny domieszki nie bierze udziału w wiązaniu i łatwo staje się elektronem przewodnictwa poprzez dostarczenie mu niewielkiej ilości energii (np. cieplnej). Dzięki temu mamy prawie tyle elektronów przewodnictwa ile jest atomów domieszki. Zauważmy, że w tym wypadku nie powstaje dziura po oderwanym elektronie bo wszystkie wiązania atomowe są wypełnione. Oczywiście możemy tak jak w półprzewodniku samoistnym wzbudzić elektrony walencyjne krzemu i wytworzyć dziury ale pod warunkiem dostarczenia znacznie większej energii (rysunek 37.6). Taki półprzewodnik nazywany jest półprzewodnikiem *typu n* <sup>P</sup> (negative - ujemny) bo atom domieszki oddaje elektron.



Rys. 37.6. Obsadzenie pasm w półprzewodniku typu *n*

Energia  $E_d$  jonizacji domieszki jest znacznie mniejsza od przerwy energetycznej  $E_g$ . Przykładowo dla krzemu domieszkowanego fosforem wynosi 0.045 eV wobec przerwy energetycznej wynoszącej 1.1 eV.

Krzem można też domieszkować pierwiastkiem z III grupy układu okresowego na przykład galem lub glinem. Ponieważ atom takiej domieszki ma tylko trzy elektrony walencyjne to ma tendencję do wychwytywania elektronu z sąsiedniego atomu krzemu aby uzupełnić cztery wiązania kowalencyjne. Zatem atom domieszki wprowadza do systemu dziurę (rysunek 37.7) i mamy półprzewodnik *typu p*  $\text{P}$  (positive - dodatni).




Rys. 37.7. Obsadzenie pasm w półprzewodniku typu *p*

Energia  $E_a$ , wychwycenia elektronu z sąsiedniego atomu krzemu jest znacznie mniejsza od przerwy energetycznej  $E_g$ . Przykładowo dla krzemu domieszkowanego glinem wynosi 0.067 eV wobec przerwy energetycznej wynoszącej 1.1 eV.

## 37.4 Zastosowania półprzewodników

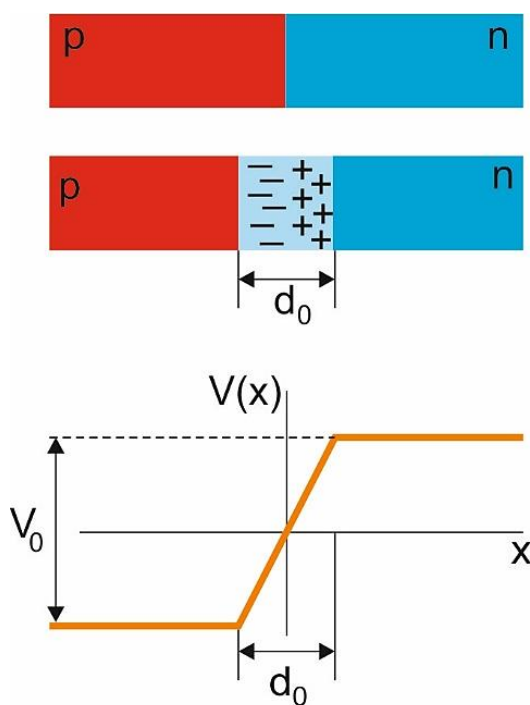
### 37.4.1 Termistor

W miarę wzrostu temperatury obserwujemy szybki wzrost przewodności półprzewodników związany z termicznym wzbudzeniami elektronów walencyjnych, które stają się elektronami przewodnictwa.

Przykładowo, przewodność czystego krzemu zwiększa się aż dwukrotnie przy wzroście temperatury od  $0^{\circ}\text{C}$  do  $10^{\circ}\text{C}$ . Dlatego czysty krzem może być stosowany w czułych miernikach temperatury. Taki przyrząd półprzewodnikowy do pomiaru temperatury jest nazywany *termistorem* .


### 37.4.2 Złącze p - n

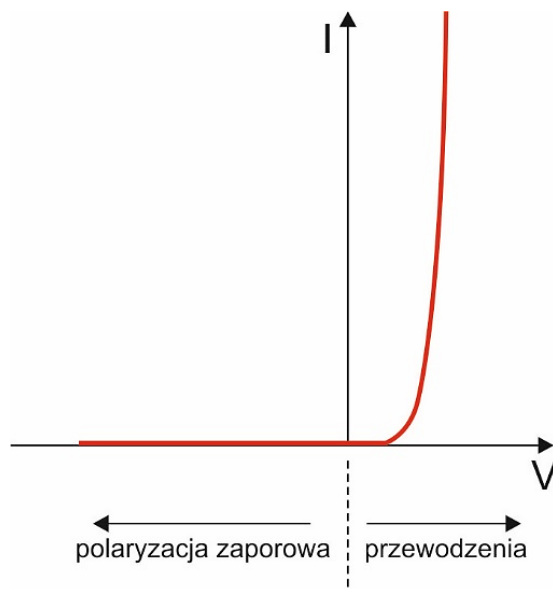
Jeżeli półprzewodniki typu  $n$  i typu  $p$  zostaną ze sobą zetknięte to część elektronów z obszaru typu  $n$  (nadmiar elektronów) będzie przepływała do obszaru typu  $p$ , a dziury będą przepływały z obszaru typu  $p$  (nadmiar dziur) do obszaru typu  $n$ . W wyniku tego obszar  $p$  naładowuje się ujemnie, a obszar typu  $n$  dodatnio. Powstaje, pokazana na rysunku 37.8, kontaktowa różnica potencjałów związana z przestrzennym rozkładem ładunku.




Rys. 37.8. Potencjał na granicy złącza  $p - n$

Jeżeli do takiego złącza  $p - n$  przyłożymy zewnętrzny potencjał to wielkość prądu płynącego przez złącze zależy od kierunku i wartości tego napięcia. Jeżeli przyłożymy potencjał dodatni  $V$  (napięcie przewodzenia) do półprzewodnika typu  $p$  to zmniejszymy różnicę potencjału na złączu  $p - n$  (do wartości  $V - V_0$ ). Przez złącze popłynie wówczas duży prąd tak jak pokazano na rysunku 37.9. Natomiast przyłożenie ujemnego potencjału (napięcie zaporowe) do obszaru typu  $p$  powiększa różnicę potencjałów na złączu (do wartości  $V + V_0$ ) i wartość prądu przez złącze jest bardzo mała (praktycznie równa zero).

To urządzenie jest nazywane diodą  $p - n$ . Zauważmy, że ta dioda nie spełnia prawa Ohma. Natężenie płynącego prądu nie jest wprost proporcjonalne do przyłożonego napięcia jak w przypadku metali. Mówimy, że dioda jest *elementem nieliniowym* . Jednym z jej zastosowań są detektory radiodbiorników o modulacji amplitudowej.




Rys.37.9. Zależność prądu płynącego przez złącze  $p - n$  od zewnętrznego napięcia  $V$



To urządzenie jest nazywane diodą  $p - n$ . Zauważmy, że ta dioda nie spełnia prawa Ohma. Natężenie płynącego prądu nie jest wprost proporcjonalne do przyłożonego napięcia jak w przypadku metali. Mówimy, że dioda jest *elementem nieliniowym* . Jednym z jej zastosowań są detektory radiodbiorników o modulacji amplitudowej.

### 37.4.3 Baterie słoneczne

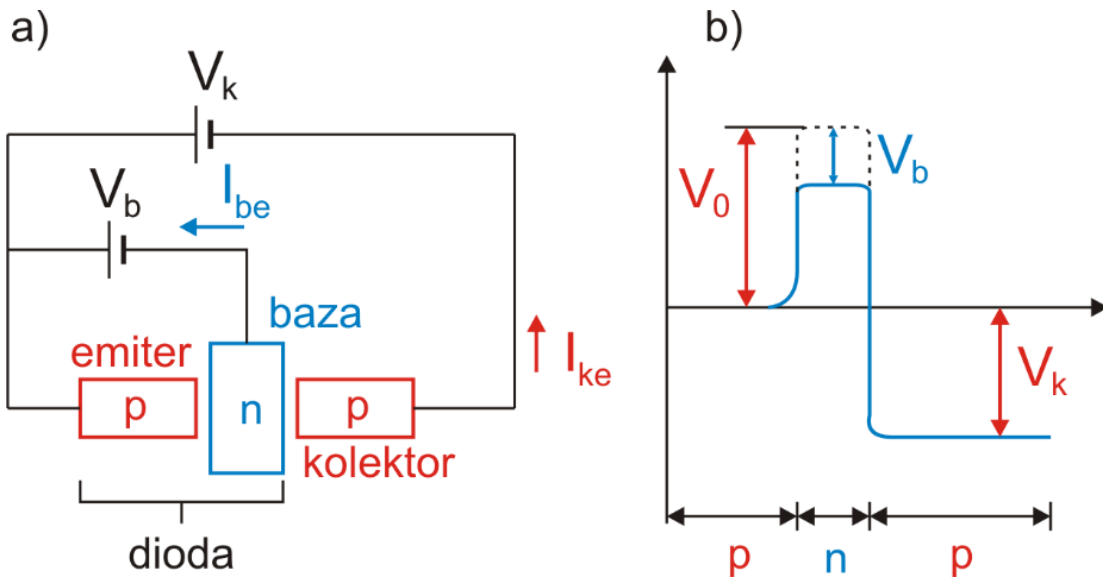
Jeżeli oświetlimy obszar przejściowy złącza  $p - n$  to elektron walencyjny pochłaniając foton zostanie wzbudzony do stanu przewodnictwa (tak samo jak energią cieplną). Pochłonięty foton kreuje parę elektron - dziura. Powstałe dziury są wciągane do obszaru  $p$ , a elektrony do obszaru  $n$ . W obwodzie zawierającym złącze  $p - n$  płynie prąd. W ten sposób można zamienić energię światła bezpośrednio na energię elektryczną.

### 37.4.4 Tranzystor

Urządzeniem, które spowodowało prawdziwą rewolucję techniczną jest niewątpliwie *tranzystor* . Schemat tranzystora  $pnp$  jest pokazany na rysunku 37.10a, a rozkład potencjału wewnątrz tranzystora na rysunku 37.10b.

Jak widać tranzystor jest diodą, do której dołączono dodatkowy obszar  $p$  (*kolektor* ). Do „diody” jest przyłożone napięcie w kierunku przewodzenia więc płynie duży prąd (dziurowy) z *emitera* do *bazy* .

Baza jest na tyle cienka, że większość dziur przechodzi (dyfunduje) do kolektora, a tylko niewielka część (około 1%) wypływa z bazy ( $I_{be}$ ). Pozostały prąd (99%) wypływa przez kolektor. Jak widać na rysunku 37.10b kolektor jest na bardziej ujemnym potencjale niż baza aby dodatkowo dziury łatwiej mogły do niego przechodzić.



Rys. 37.10. a) Schemat tranzystora; b) Rozkładu potencjału wewnątrz tranzystora

Stosunek prądu kolektora do prądu bazy  $\beta = I_{ke} / I_{be}$  nazywamy *współczynnikiem wzmocnienia prądu*  $\text{P}$ . W typowych tranzystorach  $\beta = 100$ . Oznacza to, że jeżeli na wejściu tranzystora prąd  $I_{be}$  jest sygnałem zmiennym o danej charakterystyce to na wyjściu tranzystora otrzymamy prąd  $I_{ke}$  o *takiej samej charakterystyce* ale 100 razy silniejszy. Charakterystyki tranzystorów npn są takie same z tym, że nośnikami większościowymi ładunku są elektrony, a nie dziury.

Istnieje jeszcze wiele innych urządzeń półprzewodnikowych mających szerokie zastosowania. Z konieczności ograniczymy się tylko do wymienia najważniejszych takich jak układy scalone dużej skali integracji, diody tunelowe, tyrystory, tranzystory polowe, lasery półprzewodnikowe.

### 37.5 Własności magnetyczne ciał stałych

Ze zjawiskami magnetycznymi spotykamy się na co dzień. Najczęściej mamy do czynienia z magnesami stałymi ponieważ są one powszechnie wykorzystywane we wszelkich urządzeniach technicznych. Na przykład w urządzeniach w gospodarstwie domowym posiadamy do kilkunastu kilogramów magnesów trwałych.

Omówienie własności magnetycznych rozpoczniemy od przypomnienia obliczeń, z punktu 22.4. Pokazaliśmy tam, że elektron krążący w odległości  $r$  wokół jądra w atomie posiada *magnetyczny moment dipolowy*  $\mu_e = \frac{e}{2m} L$  związany z orbitalnym momentem pędu  $L$ . Podobnie jak z orbitalnym momentem pędu elektronu również z jego spinem związany jest moment magnetyczny tak zwany *spinowy moment magnetyczny*  $\text{P}$ .

Własności magnetyczne ciał są określone przez zachowanie się tych elementarnych momentów (dipoli) magnetycznych w polu magnetycznym.

Przy opisie własności magnetycznych ciał posługujemy się pojęciem wektora *polaryzacji magnetycznej*  $M$  nazywanej też *namagnesowaniem* lub *magnetyzacją*  $\mathbb{P}$ . Wektor ten określa sumę wszystkich momentów magnetycznych, czyli wypadkowy moment magnetyczny jednostki objętości.

Jeżeli próbkę zawierającą elementarne dipole magnetyczne umieścimy w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $B_0$  to pole to dąży do ustawienia dipoli w kierunku pola i w efekcie powstaje w próbce wypadkowe pole o indukcji

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{M} = \mu_r \mathbf{B}_0 \quad (37.1)$$

Względną przenikalnością magnetyczną ośrodka  $\mu_r$   $\mathbb{P}$  można na podstawie wzoru (37.1) zapisać jako

$$\mu_r = 1 + \mu_0 \frac{M}{B_0} = 1 + \chi \quad (37.2)$$

gdzie wielkość  $\chi$  nazywana jest podatnością magnetyczną.

W zależności od wielkości i znaku podatności magnetycznej  $\chi$ , dzielimy ciała na następujące trzy grupy:

- $\chi < 0$ , ciała *diamagnetyczne*  $\mathbb{P}$ ,
- $\chi > 0$ , ciała *paramagnetyczne*  $\mathbb{P}$ ,
- $\chi \gg 0$ , ciała *ferromagnetyczne*  $\mathbb{P}$ .

### 37.5.1 Diamagnetyzm

Diamagnetyzm jest związany ze zmianą orbitalnego momentu pędu elektronów wywołaną zewnętrznym polem magnetycznym. Oznacza to, że diamagnetyzm występuje w każdym materiale umieszczonym w polu magnetycznym (w każdym materiale są elektrony). Jednak doświadczalnie jest on obserwowany tylko w ciałach, w których momenty magnetyczne elektronów wchodzących w skład danego atomu znoszą się wzajemnie (kompensują) tak, że moment magnetyczny atomu jest równy zeru. W innym przypadku efekt ten jest maskowany przez wypadkowy moment magnetyczny atomów. Diamagnetykami są na przykład te ciała, których atomy lub jony posiadają wypełnione powłoki elektronowe.

Jeżeli atom diamagnetyczny umieścimy w zewnętrznym polu magnetycznym to na elektrony działa siła magnetyczna  $\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , która powoduje zmianę siły dośrodkowej działającej na elektrony i zmienia prędkość kątową elektronów.

Zmiana ta zależy od kierunku ruchu elektronu względem pola  $\mathbf{B}$  i dlatego nie jest jednakowa dla wszystkich elektronów. Oznacza to, że momenty magnetyczne elektronów przestały się kompensować. W zewnętrznym polu magnetycznym  $\mathbf{B}$  został wyindukowany moment magnetyczny, o kierunku przeciwnym do  $\mathbf{B}$ . W efekcie próbka diamagnetyczna jest odpychana od bieguna silnego magnesu, a jej podatność magnetyczna  $\chi$  jest ujemna.



### 37.5.2 Paramagnetyzm

Paramagnetykami są ciała, których atomy posiadają wypadkowy moment magnetyczny różny od zera. Przykładem mogą być atomy o nieparzystej liczbie elektronów, w których wypadkowy spin elektronów będzie zawsze większy od zera.

Podatność paramagnetyków ma wartość nieznacznie większą od zera. W zewnętrznym polu magnetycznym atomowe dipole magnetyczne dążą do ustawienia równoległego do kierunku pola. Jednak ten proces jest silnie zakłócany przez energię drgań termicznych (energii cieplną) tak, że efektywny moment magnetyczny jest dużo mniejszy od maksymalnego, możliwego do uzyskania. Te ruchy cieplne są odpowiedzialne za to, że po usunięciu pola magnetycznego znika namagnesowanie i momenty dipolowe paramagnetyka są całkowicie nieuporządkowane.

Dla paramagnetyków (nie zawierających elektronów swobodnych) podatność magnetyczna zależy od temperatury zgodnie z prawem Curie



#### Prawo, zasada, twierdzenie


$$\chi = \frac{C}{T}$$


(37.3)

gdzie  $C$  jest *stałą Curie* .

### 37.5.3 Ferromagnetyzm

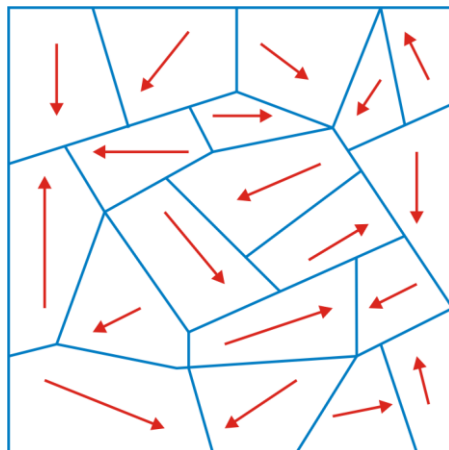
Istnieją pierwiastki takie jak Fe, Co, Ni oraz wiele różnych stopów, w których obserwujemy uporządkowanie magnetyczne pomimo, przeciwdziałających temu, ruchów termicznych atomów. Substancje te zwane ferromagnetykami charakteryzują się dużą podatnością, przy czym wielkość namagnesowania zależy zarówno od pola magnesuującego jak i od tego czy były one namagnesowane *wcześniej*.

Jest to związane z silnym *oddziaływaniem wymiennym*  jakie występuje pomiędzy spinowymi momentami magnetycznymi atomów. Ferromagnetyzm jest więc *własnością kryształów*, a nie pojedynczych atomów.


Poszczególne atomy (tak jak w paramagnetyku) posiadają momenty magnetyczne, które podczas krystalizacji, w wyniku oddziaływania wymiennego, ustawiają się równolegle do siebie w dużych obszarach kryształu zwanych *domenami* . Każda domena jest więc całkowicie magnetycznie uporządkowana. Natomiast kierunki momentów magnetycznych poszczególnych domen są różne i próbka jako całość może nie mieć wypadkowego namagnesowania.

Na rysunku 37.11 pokazano fragment nienamagnesowanego ferromagnetyka. Linie pokazują granice domen, a strzałki oznaczają kierunek momentu magnetycznego w domenie.

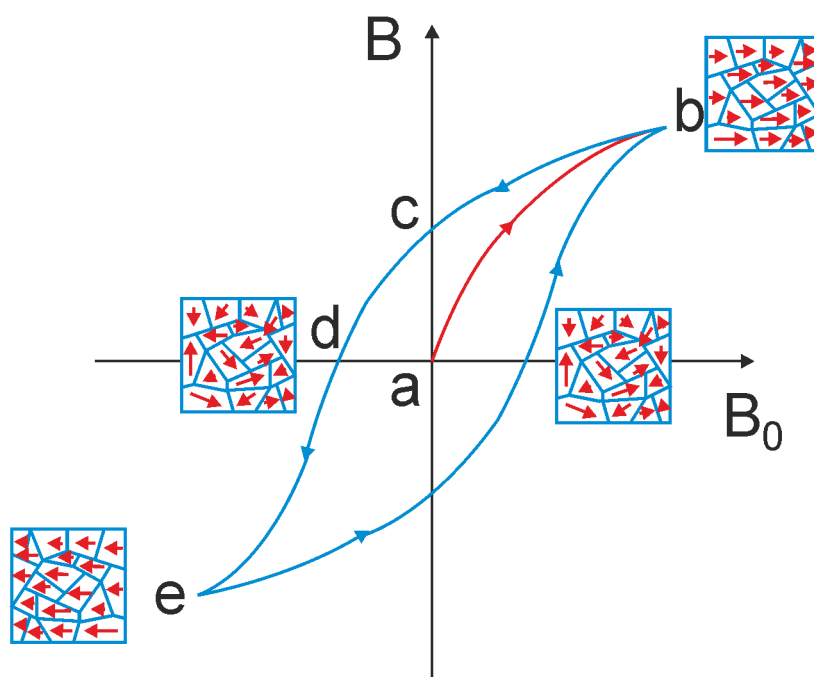
Jeżeli taki materiał ferromagnetyczny umieścimy w zewnętrznym polu magnetycznym zaobserwujemy, że próbka uzyskuje duże namagnesowanie w relatywnie niskim polu magnetycznym. Dzieje się tak dlatego, że momenty magnetyczne atomów wewnątrz domen dążą do ustawienia się zgodnie z polem oraz, że przesuują się ściany domen: domeny zorientowane zgodnie z polem rosną kosztem domen o innej orientacji.




Rys. 37.11. Domeny magnetyczne w nienamagnesowanym materiale


Ten proces *nie jest całkowicie odwracalny*. Po usunięciu pola granice domen nie wracają do położenia początkowego i materiał pozostaje namagnesowany trwale. Zjawisko to nazywamy *histerezą magnetyczną* .


Na rysunku 37.12 pokazana jest krzywa (*ab*) namagnesowania ferromagnetyka (początkowo nienamagnesowanego) i towarzysząca jej pętla histerezy (*bcdeb*).


 Rys. 37.12. Krzywa namagnesowania (*ab*) i pętla histerezy (*bcdeb*)

Nienamagnesowany (punkt *a*) materiał ferromagnetyczny magnesujemy zewnętrznym polem magnetycznym  $B_0$  aż do wartości odpowiadającej punktowi *b*. Następnie

zmniejszamy pole magnesujące do zera. Namagnesowanie materiału maleje ale nie znika całkowicie (punkt *c*); materiał został namagnesowany trwale. Namagnesowanie w punkcie *c* nosi nazwę *pozostałości magnetycznej* .


Następnie, ponownie zwiększamy pole magnesujące ale w kierunku *przeciwным* do namagnesowania. Trwale namagnesowanie ferromagnetyka zostaje usunięte dopiero po osiągnięciu wartości pola magnetycznego nazywanego *połem koercji*  (punkt *d*). Dalsze zwiększanie pola magnesującego pozwala ponownie namagnesować materiał ale w nowym kierunku (punkt *e*). Możemy teraz powtórzyć postępowanie opisane powyżej i w efekcie powrócić do punktu *b*.

Krzywa (*bcdeb*) nosi nazwę *pętli histerezy* .

Pozostałość magnetyczna i pole koercji są parametrami, które decydują o przydatności danego materiału jako magnesu trwałego.

Duża pozostałość magnetyczna gwarantuje, że będziemy mieli *silny magnes*, a duże pole koercji, że będzie on *trwały* (nie zostanie łatwo rozmagnesowany).

Materiałami, które posiadają najlepsze wartości tych parametrów są obecnie  $\text{SmCo}_5$  i  $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ .

O przydatności ferromagnetyka jako magnesu trwałego decyduje również zależność jego podatności od temperatury bo powyżej pewnej charakterystycznej temperatury  $T_C$  ferromagnetyk staje się paramagnetykiem. Temperaturę  $T_C$  nazywamy *temperaturą Curie* . Z punktu widzenia zastosowań istotne jest aby materiał ferromagnetyczny miał możliwie wysoką temperaturę przejścia w stan paramagnetyczny.

Poniżej w tabeli 37.1 podane zostały temperatury Curie wybranych ferromagnetyków.

Tab. 37.1 Temperatury Curie wybranych ferromagnetyków

Ferromagnetyk	$T_C$ (K)
Fe	1043
Co	1388
Ni	627
Gd	292
Dy	88
$\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$	600

## 38 Fizyka jądrowa

### 38.1 Wstęp

Każde jądro atomowe składa się z protonów i neutronów wiązanych siłami jądrowymi, niezależnymi od ładunku. Ponieważ neutron i proton mają prawie taką samą masę i bardzo zbliżone inne własności, więc obydwa określa się wspólną nazwą *nukleon*. Nazwa *nuklid* jest używana zamiennie z terminem jądro.

Nuklidy o tej samej liczbie protonów, różniące się liczbą neutronów nazywamy *izotopami*. Łączną liczbę protonów i neutronów w jądrze nazywamy *liczbą masową* jądra i oznaczamy literą  $A$ . Liczba neutronów jest dana równaniem  $A - Z$ , gdzie  $Z$  jest liczbą protonów zwaną *liczbą atomową*. Wartość liczby  $A$  dla jądra atomowego jest bardzo bliska masie odpowiadającego mu atomu. Atom pierwiastka  $X$  o liczbie atomowej  $Z$  i liczbie masowej  $A$  oznaczamy symbolem  ${}^A_ZX$ .

Wyniki pomiarów rozpraszania wysokoenergetycznych protonów lub neutronów na jądrach atomowych pozwalają wyznaczyć rozkład masy w jądrze i jego rozmiar. Z tych pomiarów wynika, że jądra mają kształt kulisty oraz że średni promień dla wszystkich jąder (oprócz najmniejszych) jest dany wyrażeniem

$$R = (1.2 \cdot 10^{-15}) A^{1/3} \text{ m} \quad (38.1)$$



#### Jednostki

Ponieważ rozmiary jąder i cząstek elementarnych są bardzo małe dlatego stosujemy jednostkę *femtometr* zwaną też *fermi* (fm);  $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ .

W tabeli 14.1 przedstawione zostały gęstości wybranych obiektów między innymi gęstość jądra uranu  $\rho = 10^{17} \text{ kg/m}^3$ . Obliczymy teraz tę gęstość na podstawie wzoru (38.1).

Dla jądra o promieniu  $R$  i liczbie masowej  $A$  liczba cząstek na jednostkę objętości wynosi

$$N = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi [(1.2 \cdot 10^{-15} \text{ m}) A^{1/3}]^3} = 1.38 \cdot 10^{44} \text{ nukleonów/m}^3 \quad (38.2)$$


Gęstość  $\rho$  obliczamy jako iloczyn liczby nukleonów  $N$  w jądrze i masy nukleonu. Masa protonu jest z dobrym przybliżeniem równa masie neutronu i wynosi  $M = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ . Stąd

$$\rho = NM = 2.3 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3 \quad (38.3)$$

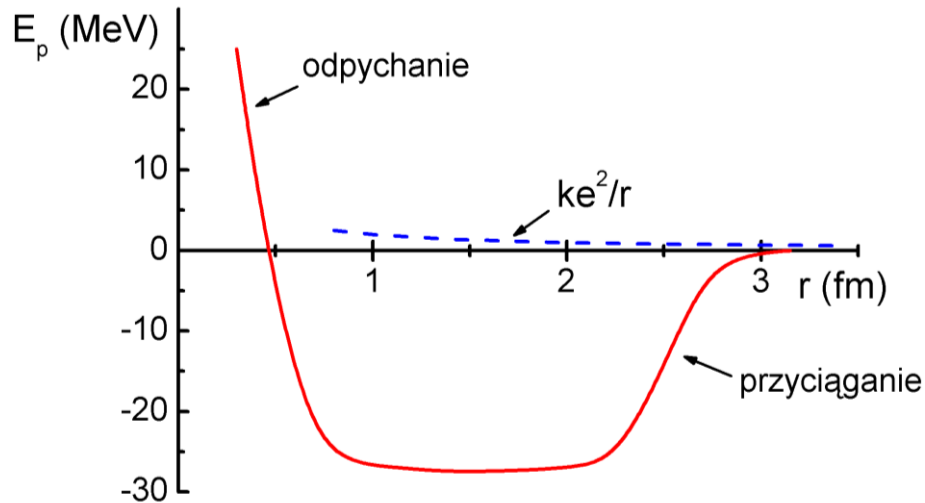
Zauważmy, że gęstość materii jądrowej nie zależy od rozmiarów jądra, ponieważ jego objętość jest proporcjonalna do liczby masowej  $A$ .

### 38.2 Oddziaływanie nukleon-nukleon

Dotychczas poznane oddziaływania (grawitacyjne, elektromagnetyczne) nie pozwalają na wyjaśnienie struktury jądra atomowego. Aby wyjaśnić co tak silnie wiąże nukleony

w jądrach atomowych trzeba wprowadzić nowe oddziaływanie. Ta siła wiążąca musi być większa niż siła odpychania elektrostatycznego występująca pomiędzy protonami. Określamy ją mianem *siły jądrowej* lub *oddziaływania silnego* .

Potencjał opisujący to oddziaływanie jest pokazany na rysunku 38.1 w porównaniu z potencjałem elektrostatycznego odpychania proton - proton.



Rys. 38.1. Energia potencjalna oddziaływania nukleon – nukleon (linia ciągła) w porównaniu z energią odpychania proton – proton (linia przerywana)

Oddziaływanie proton - proton, proton - neutron i neutron - neutron jest identyczne (jeżeli zanedbamy relatywnie małe efekty odpychania elektrostatycznego) i nazywamy go oddziaływaniem nukleon - nukleon.

Masy atomowe i energie wiązań można wyznaczyć doświadczalnie w oparciu o spektroskopię masową lub bilans energii w reakcjach jądrowych. W tabeli 38.1 poniżej zestawione są masy atomowe i energie wiązań  $\Delta E$  jąder atomów wybranych pierwiastków.

Tabela 38.1. Masy atomowe i energie wiązań jąder atomów

	$Z$	$A$	Masa (u)	$\Delta E$ (MeV)	$\Delta E/A$
${}^1_0\text{n}$	0	1	1.0086654	-	-
${}^1_1\text{H}$	1	1	1.0078252	-	-
${}^4_2\text{He}$	2	4	4.0026033	28.3	7.07
${}^9_4\text{Be}$	4	9	9.0121858	58.0	6.45
${}^{12}_6\text{C}$	6	12	12.0000000	92.2	7.68
${}^{16}_8\text{O}$	8	16	15.994915	127.5	7.97
${}^{63}_{29}\text{Cu}$	29	63	62.929594	552	8.50
${}^{120}_{50}\text{Sn}$	50	120	119.9021	1020	8.02
${}^{184}_{74}\text{W}$	74	184	183.9510	1476	8.02
${}^{238}_{92}\text{U}$	92	238	238.05076	1803	7.58

**Jednostki**

Masa jest podana w jednostkach masy atomowej (u). Za wzorzec przyjmuje się 1/12 masy atomowej węgla.

Analizując bliżej dane zestawione w tabeli 36.1 można uzyskać dalsze informacje o jądrach atomowych. Dla przykładu porównajmy masę atomu  ${}^4_2\text{He}$  z sumą mas jego składników. Z tabeli 38.1


$$M({}^4_2\text{He}) = 4.0026033 \text{ u.}$$

Natomiast całkowita masa jego składników równa jest sumie mas dwu atomów wodoru  ${}^1_1\text{H}$  i dwu neutronów:

$$2M({}^1_1\text{H}) + 2M({}^1_0\text{n}) = 2 \cdot 1.0078252 \text{ u} + 2 \cdot 1.0086654 \text{ u} = 4.0329812 \text{ u.}$$

Masy dwu elektronów są uwzględnione w masie helu jak i w masach dwóch atomów wodoru.

Zauważmy, że masa helu jest mniejsza od masy składników o wartość 0.0303779 u.

Analogiczny rachunek pokazuje, że dla każdego atomu jego masa jest mniejsza od masy składników o wielkość  $\Delta M$  zwaną *niedoborem masy* lub *defektem masy* .

Wynik ten jest świadectwem istnienia energii wiązania jąder jak i równoważności masy i energii. Zauważmy, że energia nukleonów tworzących jądro zmienia się w miarę ich zbliżania od wartości  $E = 0$  dla nukleonów swobodnych ( $r \rightarrow \infty$ ) do wartości ujemnej  $E < 0$  dla nukleonów w jądrze (rysunek 38.1). Oznacza to, że gdy układ oddzielnych swobodnych nukleonów łączy się w jądro energia układu *zmniejsza się* o wartość  $\Delta E$  energii wiązania jądra.

Zgodnie ze wzorem Einsteina całkowita energia spoczywającego jądra jest związana z jego masą zależnością (patrz uzupełnienie)  $E = mc^2$ .

Oznacza to, że zmniejszeniu o  $\Delta E$  całkowitej energii układu musi towarzyszyć, zgodnie z teorią względności, zmniejszenie masy układu o  $\Delta M$

$$\Delta E = \Delta M c^2 \quad (38.4)$$

**Ćwiczenie 38.1**

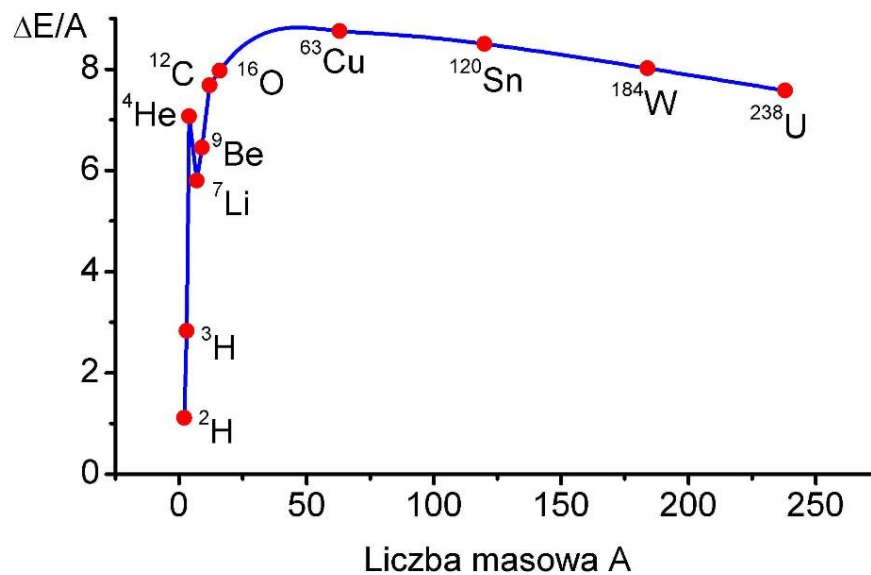
Na podstawie zależności (38.4) oblicz energię wiązania dla  ${}^4_2\text{He}$  i porównaj uzyskaną wartość z danymi doświadczalnymi podanymi w tabeli 38.1. Skorzystaj z wyliczonego niedoboru masy dla  ${}^4_2\text{He}$   $\Delta M = 0.0303779 \text{ u}$ . Wyniki zapisz poniżej.

$\Delta E =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

W ostatniej kolumnie tabeli 38.1 podana jest wielkość energii wiązania przypadającej na nukleon w jądrze  $\Delta E/A$ . Jest to jedna z najważniejszych cech charakteryzujących jądro. Zauważmy, że początkowo wielkość  $\Delta E/A$  wzrasta ze wzrostem liczby  $A$ , ale potem

przybiera w przybliżeniu stałą wartość około 8 MeV. Wyniki średniej energii wiązania na nukleon w funkcji liczby masowej jądra  $A$  są pokazane na rysunku 38.2 poniżej.






Rys. 38.2. Energia wiązania na nukleon w funkcji liczby masowej  $A$

Widzimy, że najsilniej są wiązane nukleony w jądrach pierwiastków ze środkowej części układu okresowego. Gdyby każdy nukleon w jądrze przyciągał jednakowo każdy z pozostałych nukleonów to energia wiązania powinna zmieniać się jak liczba par nukleonów (liczba wszystkich wiązań), czyli proporcjonalnie do  $A^2$  (wielkość  $\Delta E/A$  byłaby proporcjonalna do  $A$ ). To, że tak nie jest dla  $A > 30$  wynika głównie z krótkiego zasięgu sił jądrowych.

### 38.3 Rozpady jądrowe

Rozpady jądrowe zachodzą zawsze (prędzej czy później) jeśli jądro o pewnej liczbie nukleonów znajdzie się w stanie energetycznym, nie będącym najniższym możliwym dla układu o tej liczbie nukleonów. Takie nietrwałe (w stanach niestabilnych) jądra mogą powstać w wyniku reakcji jądrowych. Niektóre reakcje są wynikiem działań laboratoryjnych, inne dokonały się podczas powstawania naszej części Wszechświata.

Jądra nietrwałe pochodzenia naturalnego są nazywane *promieniotwórczymi* , a ich rozpady noszą nazwę *rozpadów promieniotwórczych* . Rozpady promieniotwórcze dostarczają wielu informacji zarówno o jądrach atomowych ich budowie, stanach energetycznych, oddziaływaniach ale również wielu zasadniczych informacji o pochodzeniu Wszechświata.

Badając własności promieniotwórczości stwierdzono, że istnieją trzy rodzaje promieniowania alfa ( $\alpha$ ), beta ( $\beta$ ) i gamma ( $\gamma$ ). Po dalszych badaniach stwierdzono, że promienie  $\alpha$  to jądra helu, promienie  $\gamma$  to fotony, a promienie  $\beta$  to elektrony lub *pozytony*  (cząstka elementarna dodatnia o masie równej masie elektronu).

### 38.3.1 Rozpad alfa

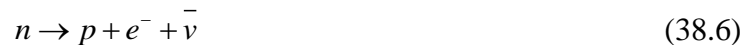
Szczególnie ważnym rozpadem promieniotwórczym jest rozpad alfa ( $\alpha$ ) występujący zazwyczaj w jądrach o  $Z \geq 82$ . Rozpad alfa polega na przemianie niestabilnego jądra w nowe jądro przy emisji jądra  ${}^4\text{He}$  tzn. cząstki  $\alpha$ . Zgodnie z wykresem 38.2 dla ciężkich jąder energia wiązania pojedynczego nukleonu maleje ze wzrostem liczby masowej więc zmniejszenie liczby nukleonów (w wyniku wypromieniowania cząstki  $\alpha$ ) prowadzi do powstania silniej związanego jądra. Proces zachodzi samorzutnie bo jest korzystny energetycznie. Energia wyzwolona w czasie rozpadu (energetyczny równoważnik niedoboru masy) jest unoszona przez cząstkę  $\alpha$  w postaci energii kinetycznej. Przykładowa reakcja dla jądra uranu wygląda następująco




### 38.3.2 Rozpad beta

Istnieją optymalne liczby protonów i neutronów, które tworzą jądra najsilniej związane (stabilne). Jądra, których ilość protonów  $Z$  różni się od wartości odpowiadającej stabilnym jądrum o tej samej liczbie masowej  $A$ , mogą zmieniać  $Z$  w kierunku jąder stabilnych poprzez rozpad beta ( $\beta$ ).

Jeżeli rozpatrywane jądro ma większą od optymalnej liczbę neutronów to w jądrze takim zachodzi przemiana neutronu w proton



Neutron  $n$  rozpada się na proton  $p$ , elektron  $e^-$  i antyneutrino  $\bar{\nu}$  (cząstka elementarna o zerowym ładunku i zerowej masie spoczynkowej). Ten proces nosi nazwę rozpadu  $\beta^-$  (*beta minus* ) . Przykładem takiej przemiany jest rozpad uranu  ${}^{239}\text{U}$




Powstały izotop też nie jest trwały i podlega dalszemu rozpadowi




Zauważmy, że w takim procesie liczba protonów  $Z$  wzrasta o jeden, a liczba nukleonów  $A$  pozostaje bez zmiany. Z kolei gdy jądro ma nadmiar protonów to zachodzi proces przemiany protonu w neutron



Proton  $p$  rozpada się na neutron  $n$ , pozyton  $e^+$  i neutrino  $\nu$  (cząstka elementarna o własnościach bardzo zbliżonych do antyneutrino). Ten proces nosi nazwę rozpadu  $\beta^+$  (*beta plus* ) . W tym procesie liczba protonów  $Z$  maleje o jeden, a liczba nukleonów  $A$  pozostaje bez zmiany.



Pierwiastki powstające w rozpadach alfa i beta są na ogół także promieniotwórcze i ulegają dalszemu rozpadowi. Większość naturalnych pierwiastków promieniotwórczych można podzielić na trzy grupy, nazywane *szeregami promieniotwórczymi* . W szeregu uranu rozpoczynającym się od  ${}^{238}_{92}\text{U}$  liczby masowe zmieniają się według wzoru  $4n + 2$ . W szeregu aktynu rozpoczynającym się od  ${}^{235}_{92}\text{U}$  liczby masowe zmieniają się według wzoru  $4n + 3$ , a w szeregu toru rozpoczynającym się od  ${}^{232}_{90}\text{Th}$  liczby masowe są opisane wzorem  $4n$ . Wszystkie trzy szeregi kończą się na trwałych izotopach ołowiu.

Każdy naturalny materiał promieniotwórczy zawiera wszystkie pierwiastki wchodzące w skład danej rodziny i dlatego promieniowanie wysyłane np. przez minerały jest bardzo złożone.



### Ćwiczenie 38.2

Rozpatrzmy teraz cykl przemian, w wyniku których jądro  ${}^{238}\text{U}$  przechodzi w  ${}^{234}\text{U}$ . Spróbuj odpowiedzieć jakie przemiany miały miejsce i jakie cząstki (promieniowanie) zostały wyemitowane. Odpowiedź zapisz poniżej.

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

### 38.3.3 Promieniowanie gamma

Rozpadom alfa i beta towarzyszy zazwyczaj emisja wysokoenergetycznego promieniowania elektromagnetycznego zwanego promieniowaniem gamma ( $\gamma$ ). Ta samoczynna emisja fotonów następuje gdy jądra posiadające nadmiar energii czyli znajdujące się w stanie wzbudzonym przechodzą do niższych stanów energetycznych. Widmo promieniowania  $\gamma$  ma charakter liniowy tak jak charakterystyczne promieniowanie X i bardzo wysoką energię, tysiące razy większą od energii fotonów wysyłanych przez atomy.

Jądra w stanie wzbudzonym można również otrzymać za pomocą neutronów o małej energii. Przykładowo, jeżeli skierujemy wiązkę takich powolnych neutronów na próbkę uranu  ${}^{238}\text{U}$  to część neutronów zostanie wychwyconych i powstaną jądra uranu  ${}^{239}\text{U}^*$  w stanie wzbudzonym (oznaczone \*). Takie jądra przechodzą do stanu podstawowego emitując kwanty  $\gamma$ . Proces ten przebiega następująco



oraz



Podkreślmy, że emisji promieniowania gamma nie towarzyszy zmiana liczby masowej ani liczby atomowej.

### 38.3.4 Prawo rozpadu nuklidów

Rozpatrzmy teraz układ zawierający w chwili początkowej wiele jąder tego samego rodzaju. Jądra te podlegają rozpadowi promieniotwórczemu ( $\alpha$  lub  $\beta$ ). Chcemy określić liczbę jąder pozostałych po czasie  $t$  od chwili początkowej to jest tych, które nie uległy rozpadowi.

W tym celu oznaczamy przez  $N$  liczbę jąder w materiale, w chwili  $t$ . Wtedy  $dN$  jest liczbą jąder, które rozpadają się w czasie  $dt$  tzn. w przedziale  $(t, t + dt)$ . Spodziewana liczba rozpadów (liczba jąder, które się rozpadną) w czasie  $dt$  jest dana wyrażeniem

$$dN = -\lambda N dt \quad (38.12)$$

gdzie  $\lambda$  jest stałą rozpadu. Określa ona prawdopodobieństwo rozpadu w jednostce czasu. Stała  $\lambda$  nie zależy od czynników zewnętrznych takich jak temperatura czy ciśnienie. Znak minus w równaniu (38.12) wynika stąd, że  $dN$  jest liczbą ujemną bo liczba jąder  $N$  maleje z czasem.

Zależność (38.12) opisuje doświadczalny fakt, że liczba jąder rozpadających się w jednostce czasu jest *proporcjonalna do aktualnej liczby jąder  $N$* . Równanie to możemy przekształcić do postaci

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt \quad (38.13)$$

a następnie scałkować obustronnie

$$\int_{N(0)}^{N(t)} \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt \quad (38.14)$$

Skąd

$$\ln N(t) - \ln N(0) = \ln \frac{N(t)}{N(0)} = -\lambda t \quad (38.15)$$

lub

$$\frac{N(t)}{N(0)} = e^{-\lambda t} \quad (38.16)$$

Skąd ostatecznie otrzymujemy *wykładnicze prawo rozpadu*.



#### Prawo, zasada, twierdzenie

$$N(t) = N(0) e^{-\lambda t} \quad (38.17)$$

$N(0)$  jest liczbą jąder w chwili  $t = 0$ , a  $N(t)$  liczbą jąder po czasie  $t$ .

Często wyraża się  $N$  poprzez średni czas życia jąder  $\tau$ , który z definicji jest równy odwrotności stałej rozpadu  $\lambda$

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad (38.18)$$

Możemy teraz przepisać prawo rozpadu w postaci

$$N = N_0 e^{-t/\tau} \quad (38.19)$$

Do scharakteryzowania szybkości rozpadu używa się *czasu połowicznego rozpadu* (zaniku)  $T$ . Jest to taki czas, po którym liczba jąder danego rodzaju maleje do połowy to znaczy  $N = (1/2) N_0$ . Podstawiając tę wartość do równania (38.19) otrzymujemy

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-T/\tau} \quad (38.20)$$

Skąd

$$2 = e^{T/\tau} \quad (38.21)$$

i ostatecznie

$$T = 0.693\tau \quad (38.22)$$

Czasy połowicznego zniknięcia pierwiastków leżą w bardzo szerokim przedziale. Przykładowo dla uranu  $^{238}\text{U}$  czas połowicznego zniknięcia wynosi  $4.5 \cdot 10^9$  lat (jest porównywalny z wiekiem Ziemi), a dla polonu  $^{212}\text{Po}$  jest rzędu  $10^{-6}$  s.



### Ćwiczenie 38.3

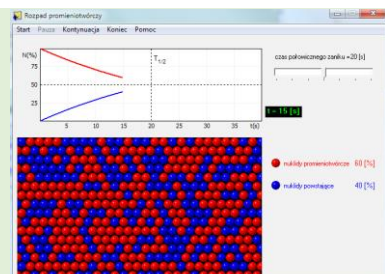
Spróbuj teraz obliczyć jaki jest czas połowicznego rozpadu pierwiastka promieniotwórczego  $^{32}\text{P}$  jeżeli stwierdzono, że po czasie 42 dni rozpadło się 87.5% początkowej liczby jąder. Wynik zapisz poniżej.

$T =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.



Możesz prześledzić jak przebiega rozpad nuklidów korzystając z programu komputerowego „Prawo promieniotwórczego rozpadu nuklidów” dostępnego na stronie WWW autora i na stronie Open AGH.





## 38.4 Reakcje jądrowe

### 38.4.1 Rozszczepienie jąder atomowych

Z wykresu 38.2 wynika, że energia wiązania na jeden nukleon wzrasta z liczbą masową aż do  $A > 50$ . Dzieje się tak dlatego, że dany nukleon jest przyciągany przez coraz większą liczbę sąsiednich nukleonów. Jednak przy dalszym wzroście liczby nukleonów nie obserwujemy wzrostu energii wiązania nukleonu w jądrze, a jej zmniejszanie.

Wyjaśnienie tego efektu można znaleźć analizując wykres 38.1. Widać na nim, że siły jądrowe mają bardzo krótki zasięg i jeżeli odległość między dwoma nukleonami jest większa niż  $2.5 \cdot 10^{-15}$  m to oddziaływanie pomiędzy nimi jest słabsze. Jądra zawierające dużą liczbę nukleonów mają większe rozmiary i odległości pomiędzy poszczególnymi nukleonami mogą być relatywnie duże, a stąd słabsze przyciąganie pomiędzy nimi.

Konsekwencją takich zmian energii wiązania ze wzrostem liczby nukleonów w jądrze jest występowanie zjawisk *rozszczenia*  i *syntezy jądrowej* .

Jeżeli ciężkie jądro rozdzielimy na dwie części, to powstałe dwa mniejsze jądra są silniej związane od jądra wyjściowego to znaczy te dwie części mają masę mniejszą niż masa jądra wyjściowego. Dzięki temu w reakcji rozszczepienia wydzielą się energia. Źródłem energii bomby atomowej i reaktora jądrowego są procesy rozszczepienia jądrowego.

Spontaniczne rozszczepienie naturalnego jądra jest na ogół mniej prawdopodobne niż rozpad  $\alpha$  tego jądra. Można jednak zwiększyć prawdopodobieństwo rozszczepienia bombardując jądra neutronami o odpowiednio wysokiej energii. Właśnie takie neutrony powodują reakcje rozszczepienia uranu  $^{235}\text{U}$  i plutonu  $^{239}\text{Pu}$ .





#### Ćwiczenie 38.4

W reakcji rozszczepienia uranu wydzielą się energia 200 MeV. Na tej podstawie oblicz jaka jest różnica pomiędzy masą jądra uranu, a sumą mas produktów rozszczepienia i jaki stanowi to procent masy uranu. Pamiętaj o tym, że masa jest równoważna energii zgodnie z zależnością  $E = mc^2$ . Wynik zapisz poniżej.



$\Delta M =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Analizując liczby masowe i atomowe pierwiastków (na przykład na podstawie tabeli 38.1) można zauważyć, że pierwiastki lekkie zawierają w jądrze zbliżone ilości protonów i neutronów podczas gdy dla pierwiastków ciężkich przeważa liczba neutronów.

W związku z tym w reakcji rozszczepienia powstaje na ogół kilka neutronów. W konsekwencji rozszczepienie jądrowe może stać się procesem *samopodtrzymującym* w wyniku tak zwanej *reakcji łańcuchowej* . Jeżeli przynajmniej jeden z powstałych neutronów wywoła kolejne rozszczepienie to proces będzie sam się podtrzymywał. Ilość materiału powyżej, której spełniony jest powyższy warunek nazywamy *masą krytyczną* .

Jeżeli liczba rozszczepień na jednostkę czasu jest utrzymywana na stałym poziomie to mamy do czynienia z kontrolowaną reakcją łańcuchową. Po raz pierwszy taką reakcję rozszczepienia przeprowadzono (E. Fermi) na Uniwersytecie Chicago w 1942 r.

Masa materiału rozszczepianego (np.  $^{235}\text{U}$  czy  $^{239}\text{Pu}$ ) może też być *nadkrytyczna* . Wówczas neutrony powstałe w wyniku jednego rozszczepienia wywołują więcej niż jedną reakcję wtórną. Mamy do czynienia z *lawinową reakcją łańcuchową* . Cała masa nadkrytyczna może być rozszczepiona (zużyta) w bardzo krótkim czasie,  $t < 0.001$  s, ze względu na dużą prędkość neutronów ( $3 \cdot 10^5$  m/s). Tak eksploduje bomba atomowa. Najczęściej przygotowuje się kulę o masie nadkrytycznej ale rozrzedzonej. Następnie otacza się ją klasycznymi ładunkami wybuchowymi, których detonacja wywołuje wzrost ciśnienia zewnętrznego i gwałtownie zwiększenie gęstości materiału (zmniejsza się objętość kuli). W konsekwencji osiągnięty zostaje stan nadkrytyczny.

Oczywiście w elektrowniach atomowych spalanie paliwa odbywa się bardzo powoli. W związku z tym konieczne jest spowalnianie neutronów i dobór warunków stacjonarnej pracy reaktora. Wymaga to stosowania skomplikowanych instalacji dużo droższych niż w elektrowniach konwencjonalnych spalających węgiel. Dodatkowe, bardzo znaczne koszty w elektrowni atomowej są związane z budową i eksploatacją systemu ochrony i zabezpieczeń oraz ze składowaniem odpadów promieniotwórczych. Jednak pomimo tak wysokich kosztów energia jądrowa skutecznie konkuruje z paliwem tradycyjnym i jest bardziej ekonomiczna na dużą skalę. Również zanieczyszczenia powstające przy spalaniu węgla w tradycyjnych elektrowniach stanowią nie mniejszy (a w opinii wielu znacznie większy) problem niż odpady promieniotwórcze.



### Ćwiczenie 38.5

Żeby przekonać się o skali problemu oblicz jaką ilość węgla należy spalić aby uzyskać tyle samo energii co w reakcji rozszczepienia 1 kg uranu. W obliczeniach uwzględnij wyniki uzyskane w poprzednim ćwiczeniu oraz to, że przy spalaniu 1 kg węgla wydziela się średnio energia  $2.5 \cdot 10^7$  J. Wynik zapisz poniżej.

$m_C =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Energia jądrowa powinna ułatwić pokrycie światowego zapotrzebowania na energię w obliczu wyczerpywania się tradycyjnych źródeł energii.


### 38.4.2 Reakcja syntezy jądrowej

Ponownie odwołujemy się do wykresu 38.2. Wynika z niego, że masa dwóch lekkich jąder jest większa niż masa jądra powstającego po ich połączeniu. Jeżeli więc takie jądra zbliżymy do siebie na dostatecznie małą odległość, to z ich połączenia powstanie nowe jądro i wydzieli się energia związana z różnicą mas.

Przykładowo przy połączeniu dwóch deuteronów  $^2_1\text{H}$  (jądro izotopu wodoru) w jądro helu, 0.6% masy zostanie zamienione na energię. Zauważ, że ta metoda jest wydajniejsza od rozszczepiania jąder uranu (ćwiczenie powyżej). Poza tym dysponujemy nieograniczonym źródłem deuteru w wodzie mórz i oceanów.

Jednak istnieje przeszkoda w otrzymywaniu energii tą metodą. Jest nią odpychanie kulombowskie, które nie pozwala zbliżyć się deuteronom na odległość niezbędną do ich połączenia (porównywalną z zasięgiem przyciągających sił jądrowych). Reakcja ta nie jest


możliwa w temperaturze pokojowej ale byłaby możliwa gdyby deuter mógł być ogrzany do temperatury około  $5 \cdot 10^7$  K.

Reakcje, które wymagają takich temperatur nazywamy *reakcjami termojądrowymi* . Temperatury osiągnięte podczas wybuchu bomby atomowej są wystarczające do zapoczątkowania takiej reakcji. Raz zapoczątkowana reakcja termojądrowa wytwarza dostateczną ilość energii do utrzymania wysokiej temperatury (dopóki materiał nie zostanie spalony). Tak działa bomba wodorowa.

Nam jednak zależy na uzyskaniu użytecznej energii z reakcji syntezy jądrowej to znaczy na prowadzeniu reakcji w sposób kontrolowany. Dlatego prowadzone są próby skonstruowania reaktora termojądrowego. Podstawowym problemem jest utrzymanie gazu o tak wysokiej temperaturze, w pewnej ograniczonej objętości. Czas trwania reakcji musi być wystarczająco długi żeby wytworzona energia była większa od energii zużytej na uzyskanie tak gorącego gazu (uruchomienie reaktora). Stwarza to wiele problemów technicznych i jak dotąd nie udało się przeprowadzić zakończonej sukcesem kontrolowanej reakcji termojądrowej.

W przyrodzie obserwuje się ciągłe wytwarzanie energii termojądrowej. Procesy termojądrowe są źródłem energii gwiazd w tym i „naszego” Słońca.

### 38.4.3 Źródła energii gwiazd

Ewolucja wielu gwiazd rozpoczyna się od wyodrębnienia się chmury wodoru z materii międzygwiazdnej. Chmura ta zapada się pod wpływem siły grawitacji. Zagęszczaniu materii pod wpływem grawitacji towarzyszy wzrost temperatury aż osiągnięte zostaje stadium *protogwiazdy* .

Ponieważ energia protogwiazdy, źródłem której jest grawitacyjne zapadanie się, zmniejsza się przez promieniowanie elektromagnetyczne (protogwiazda świeci) trwa dalsze jej kurczenie się aż do pojawienia się nowego źródła energii, które może temu przeciwdziałać. Tym nowym źródłem są reakcje termojądrowe.

Spróbujmy teraz obliczyć rozmiar (promień) Słońca w funkcji jego masy. W tym celu zakładamy, że gęstość Słońca jest stała (w rzeczywistości rdzeń ma większą gęstość niż warstwy przy powierzchni), a jego masę przyjmujemy równą  $M_S = 2 \cdot 10^{30}$  kg.

Zapadanie się masy gazu w Słońcu zostanie zatrzymane gdy ciśnienie termiczne wywołane ogrzewaniem gazu przez energię z reakcji termojądrowych wyrówna ciśnienie grawitacyjne. Obliczamy więc ciśnienie grawitacyjne wewnątrz jednorodnej kuli o promieniu  $R$ . Korzystamy z równania  $p = \rho \bar{g} h$ , gdzie  $\bar{g} = \frac{1}{2} g$  jest wartością średnią przyspieszenia (na powierzchni kuli przyspieszenie jest równe  $g$ , a w środku przyspieszenie jest równe zero). Stąd

$$P_g = \frac{1}{2} \rho g R \quad (38.23)$$

gdzie  $g = \frac{GM_S}{R^2}$ . Ostatecznie więc

$$P_g = \frac{1}{2} \rho G \frac{M_S}{R} \quad (38.24)$$

Na podstawie równania stanu gazu doskonałego ciśnienie termiczne gazu wynosi

$$P_T = \frac{\rho kT}{m_p} \quad (38.25)$$

gdzie  $m_p$  jest masą protonu (masa atomu wodoru  $\approx$  masa protonu). Porównanie tych dwóch ciśnień daje wyrażenie na promień Słońca

$$\frac{kT}{m_p} = \frac{1}{2} \frac{GM_S}{R} \quad (38.26)$$

skąd

$$R = \frac{GM_S m_p}{2kT} \quad (38.27)$$

Teraz spróbujemy ocenić jaka jest najniższa temperatura potrzebna do zbliżenia dwóch protonów na odległość  $2 \cdot 10^{-15}$  m wystarczającą do ich połączenia się. Każdy proton ma energię  $(3/2)kT$ , więc energia kinetyczna pary protonów jest równa  $3kT$ . Ta energia musi zrównoważyć energię odpychania elektrostatycznego równą  $e^2 / 4\pi\epsilon_0 R$ . Z porównania tych energii otrzymujemy temperaturę  $T \approx 2.8 \cdot 10^9$  K.

We wnętrzu gwiazdy wystarcza temperatura o jeden lub nawet dwa rzędy wielkości niższa, bo zawsze znajdzie się wystarczająca ilość protonów o prędkościach większych od średniej (przypomnij sobie Maxwella rozkład prędkości - punkt 16.2) aby podtrzymać reakcję. Tak więc temperatura, dla której zaczynają zachodzić reakcje termojądrowe jest rzędu  $10^7$  K. Na podstawie tych danych otrzymujemy wartość promienia Słońca zbliżoną do wartości obserwowanej  $R = 7 \cdot 10^8$  m.

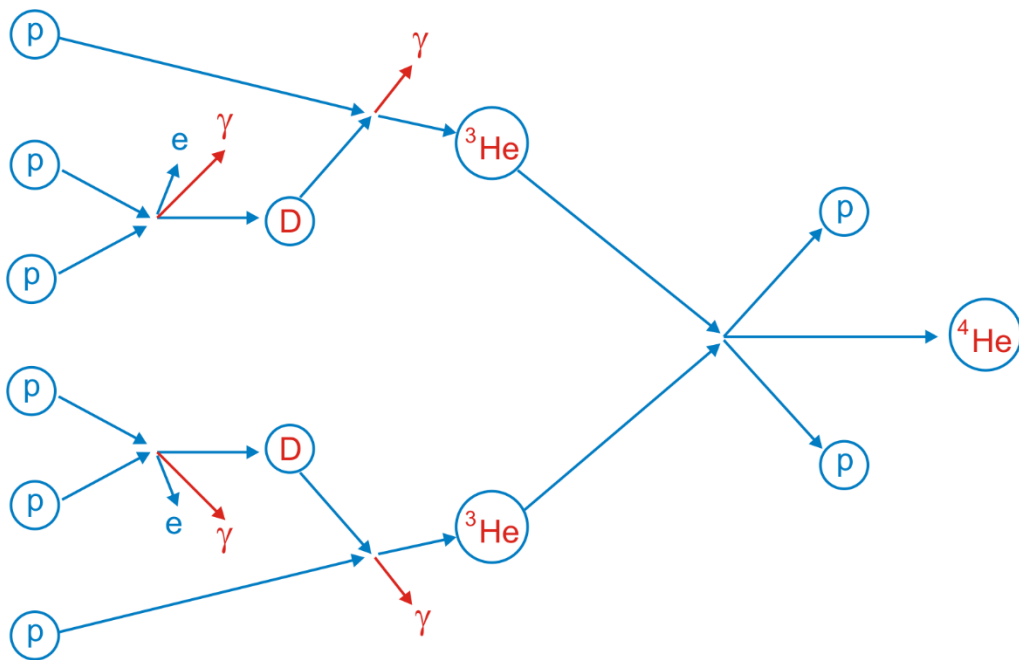
Temperatura rzędu  $10^7$  K jest więc dostatecznie wysoka, aby wywołać następujące reakcje termojądrowe



gdzie D oznacza izotop wodoru  ${}^2_1\text{H}$  - deuter. Ten ciąg reakcji termojądrowych pokazany na rysunku 38.3 jest znany jako *cykl wodorowy*.

W cyklu wodorowym wytworzona zostaje cząstka alfa, 2 pozytony, 2 neutrina i 2 fotony gamma. Masa jądra helu stanowi 99.3% masy czterech protonów więc wydziela się energia związana z różnicą mas. Cykl wodorowy jest głównym mechanizmem produkcji energii przez Słońce i inne gwiazdy bogate w wodór.

Energia wytwarzana przez Słońce jest ogromna. W ciągu sekundy 592 miliony ton wodoru zamieniają się w 587.9 milionów ton helu. Różnica tj. 4.1 miliony ton jest zamieniana na energię (w ciągu sekundy). Odpowiada to mocy około  $4 \cdot 10^{26}$  W.



Rys. 38.3. Schemat cyklu wodorowego

**Ćwiczenie 38.6**

Na podstawie tych danych, spróbuj teraz obliczyć po jakim czasie wypaliłoby się Słońce (o masie  $M_S = 2 \cdot 10^{30}$  kg) to znaczy cały wodór zamieniłby się w hel. Pamiętaj, że energia wytwarzana przy przemianie wodoru w hel stanowi 0.7% masy "paliwa" wodorowego. Porównaj otrzymany wynik z dotychczasowym wiekiem Słońca, który szacuje się na  $5 \cdot 10^9$  lat. Wynik zapisz poniżej.

$t =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Ten rozdział kończy moduł jedenasty; możesz teraz przejść do podsumowania i zadań testowych.



## Podsumowanie

- Z zasady Pauliego wynika, że w danym stanie, opisanym liczbami kwantowymi  $n, l, m_l$  z uwzględnieniem spinu elektronu, może znajdować się tylko jeden elektron.
- Widmo promieniowania X składa się z widma ciągłego i liniowego (charakterystycznego). Krótkofalowa granica widma ciągłego jest dana przez  $\lambda_{min} = \frac{hc}{eU}$ , gdzie  $U$  jest napięciem przyspieszającym elektrony w lampie rentgenowskiej.
- Ze względu na typy wiązań kryształy dzielimy na: kryształy cząsteczkowe, kryształy jonowe, kryształy atomowe (kowalენტne), kryształy metaliczne.
- Podstawowymi materiałami półprzewodnikowymi są german i krzem, pierwiastki z IV grupy układu okresowego. Są to półprzewodniki samoistne. Domieszkując je pierwiastkami z V i III grupy układu okresowego otrzymujemy półprzewodniki typu  $n$  i  $p$  odpowiednio.
- W zależności od wielkości i znaku podatności magnetycznej  $\chi$ , dzielimy ciała na następujące trzy grupy: 1)  $\chi < 0$ , ciała diamagnetyczne; 2)  $\chi > 0$ , ciała paramagnetyczne; 3)  $\chi \gg 0$ , ciała ferromagnetyczne. Ferromagnetyzm jest własnością kryształów, a nie pojedynczych atomów.
- Pozostałość magnetyczna, pole koercji i temperatura Curie są parametrami, które decydują o przydatności danego materiału jako magnesu trwałego.
- Siłę wiążącą nukleony w jądrze określamy mianem siły jądrowej lub oddziaływania silnego. Siły te są krótkozasięgowe, działają na odległościach  $\approx 2 \cdot 10^{-15}$  m.
- Gdy układ oddzielnych swobodnych nukleonów łączy się w jądro energia układu zmniejsza się o wartość  $\Delta E$  energii wiązania jądra  $\Delta E = \Delta M c^2$ . Dlatego dla każdego atomu jego masa jest mniejsza od masy składników o wielkość  $\Delta M$  zwaną niedoborem masy lub defektem masy.
- Nukleony najsilniej są związane w jądrach pierwiastków ze środkowej części układu okresowego.
- Istnieją trzy rodzaje promieniowania alfa (jądra helu), beta (elektrony lub pozytony) i gamma (fotony).
- Z próbki zawierającej  $N_0$  jąder promieniotwórczych po czasie  $t$  pozostaje  $N = N_0 e^{-t/\tau}$ .
- Jeżeli ciężkie jądro rozdzielimy na dwie części, to powstałe dwa mniejsze jądra są silniej związane od jądra wyjściowego to znaczy te dwie części mają masę mniejszą niż masa jądra wyjściowego. Dzięki temu w reakcji rozszczepienia wydziela się energia. Źródłem energii bomby atomowej i reaktora jądrowego są procesy rozszczepienia jądrowego.
- Energia może być wytwarzana również w reakcji syntezy lekkich jąder na przykład deuteronów  $^2\text{H}$ . Do przewyciężenia odpychania kulombowskiego dodatnich jąder celem zbliżenia ich na odległość niezbędną do ich połączenia potrzebne są temperatury rzędu  $10^7 - 10^8$  K. Reakcje, które wymagają takich temperatur nazywamy reakcjami termojądrowymi. Są one źródłem energii gwiazd w tym i „naszego” Słońca.

## Materiały dodatkowe do Modułu XI

### Rozkład Boltzmana

Na początku rozważmy układ zawierający pewną niewielką ilość identycznych cząstek (np. cztery), których energia może przyjmować jedną z następujących wartości  $E = 0, \Delta E, 2\Delta E, 3\Delta E, 4\Delta E, \dots$ . Energia całkowita układu ma wartość  $3\Delta E$ , a cząstki znajdują się w równowadze w temperaturze  $T$ .

By osiągnąć ten stan równowagi cząstki muszą wymieniać energię ze sobą (na przykład poprzez zderzenia). Podczas tej wymiany ich energie zmieniają się, przyjmując różne wartości.

W ten sposób może być realizowany każdy możliwy podział energii całkowitej  $3\Delta E$  pomiędzy te cząstki. W tabeli XI.1.1, poniżej pokazane są te wszystkie możliwe podziały. Zwróćmy uwagę, że obliczając ilość sposobów realizacji danego podziału traktujemy jako rozróżnialny podział, który można otrzymać z danego w drodze przestawiania cząstek pomiędzy różnymi stanami. Przestawienia cząstek w tym samym stanie energetycznym nie prowadzą do nowych sposobów realizacji podziałów, bo nie można eksperymentalnie odróżnić od siebie takich samych cząstek o tej samej energii.

Ponadto przyjmujemy, że wszystkie sposoby podziału energii mogą wydarzyć się z tym samym prawdopodobieństwem.

Tabela XI.1.1

podział $k$	$E = 0$	$E = \Delta E$	$E = 2\Delta E$	$E = 3\Delta E$	liczba sposobów realizacji podziału	$P_k$
1	1,2,3			4	4	4/20
1	1,2,4			3		
1	1,3,4			3		
1	2,3,4			1		
2	1,2	3	4		12	12/20
2	1,2	4	3			
2	1,3	2	4			
2	1,3	4	2			
2	1,4	2	3			
2	1,4	3	2			
2	2,3	1	4			
2	2,3	4	1			
2	2,4	1	3			
2	2,4	3	1			
2	3,4	1	2			
2	3,4	2	1			
3	1	2,3,4			4	4/20
3	2	1,3,4				
3	3	1,2,4				
3	4	1,2,3				
<b><math>N(E)</math></b>	<b>40/20</b>	<b>24/20</b>	<b>12/20</b>	<b>4/20</b>		

Następnie obliczamy  $N(E)$  czyli prawdopodobną ilość cząstek w danym stanie energetycznym  $E$ . Rozpatrzmy stan  $E = 0$ .

Dla podziału  $k = 1$  mamy  $N_1 = 3$  cząstki w stanie o  $E = 0$ , a prawdopodobieństwo, że taki podział ma miejsce wynosi  $P_1 = 4/20$ .

Dla podziału  $k = 2$  mamy  $N_2 = 2$  cząstki w stanie o  $E = 0$ , a prawdopodobieństwo, że taki podział ma miejsce wynosi  $P_2 = 12/20$ .

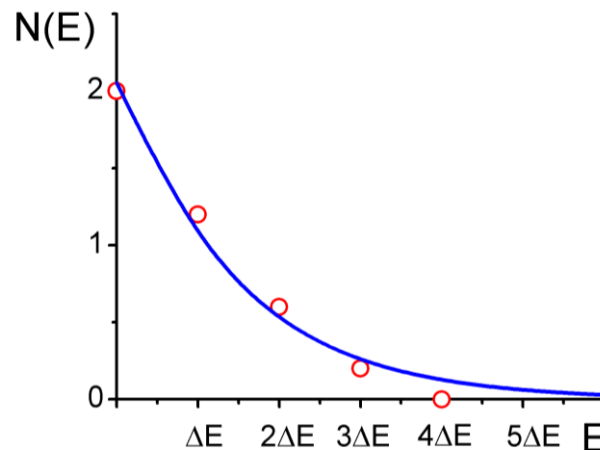
Dla podziału  $k = 3$  mamy  $N_3 = 1$  cząstkę w stanie o  $E = 0$ , a prawdopodobieństwo, że taki podział ma miejsce wynosi  $P_3 = 4/20$ .

Zatem prawdopodobna ilość cząstek w stanie  $E = 0$  wynosi:

$$N(E) = N_1P_1 + N_2P_2 + N_3P_3 = 3 \cdot (4/20) + 2 \cdot (12/20) + 1 \cdot (4/20) = 2$$

Analogicznie obliczamy  $N(E)$  dla pozostałych wartości  $E$  (patrz ostatni wiersz tabeli).

Zauważmy, że suma tych liczb wynosi cztery, tak że jest równa całkowitej liczbie cząstek we wszystkich stanach energetycznych. Wykres zależności  $N(E)$  jest pokazany na rysunku poniżej.



Ciągła krzywa na rysunku jest wykresem malejącej wykładniczo funkcji  $N(E) = Ae^{-\frac{E}{E_0}}$ .

Możemy teraz wybierać coraz mniejsze  $\Delta E$  (zwiększając ilość dozwolonych stanów) przy tej samej co poprzednio wartości całkowitej energii. Oznacza to, że będziemy dodawać coraz więcej punktów do naszego wykresu, aż w granicy gdy  $\Delta E \rightarrow 0$  przejdziemy do funkcji ciągłej danej powyższym równaniem.

Potrzebujemy jeszcze znaleźć wartość  $E_0$ . Obliczenia te choć proste wykraczają poza ramy tego wykładu. Wystarczy więc zapamiętać, że  $E_0 = kT$ , to znaczy jest równa średniej energii układu cząstek w temperaturze  $T$ . Ostatecznie więc

$$N(E) = Ae^{-\frac{E}{kT}}$$

Jest to rozkład Boltzmana, który mówi, że prawdopodobna ilość cząstek układu w równowadze w temperaturze  $T$ , znajdujących się w stanie o energii  $E$  jest proporcjonalna do  $\exp(-E/kT)$ . Sposób wyboru stałej proporcjonalności  $A$  zależy od tego jaki układ rozważamy.

## Rozwiązania ćwiczeń z modułu XI

### Ćwiczenie 36.1

Dane:  $n = 3$ .

Dla  $n = 3$  odpowiednie liczby kwantowe zgodnie z warunkami (36.3) wynoszą

$$(n, l, m_l, s) = (3, 0, 0, \pm \frac{1}{2}) \\ (3, 1, 1, \pm \frac{1}{2}), (3, 1, 0, \pm \frac{1}{2}), (3, 1, -1, \pm \frac{1}{2}) \\ (3, 2, 2, \pm \frac{1}{2}), (3, 2, 1, \pm \frac{1}{2}), (3, 2, 0, \pm \frac{1}{2}), (3, 2, -1, \pm \frac{1}{2}), (3, 2, -2, \pm \frac{1}{2})$$

W stanie  $n = 3$  może znajdować się maksymalnie 18 elektronów

### Ćwiczenie 36.2

Dane:  $k \rightarrow \infty, j = 1, R = 1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}, c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}, 1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}, a = 2, Z_{Cu} = 29, Z_{Pb} = 82$ .

Maksymalną częstotliwość fotonów promieniowania X obliczamy z prawa Moseleya

$$\nu = (Z - a)^2 R c \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{j^2} \right)$$

uwzględniając  $k \rightarrow \infty$  i  $j = 1$ .

Po podstawieniu danych otrzymujemy dla miedzi  $\nu_{max} = 8.88 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$  co odpowiada energii kwantu  $h\nu_{max} = 368 \text{ eV}$  i minimalnej długości fali  $\lambda_{min} = 3.38 \text{ nm}$ .

Analogicznie dla ołowiu  $\nu_{max} = 2.63 \cdot 10^{17} \text{ Hz}, h\nu_{max} = 1091 \text{ eV}$  i  $\lambda_{min} = 1.14 \text{ nm}$ .

### Ćwiczenie 38.1

Dane:  $\Delta M = 0.0303779 \text{ u}, c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, 1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

Energię wiązania dla  ${}^4_2\text{He}$  obliczamy z zależności  $\Delta E = \Delta M c^2$

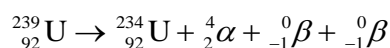
$1 \text{ u} = 1/12$  masy atomowej węgla  ${}^{12}_6\text{C}$

$$1 \text{ u} = \frac{1}{12} \frac{\mu_C}{N_{Av}} = \frac{1}{12} \frac{12 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}}{6.02 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy energię wiązania równą 28.3 MeV.

### Ćwiczenie 38.2

Jądro  ${}^{238}\text{U}$  przechodzi w  ${}^{234}\text{U}$  w wyniku przemiany  $\alpha$  i dwóch przemian  $\beta^-$ .



**Ćwiczenie 38.3**

Dane:  $t = 42$  dni,  $N(0) - N(t) = 0.875 \cdot N(0)$ .

Po czasie połowicznego rozpadu liczba jąder maleje do połowy to znaczy, że po  $m$  takich okresach liczba pozostałych jąder

$$N(t = mT) = \left(\frac{1}{2}\right)^m N(0)$$

Z danych wynika, że  $N(t) = 0.125 \cdot N(0) = (1/8) \cdot N(0)$  więc po podstawieniu otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{8}\right) N(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^m N(0)$$

skąd

$$m = 3$$

Oznacza to, że 87.5% jąder rozpadło się w czasie równym trzem czasom połowicznego rozpadu. Ponieważ minęło 42 dni to czas połowicznego rozpadu  $T = (42/3) = 14$  dni.

**Ćwiczenie 38.4**

Dane:  $\Delta E = 200$  MeV,  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s,  $1\text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}$  J.

Masa jest równoważna energii zgodnie z zależnością  $\Delta E = \Delta M c^2$

Podstawiając dane otrzymujemy  $\Delta M = 3.55 \cdot 10^{-28}$  kg = 0.214 u co stanowi 0.09 % masy jądra uranu.

**Ćwiczenie 38.5**

Dane:  $E_U$  (rozszczerzenie jądra uranu) = 200 MeV =  $3.2 \cdot 10^{-11}$  J,

$E_C$  (spalanie 1 kg węgla) =  $2.5 \cdot 10^7$  J,  $m_U = 1$  kg,  $\mu_u = 235$  g/mol,  $N_{Av} = 6.02 \cdot 10^{23}$  1/mol.

Energia uzyskana w reakcji rozszczepienia 1 kg uranu wynosi  $E = E_U \frac{m_U}{\mu_U} N_{Av}$ .

Podstawiając dane otrzymujemy  $E = 8.2 \cdot 10^{13}$  J co odpowiada energii uzyskanej przy spalaniu węgla o masie  $m_C = E/E_C = 3.28 \cdot 10^6$  kg.

**Ćwiczenie 38.6**

Dane:  $M_S = 2 \cdot 10^{30}$  kg,  $P = 4 \cdot 10^{26}$  W, energia wytwarzana przy przemianie wodoru w hel stanowi 0.7% masy "paliwa" wodorowego.

Energia wytwarzana w cyklu wodorowym wynosi  $E = 0.007 \cdot M c^2 = 1.3 \cdot 10^{45}$  J

Stąd

$$t = E/P = (1.3 \cdot 10^{45} \text{ J}) / (4 \cdot 10^{26} \text{ W}) = 10^{11} \text{ lat}$$

Jest to około 20 razy więcej niż dotychczasowy wiek Słońca.

**Test XI**

1. Ile elektronów w atomie Ge, będącym w stanie podstawowym, znajduje się w stanach o  $n = 3$  i  $n = 4$  ?
2. Najmniejsza długość fali promieniowania  $X$  emitowanego z próbki wynosi  $\lambda_{min} = 2 \cdot 10^{-10}$  m. Jaki jest najcięższy pierwiastek występujący w tej próbce?
3. Ile elektronów przewodnictwa znajduje się w gramie germanu domieszkowanego arsenem, jeżeli ilość domieszki wynosi  $10^{18}$  atomów arsenu na jeden mol atomów germanu?
4. Oblicz orbitalny moment magnetyczny elektronu dla pierwszych trzech orbit wodoru.
5. Moment dipolowy atomu żelaza wynosi  $1.8 \cdot 10^{-23}$  Am<sup>2</sup>. Jaki jest moment dipolowy żelaznej igły kompasu wykonanej w kształcie płytki o wymiarach  $3 \text{ cm} \times 5 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$  jeżeli momenty magnetyczne wszystkich atomów są ustawione w jednym kierunku?
6. Który z czasów jest dłuższy: czas połowicznego zaniku czy średni czas życia atomu promieniotwórczego?
7. Jaką ilość cząstek  $\alpha$  wyemituje, w ciągu 1 sekundy, 1 gram izotopu uranu  ${}^{238}_{92}\text{U}$  o połowicznym czasie zaniku  $T = 4.5 \cdot 10^9$  lat?
8. Oblicz maksymalną energię cząstek  $\beta^-$  emitowanych przez promieniotwórczy węgiel  ${}^{14}_6\text{C}$  w następującej reakcji  ${}^{14}_6\text{C} \rightarrow {}^{14}_7\text{N} + \beta^-$ . Masa  ${}^{14}_6\text{C} = 14.003242$  u, a masa  ${}^{14}_7\text{N} = 14.003074$  u.
9. Ile gramów uranu trzeba zużywać dziennie w elektrowniach jądrowych, żeby wyprodukować 1 GW energii elektrycznej? Sprawność przemiany wynosi 30%.
10. Podczas wybuchu bomby wodorowej zachodzi reakcja termojądrowa, w której z deuteru i trytu powstają jądra helu  ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$ . Oblicz ilość energii jaka wydzieli się podczas wybuchu, w którym powstaje 1 kg He. Masa atomu  ${}^2_1\text{H} = 2.014102$  u, masa  ${}^3_1\text{H} = 3.016049$  u, masa  ${}^4_2\text{He} = 4.002604$ , a masa neutronu  ${}^1_0\text{n} = 1.008665$  u.

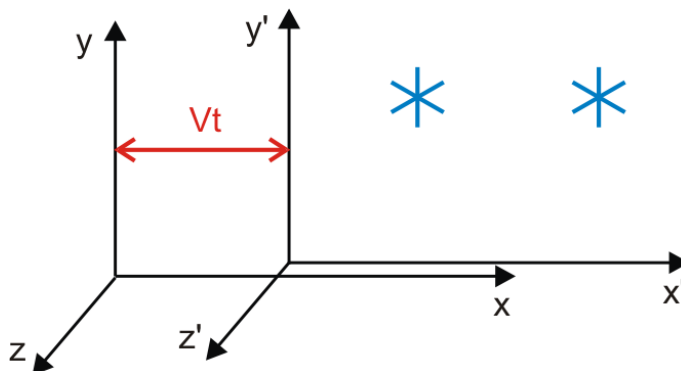
**UZUPEŁNIENIE**

## U.1 Elementy szczególnej teorii względności

Mechanika klasyczna oparta na zasadach dynamiki Newtona poprawnie opisuje zjawiska, w których prędkości ciał są małe w porównaniu z prędkością światła. Jednak w zjawiskach atomowych, jądrowych i w astrofizyce spotykamy się z prędkościami zbliżonymi do prędkości światła i wtedy zamiast mechaniki klasycznej musimy stosować *mechanikę relatywistyczną* opartą na *szczególnej teorii względności* opracowanej przez Einsteina. Mechanika klasyczna nie jest sprzeczna z mechaniką relatywistyczną, a stanowi jej szczególny przypadek (dla małych prędkości).

### U.1.1 Transformacja Galileusza

Spróbujemy teraz opisać zjawiska widziane z dwóch różnych inercjalnych układów odniesienia, poruszających się względem siebie (rysunek U.1). W tym celu wyobraźmy sobie, obserwatora na Ziemi, który rejestruje dwa zdarzenia (na przykład dwie eksplozje) zachodzące na pewnej, jednakowej wysokości.



Rys. U1.1. Obserwacja zjawisk z dwóch poruszających się względem siebie układów odniesienia

Odległość między miejscami wybuchów wynosi, (według ziemskiego obserwatora)  $\Delta x$ , natomiast czas między wybuchami  $\Delta t$ . Te same dwa zdarzenia obserwowane są przez pasażera samolotu lecącego z prędkością  $V$  po linii prostej łączącej miejsca wybuchów. Względem lokalnego układu odniesienia związanego z lecącym samolotem różnica położenia wybuchów wynosi  $\Delta x'$ , a różnica czasu  $\Delta t'$ .

Porównajmy teraz spostrzeżenia obserwatorów na ziemi i w samolocie. Zróbmy to na przykład z pozycji obserwatora na ziemi, który próbuje opisać to co widzą pasażerowie samolotu. Jeżeli, pierwszy wybuch nastąpił w punkcie  $x_1'$  (wg samolotu), a drugi po czasie  $\Delta t$ , to w tym czasie samolot przeleciał drogę  $V\Delta t$  (względem obserwatora na Ziemi) i drugi wybuch został zaobserwowany w punkcie

$$x_2' = x_1' + \Delta x - Vt \quad (\text{U.1.1})$$

czyli

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = \Delta x - Vt \quad (\text{U.1.2})$$



Jednocześnie, ponieważ samolot leci wzdłuż linii łączącej wybuchy, to  $\Delta y' = \Delta z' = 0$ . Oczywistym wydaje się też, że  $\Delta t' = \Delta t$ . Otrzymaliśmy więc wzory przekładające wyniki obserwacji jednego obserwatora na spostrzeżenia drugiego

$$\begin{aligned}x' &= x - Vt \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t\end{aligned}\tag{U1.3}$$

Te równania noszą nazwę *transformacji Galileusza*.

Sprawdźmy, czy stosując powyższe wzory do opisu doświadczeń, otrzymamy takie same wyniki, niezależnie od układu w którym to doświadczenie opisujemy. Jako przykład wybierzmy ciało poruszające wzdłuż osi  $x$  ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem  $a$ .

W układzie nieruchomym prędkość chwilowa ciała wynosi

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t}\tag{U1.4}$$

Jego przyspieszenie jest stałe i równe  $a$ . Natomiast obserwator w pojeździe poruszającym się wzdłuż osi  $x$  ze stałą prędkością  $V$  rejestruje, że w czasie  $\Delta t'$  ciało przebywa odległość  $\Delta x'$ . Zatem prędkość chwilowa ciała zmierzonego przez tego obserwatora wynosi

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}\tag{U1.5}$$

Zgodnie z transformacją Galileusza  $\Delta x' = \Delta x - V\Delta t$ , oraz  $\Delta t' = \Delta t$ , więc

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\Delta t} = u - V\tag{U1.6}$$

Otrzymaliśmy prędkość względną jednego obiektu względem drugiego co jest wynikiem intuicyjnie oczywistym. Natomiast przyspieszenie w układzie poruszającym się wynosi

$$a' = \frac{\Delta u'}{\Delta t'} = \frac{\Delta(u - V)}{\Delta t} = \frac{\Delta u}{\Delta t} = a\tag{U1.7}$$

Widać, że w tym przypadku zastosowanie wzorów transformacji Galileusza daje wynik zgodny z doświadczeniem. Jednak nie jest to prawdą w każdym przypadku. Miedzy innymi stwierdzono, że ta transformacja zastosowana do równań Maxwella nie daje tych samych wyników dla omawianych układów inercjalnych. W szczególności z praw Maxwella wynika, że prędkość światła jest podstawową stałą przyrody i powinna być sama w każdym układzie odniesienia. Oznacza to na przykład, że gdy impuls światła rozchodzący się w próżni w kierunku  $x$  jest obserwowany przez dwóch obserwatorów pokazanych na rysunku U.1.1 to zarówno obserwator nieruchomy jak poruszający się z prędkością  $V$  (względem

pierwszego) zmierzają identyczną prędkość impulsu  $c = 2.998 \cdot 10^8$  m/s. Tymczasem zgodnie z transformacją Galileusza i ze zdrowym rozsądkiem powinniśmy otrzymać wartość  $c - V$ .

Wykonano szereg doświadczeń, w których próbowano podważyć równania Maxwella, a w szczególności próbowano pokazać, że prędkość światła, tak jak prędkość dźwięku zależy od układu odniesienia (stosuje się do transformacji Galileusza). Najślawniejsze z nich, to doświadczenie Michelsona-Morleya mające na celu wykrycie wpływu ruchu orbitalnego Ziemi na prędkość światła poprzez pomiar prędkości światła w kierunku prostopadłym i równoległym do ruchu Ziemi. Wszystkie te doświadczenia dały wynik negatywny i musimy uznać, że



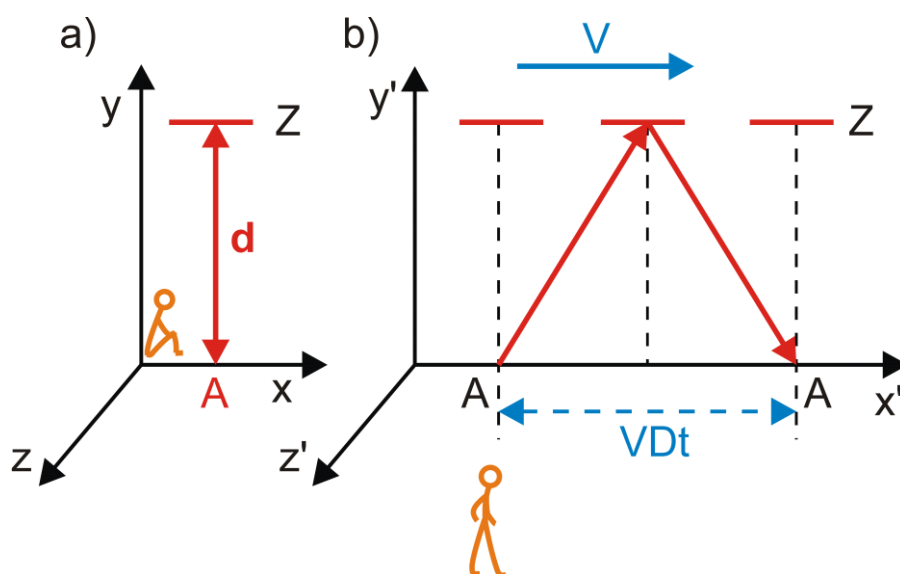
### Prawo, zasada, twierdzenie

*Prędkość światła w próżni  $c = 2.998 \cdot 10^8$  m/s jest jednakowa we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.*

Rozpatrzmy teraz niektóre wnioski wynikające ze stałości prędkości światła.

### U.1.2 Dylatacja czasu

Rozpatrzmy rakietę, w której znajduje się przyrząd wysyłający impuls światła z punktu A, który następnie odbity przez zwierciadło Z, odległe o  $d$ , powraca do tego punktu A, gdzie jest rejestrowany (rysunek U.1.2).



Rys. U1.2. Pomiar czasu przebiegu impulsu świetlnego w dwóch układach odniesienia

Czas  $\Delta t'$  jaki upływa między wysłaniem światła, a jego zarejestrowaniem przez obserwatora będącego w rakiecie (rysunek a) jest oczywiście równy  $\Delta t' = 2d/c$ . Teraz to samo zjawisko opisujemy z układu nieruchomego obserwatora (rysunek b), względem którego rakietę porusza się w prawo z prędkością  $V$ . Chcemy, w tym układzie, znaleźć czas  $\Delta t$  przelotu światła z punktu A do zwierciadła Z i z powrotem do A. Jak widać na rysunku U1.2 (b) światło przechodząc od punktu A do zwierciadła Z porusza się po linii o długości  $S$

$$S = \sqrt{\left(v \frac{\Delta t}{2}\right)^2 + d^2} \quad (\text{U1.8})$$

Zatem czas potrzebny na przebycie drogi AZA (to jest dwóch odcinków o długości  $S$ ) wynosi

$$\Delta t = 2 \frac{\sqrt{\left(v \frac{\Delta t}{2}\right)^2 + d^2}}{c} \quad (\text{U1.9})$$

Przekształcając to równanie otrzymujemy ostatecznie


$$\Delta t = \frac{\frac{2d}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{U1.10})$$

Widzimy, że warunek stałości prędkości światła w różnych układach odniesienia może być spełniony tylko wtedy gdy, czas pomiędzy dwoma zdarzeniami obserwowanymi i mierzonymi z różnych układów odniesienia jest różny. W konsekwencji



### **Prawo, zasada, twierdzenie**

*Każdy obserwator stwierdza, że poruszający się zegar idzie wolniej niż identyczny zegar w spoczynku.*

To zjawisko *dylatacji czasu*  jest własnością samego czasu i dlatego spowolnieniu ulegają wszystkie procesy fizyczne gdy są w ruchu. Dotyczy to również reakcji chemicznych, więc i biologicznego starzenia się.

Dylatację czasu zaobserwowano doświadczalnie między innymi za pomocą nietrwałych cząstek. Cząstki takie przyspieszono do prędkości bliskiej prędkości światła i mierzono zmianę ich czasu połowicznego zaniku.



### **Ćwiczenie U.1**

Spróbuj obliczyć ile razy wzrośnie czas połowicznego zaniku cząstki poruszającej się z prędkością  $V = 0.99 c$ . Żeby sprawdzić czy można zarejestrować taką cząstkę oblicz jaką drogę  $s$  przebędzie ona w tym czasie, jeżeli czas połowicznego zaniku nieruchomej cząstki wynosi  $10^{-8}$  s. Wynik zapisz poniżej.

$t =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

### U.1.3 Transformacja Lorentza

Szukamy ponownie (jak przy transformacji Galileusza) wzorów przekładających spostrzeżenia jednego obserwatora na obserwacje drugiego. Chcemy znaleźć transformację współrzędnych ale taką, w której obiekt poruszający się z prędkością równą  $c$  w układzie nieruchomym  $(x, y, z, t)$ , również w układzie  $(x', y', z', t')$  poruszającym się z prędkością  $V$  wzdłuż osi  $x$  będzie poruszać się z prędkością  $c$ . Transformacja współrzędnych, która uwzględnia niezależność prędkości światła od układu odniesienia ma postać

$$\begin{aligned}
 x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\
 y' &= y \\
 z' &= z \\
 t' &= \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}
 \end{aligned}
 \tag{U1.11}$$

gdzie  $\beta = V/c$ . Te równania noszą nazwę *transformacji Lorentza*. Omówimy teraz niektóre wnioski wynikające z transformacji Lorentza.

#### U.1.3.1 Jednoczesność

Przyjmijmy, że według obserwatora w rakiecie poruszającej się wzdłuż osi  $x'$  (czyli także wzdłuż osi  $x$ , bo zakładamy, że te osie są równoległe) pewne dwa zdarzenia zachodzą równocześnie  $\Delta t' = t_2' - t_1' = 0$ , ale w różnych miejscach  $x_2' - x_1' = \Delta x' \neq 0$ . Sprawdźmy, czy te same zdarzenia są również jednoczesne dla obserwatora w spoczynku. Z transformacji Lorentza wynika, że

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}
 \tag{U1.12}$$

oraz

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - \beta^2} + V \Delta t
 \tag{U1.13}$$

Łącząc te równania otrzymujemy związek

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} - \frac{V}{c^2} \Delta x'
 \tag{U1.14}$$

Jeżeli teraz uwzględnimy fakt, że zdarzenia w układzie związanym z rakieta są jednoczesne  $\Delta t' = 0$  to otrzymamy ostatecznie

$$\Delta t = \frac{\frac{V}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (\text{U1.15})$$

Widzimy, że równoczesność zdarzeń nie jest bezwzględna, w układzie nieruchomym te dwa zdarzenia *nie są jednoczesne*.

### U.1.3.2 Skrócenie długości

Teraz rozpatrzmy inny przykład. W rakiecie poruszającej się z prędkością  $V$ , wzdłuż osi  $x'$  leży pręt o długości  $L'$ . Sprawdźmy jaką długość tego pręta zaobserwuje obserwator w układzie nieruchomym.

Pomiar długości pręta polega na zarejestrowaniu dwóch zjawisk zachodzących równocześnie na końcach pręta (np. zapalenie się żarówek). Ponieważ żarówki zapalają się na końcach pręta to  $\Delta x' = L'$ . Ponadto żarówki zapalają się w tym samym czasie (dla obserwatora w układzie spoczywającym) to dodatkowo  $\Delta t = 0$ . Uwzględniając te warunki otrzymujemy na podstawie transformacji Lorentza

$$L' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Delta x \quad (\text{U1.16})$$

gdzie  $\Delta x$  jest długością pręta  $L$  w układzie nieruchomym. Stąd

$$\Delta x = L = L' \sqrt{1-\beta^2} \quad (\text{U1.17})$$

Okazuje się, że pręt ma mniejszą długość, jest krótszy.

### U.1.3.3 Dodawanie prędkości

W poprzednim punkcie rozważaliśmy obiekt spoczywający w rakiecie. Teraz zajmiemy się przypadkiem gdy obiekt ma już pewną prędkość  $U_x'$  w ruchomym układzie odniesienia (to jest względem rakiety). Sprawdźmy jaką prędkość  $U_x$  zarejestruje nieruchomy obserwator, w układzie którego rakieta porusza się z prędkością  $V$  wzdłuż osi  $x$ . Z transformacji Lorentza wynika, że

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - V \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (\text{U1.18})$$

oraz

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{U1.19})$$

Dzieląc te równania przez siebie otrzymujemy

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - V \Delta t}{\Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - V}{1 - \frac{V}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t}} \quad (\text{U1.20})$$

a po podstawieniu  $U_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$  oraz  $U_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$$U_x' = \frac{U_x - V}{1 - \frac{V U_x}{c^2}} \quad (\text{U1.21})$$

Powyższe równanie można rozwiązać ze względu na  $U_x$

$$U_x = \frac{U_x' + V}{1 + \frac{V U_x'}{c^2}} \quad (\text{U1.22})$$



### Ćwiczenie U.2

Rozpatrzmy dwa samoloty naddźwiękowe, które lecą ku sobie po linii prostej. Prędkości samolotów względem Ziemi wynoszą odpowiednio: pierwszego 1500 km/h, a drugiego 3000 km/h. Oblicz jaką prędkość pierwszego samolotu zmierzy obserwator w samolocie drugim. Zauważ, że ponieważ samolot drugi jest układem, względem którego prowadzimy obliczenia to zgodnie z naszymi oznaczeniami  $U_x = 1500$  km/h, a  $V = -3000$  km/h. Ujemny znak prędkości  $V$  wynika z przeciwnego kierunku ruchu. Wynik zapisz poniżej.

$U_x =$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

#### U.1.3.4 Zależność masy od prędkości

Dotychczas zajmowaliśmy się kinematyką ruchu ciała obserwowanego z dwóch układów odniesienia poruszających się względem siebie ze stałą prędkością. Teraz chcemy odpowiedzieć na pytanie jak można opisać zachowanie ciała pod wpływem sił w sytuacji, gdy transformacja Lorentza, (a nie Galileusza) jest prawdziwa. Chodzi o to, czy druga zasada

dynamiki Newtona  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$  może być stosowana i czy zasada zachowania pędu ma taką samą postać we wszystkich układach inercjalnych.

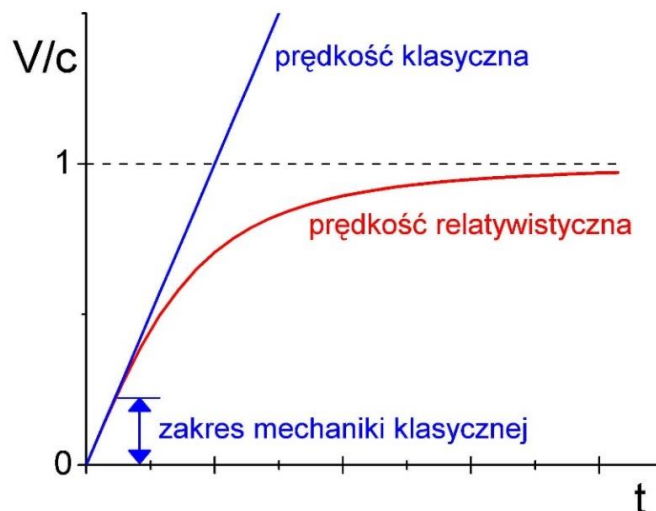
Okazuje się, że warunkiem zachowania pędu przy transformacji z jednego układu odniesienia do innego jest uwzględnienie zależności masy ciała  $m$  od jego prędkości  $V$ , danej następującym wyrażeniem

$$m(V) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{U1.23})$$

w którym  $m_0$  oznacza masę spoczynkową, czyli masę nieruchomego ciała. Zauważmy ponadto, że masa cząstki rośnie wraz z prędkością i zmierza do nieskończoności gdy  $V \rightarrow c$ . Rozpatrzmy teraz ruch ciała pod wpływem stałej siły  $\mathbf{F}$  działającej równoległe do kierunku ruchu. Zależność prędkości ciała od czasu obliczamy na podstawie drugiej zasad dynamiki Newtona. Uwzględniając zależność masy od prędkości (U1.23) otrzymujemy

$$V(t) = \frac{Ft/m_0}{\sqrt{1 + \left(Ft/m_0c\right)^2}} \quad (\text{U1.24})$$

Porównanie zależności prędkości ciała od czasu działania siły w mechanice klasycznej i relatywistycznej jest pokazane na rysunku U1.3. W przeciwieństwie do opisu klasycznego, z powyższej zależności wynika, że cząstki nie da się przyspieszać w nieskończoność działającą stałą siłą.



Rys. U.1.3. Zależność prędkości ciała od czasu działania stałej siły w mechanice klasycznej i relatywistycznej

Zmiana masy z prędkością została potwierdzona wieloma doświadczeniami przeprowadzonymi dla cząstek elementarnych.

### U.1.3.5 Równoważność masy i energii

Einstein pokazał, że zasada zachowania energii jest spełniona w mechanice relatywistycznej pod warunkiem, że pomiędzy masą i całkowitą energią ciała zachodzi związek

$$E = mc^2 \quad (\text{U1.25})$$

gdzie  $m$  zależy od prędkości ciała  $V$  zgodnie z równaniem (U1.23). To znane powszechnie równanie Einsteina opisuje równoważność masy i energii. Wynika z niego, że ciało w spoczynku ma zawsze pewną energię związaną z jego masą spoczynkową

$$E_0 = m_0c^2 \quad (\text{U1.26})$$

Energię kinetyczną ciała poruszającego się z prędkością  $V$  obliczamy odejmując od energii całkowitej energię spoczynkową (nie związaną z ruchem)

$$E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = (m - m_0)c^2 \quad (\text{U1.27})$$

Widzimy, że mechanika relatywistyczna wiąże energię kinetyczną z przyrostem masy ciała.



#### Ćwiczenie U.3

Spróbuj teraz obliczyć prędkość cząstki, której energia kinetyczna jest równa jej energii spoczynkowej. O ile wzrosła masa tej cząstki w stosunku do masy spoczynkowej? Wynik zapisz poniżej.

$$\frac{m}{m_0} =$$

Rozwiązanie możesz sprawdzić na końcu modułu.

Na zakończenie zobaczmy jaką wartość przyjmuje energia całkowita, jeśli prędkość  $V$  jest mała. Dla małego  $V$  równanie (U1.23) można przybliżyć (rozwijając w szereg) do postaci

$$m(V) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \approx m_0 \left( 1 + \frac{V^2}{2c^2} \right) \quad (\text{U1.28})$$

Podstawiając tę wartość do wyrażenia na energię całkowitą otrzymujemy

$$E = m(V)c^2 \approx m_0c^2 + \frac{m_0V^2}{2} \quad (\text{U1.29})$$



Pierwszy wyraz jest energią związaną z istnieniem samej masy (energia spoczynkowa) natomiast drugi jest klasyczną energią kinetyczną związaną z ruchem ciała. Otrzymaliśmy rozwiązanie klasyczne jako graniczny przypadek (dla małych prędkości) rozwiązania relatywistycznego.

## Rozwiązania ćwiczeń z Uzupełnienia

### Ćwiczenie U.1.1

Dane:  $V = 0.99 c$ ,  $t = 10^{-8}$  s.

Czas połowicznego zaniku poruszającej się cząstki obliczamy z zależności

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Podstawiając dane otrzymujemy  $t = 7 \cdot 10^{-8}$  s. W tym czasie cząstka przebywa drogę  $s = 21$  m i dlatego może być zarejestrowana.

### Ćwiczenie U.1.2

Dane:  $U_x = 1500$  km/h,  $V = -3000$  km/h.

Prędkość rejestrowaną przez pilota pierwszego samolotu obliczamy ze wzoru

$$U_x = \frac{U_x' + V}{1 + \frac{V U_x'}{c^2}}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy  $U_x = 4497.77$  km/h. Dla porównania zgodnie z transformacją Galileusza prędkość względna wynosi 4500 km/h.

### Ćwiczenie U1.2

Z treści zadania wynika, że energia spoczynkowa cząstki jest równa jej energii kinetycznej

$$m_0 c^2 = (m - m_0) c^2$$

lub

$$2m_0 c^2 = m c^2$$

skąd

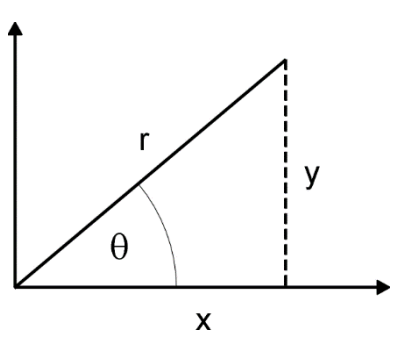
$$\frac{m}{m_0} = 2$$

## Uniwersalne stałe fizyczne

Wielkość	Symbol	Wartość
Prędkość światła w próżni	$c$	$2.9979 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Przenikalność magnetyczna próżni	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Przenikalność elektryczna próżni	$\epsilon_0$	$8.8542 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Stała Plancka	$h$	$6.6262 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Elektryczny ładunek elementarny	$e$	$1.60219 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Masa spoczynkowa elektronu	$m_e$	$9.1095 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masa spoczynkowa protonu	$m_p$	$1.6726485 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masa spoczynkowa neutronu	$m_n$	$1.6749 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Stała Rydberga	$R$	$1.0974 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$
Liczba Avogadro	$N_{Av}$	$6.0220 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Jednostka masy atomowej	$u$	$1.6606 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Stała Boltzmana	$k$	$1.3807 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Stała Stefana-Boltzmana	$\sigma$	$5.67031 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
Stała gazowa	$R$	$8.3144 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Stała grawitacyjna	$G$	$6.6720 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

**Użyteczne wzory matematyczne**

<b>Geometria</b>	
Pole okręgu	$\pi r^2$
Pole kuli	$4\pi r^2$
Objętość kuli	$\frac{4}{3}\pi r^3$

<b>Trygonometria</b>	
	$\sin \theta = \frac{y}{r}$ $\cos \theta = \frac{x}{r}$ $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ $\sin(\alpha \pm \beta) = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$

<b>Niektóre pochodne</b>	
$\frac{d}{dx} a = 0$	$\frac{d}{dx} (af(x)) = a \frac{df(x)}{dx}$
$\frac{d}{dx} (x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}$
$\frac{d}{dx} (\sin(ax)) = a \cos ax$	$\frac{d}{dx} (\cos(ax)) = -a \sin ax$
$\frac{d}{dx} (f + g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$	$\frac{d}{dx} (f \cdot g) = f \frac{dg}{dx} + g \frac{df}{dx}$

<b>Niektóre całki (C = const.)</b>	
$\int dx = x + C$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$
$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$	$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x) \Big _{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$	

# Układ okresowy pierwiastków

Grupa IA Litowce		IIA Berylowce		IIIA Borowce		IVA Węglowce		VA Azotowce		VIA Tlenowce		VIIA Fluorowce		VIIIA Helowce																																																																																																																																																																																															
1	H 1.008 Wodór	2	He 4.0026 Hel	3	Li 6.941 Lit	4	Be 9.012 Beryl	5	B 10.81 Bor	6	C 12.011 Węgiel	7	N 14.006 Azot	8	O 15.999 Tlen	9	F 18.998 Fluor	10	Ne 20.179 Neon	11	Na 22.989 Sód	12	Mg 24.305 Magnez	13	Al 26.981 Glin	14	Si 28.085 Krzem	15	P 30.974 Fosfor	16	S 32.06 Siarka	17	Cl 35.453 Chlor	18	Ar 39.948 Argon	19	K 39.098 Potas	20	Ca 40.08 Wapń	21	Sc 44.956 Skand	22	Ti 47.90 Tytan	23	V 50.952 Wanad	24	Cr 51.996 Chrom	25	Mn 54.938 Mangan	26	Fe 55.847 Żelazo	27	Co 58.933 Kobalt	28	Ni 58.70 Nikiel	29	Cu 63.546 Miedź	30	Zn 65.38 Cynk	31	Ga 69.72 Gal	32	Ge 72.59 German	33	As 74.921 Arsen	34	Se 78.96 Selen	35	Br 79.904 Brom	36	Kr 83.80 Krypton	37	Rb 85.467 Rubid	38	Sr 87.62 Stront	39	Y 88.906 Itr	40	Zr 91.22 Cyrkon	41	Nb 92.906 Niob	42	Mb 95.94 Molibden	43	Tc 98.906 Technet	44	Ru 101.07 Ruten	45	Rh 102.905 Rod	46	Pd 106.4 Pallad	47	Ag 107.868 Srebro	48	Cd 112.41 Kadm	49	In 114.82 Ind	50	Sn 118.69 Cyna	51	Sb 121.75 Antymon	52	Te 127.60 Tellur	53	I 126.904 Jod	54	Xe 131.30 Ksenon	55	Cs 132.905 Cez	56	Ba 137.33 Bar	57	La 138.905 Lantan	58	Ce 140.12 Cer	59	Pr 140.907 Prazeodym	60	Nd 144.24 Neodym	61	Pm 145 Promet	62	Sm 150.35 Samar	63	Eu 151.96 Europ	64	Gd 157.25 Gadolin	65	Tb 158.925 Terb	66	Dy 162.50 Dysproz	67	Ho 164.930 Holm	68	Er 167.26 Erb	69	Tu 168.934 Tul	70	Yb 173.04 Iterb	71	Lu 174.967 Lutet	72	Hf 178.49 Hafn	73	Ta 180.948 Tantal	74	W 183.85 Wolfram	75	Re 186.20 Ren	76	Os 190.2 Osm	77	Ir 192.22 Iryd	78	Pt 195.09 Platyna	79	Au 196.966 Złoto	80	Hg 200.59 Rtęć	81	Tl 204.37 Tal	82	Pb 207.2 Ołów	83	Bi 208.980 Bizmut	84	Po 208.982 Polon	85	At 209.987 Astat	86	Rn 220.017 Radon	87	Fr 223.02 Franc	88	Ra 226.025 Rad	89	Ac 227.028 Aktyn	90	Th 232.038 Tor	91	Pa 231.036 Protaktyn	92	U 238.029 Uran	93	Np 237.048 Neptun	94	Pu 244 Pluton	95	Am 243.061 Ameryk	96	Cm 247 Klir	97	Bk 247.07 Berkel	98	Cm 251 Kaliforn	99	Es 254.088 Einstein	100	Fm 253 Ferm	101	Md 255 Mendelew	102	No 254 Nobel	103	Lr 257 Lorens

## Układ okresowy pierwiastków

liczba atomowa  
symbol  
masa atomowa  
nazwa